工业和信息化部“十二五”规划教材

弹箭非线性运动理论

韩子鹏　常思江　史金光　编著

NONLINEAR MOTION THEORY OF PROJECTILE AND ROCKET

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

工业和信息化部“十二五”规划教材

弹箭非线性运动理论

韩子鹏　常思江　史金光　编著

NONLINEAR MOTION THEORY OF PROJECTILE AND ROCKET

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书建立了包含几何非线性和气动力非线性的弹箭非线性运动动力学模型，简单总结了弹箭线性角运动形态及飞行稳定性若干问题；运用拟线性法和振幅平面法分析了非旋转弹和旋转弹在不同非线性气动力和气动力矩作用下的运动特征、极限运动存在的条件以及非线性动态稳定性、非线性强迫运动次谐波响应及跳跃现象；应用摄动法和广义振幅平面法更精确地分析了弹箭非线性运动特性及运动稳定性判据。

应用这些理论解释了一些用弹箭线性运动理论解释不了的飞行现象，例如在行进的舰船上发射弹箭，向左发射飞行稳定，向右发射却飞行不稳定；发射条件正常，飞行中结构正常的弹箭，一般情况下飞行正常，但偶尔发生飞行不稳甚至坠落，弹箭出现不衰减的锥摆运动，等等。并且讨论了避免这些现象发生，减小其影响的措施。

为了让从事弹箭设计、研究的工程技术人员和研究生顺利地阅读本书，在第一章预备知识中简单介绍了非线性振动的基本理论。

本书可作为外弹道学、弹箭飞行动力学、弹箭设计专业研究生的教材，也可供从事弹箭设计、靶场试验等方面的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹箭非线性运动理论／韩子鹏，常思江，史金光编著．—北京：北京理工大学出版社，2016.12

ISBN 978-7-5682-1722-4

Ⅰ.①弹…　Ⅱ.①韩…②常…③史…　Ⅲ.①炮弹-外弹道-非线性力学-飞行力学②火箭-外弹道-非线性力学-飞行力学　Ⅳ.①TJ012.3②V412.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第010037号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010) 68914775（总编室）
　　　　　(010) 82562903（教材售后服务热线）
　　　　　(010) 68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／22.75
字　　数／525千字
版　　次／2016年12月第1版　2016年12月第1次印刷
定　　价／52.00元

责任编辑／封　雪
文案编辑／封　雪
责任校对／周瑞红
责任印制／王美丽

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前 言

PREFACE

弹箭非线性运动理论的研究是从20世纪50年代中期开始的，它的出现并非因为理论上的兴趣，而是实际的需要。在以往分析弹箭运动时，不管在什么情况下，都是应用线性化角运动理论，这种理论曾经在很大范围内成功地预示了弹箭的运动，促进了弹箭飞行性能设计的发展。但随着弹箭作战要求的改变，其飞行马赫数范围增大，飞行空域环境扩展，并且许多新型弹箭的外形与经典尾翼弹、旋转弹的外形大不相同，因此弹箭的飞行产生了许多奇怪现象，而这些现象用弹箭线性运动理论无法解释，因此出现了弹箭非线性运动理论。

弹箭作为刚体在空中运动，作用于其上的有重力、空气动力和力矩以及发动机的推力。在弹箭的线性运动理论中，假设弹轴与速度线之间的夹角即攻角δ较小，故认为空气动力和力矩为攻角的线性函数，同时可取近似三角函数关系$\sin\delta\approx\delta$, $\cos\delta\approx 1$。这样弹箭的角运动方程即为线性微分方程，对此方程求解，得到弹箭的角运动规律，并由此可分析弹箭的飞行稳定性。这种分析方法在攻角较小的情况下一般是正确的，但对于大攻角条件下弹箭的飞行，如果还把空气动力和力矩视为攻角的线性函数、还采用上面的三角函数近似关系，用线性理论分析此时弹箭的运动，就可能导致本质上的错误。

众所周知，在大攻角情况下，空气动力和力矩一般为攻角的非线性函数，这称为气动非线性；同时还不能采用$\sin\delta\approx\delta$, $\cos\delta\approx 1$的线性化假设，这称为几何非线性，从而弹箭的角运动方程为非线性微分方程，而非线性微分方程与线性微分方程无论从求解方法，分析方法，还是从解的特性上都有本质差别。例如线性微分方程有一套成熟的求解方法，其特征值和特征向量决定了解的性质；线性微分方程确定的系统稳定性与初始条件无关、其运动频率与运动幅值无关，它们只与系统参数有关；动态稳定的系统其运动幅值衰减到零，动态不稳的系统其运动幅值发散到无穷，也就是说，线性系统只有一种幅值为零的极限运动状态。

而非线性微分方程的求解没有一套通用、成熟、准确的求解方法，往往是针对具体的非线性微分方程研究具体的求解方法；非线性系统的运动稳定性不仅与系统参数有关，而且与初始条件有密切相关，同一个非线性系统，在有些初始条件下运动稳定，在另一些初始条件下运动不稳；而且运动的周期和频率与运动的幅值有关；运动稳定的非线性系统除了能形成运动幅值为零的极限运动，还可以形成运动幅值不为零的极限运动，例如弹箭能产生极限圆运动、极限平面运动、极限椭圆运动等，而这种极限运动的幅值却与初始运动幅值无关，仅由系统参数确定。因此，将一个非线性系统用线性系统代替就有可能出现错误的论断，也就是说，线性化的处理方法是有条件的，并非任何非线性系统都可以线性化处理。

对弹箭非线性运动理论的研究，经历了实践—认识—再实践—再认识，逐步发展提高的过程。例如迫击炮弹的偶然掉弹；尾翼弹和尾翼式火箭的锥摆运动；

一些弹箭在平原地区射击飞行稳定而在高原地区射击偶然出现飞行不稳，而且多出现在跨声速飞行阶段；某些弹箭在同样射角同样初速条件下高原（空气密度低）的射程反而比平原（空气密度高）射程小；更为奇特是在行进的军舰上发射某尾翼式低速旋转火箭，当向左发射时火箭飞行稳定，而向右发射时火箭飞行不稳定，等等。如果通过仔细检查，确认不是由弹箭和发射装置的机械、电器故障所引起，那就只可能是由弹箭的运动规律和飞行稳定性所引起的，如果进一步用弹箭飞行的线性理论解释不了这种现象，那就只能从弹箭非线性运动理论上寻找原因，以便克服非线性运动造成的不利影响，或者反过来，利用非线性运动理论形成我们所需要的弹箭运动，例如无伞末敏弹的稳态扫描运动、控制弹箭自激振动只形成小振幅的极限圆运动以避免随机干扰等，这就促进了弹箭非线性运动理论的产生和发展。

由于影响弹箭运动的主要气动力矩是作用在弹箭上的静力矩，因此对弹箭非线性运动理论的研究，最先也是从仅考虑非线性静力矩开始。弹箭仅在非线性静力矩作用下是一个保守系统，通过能量积分和动量矩积分可以得到用椭圆函数表示的精确解。随着研究的进一步深入，又把赤道阻尼力矩、马格努斯力矩以及升力等也考虑为攻角的非线性函数。从风洞和自由飞行靶道的测试数据中看出，一般马格努斯力矩的非线性是比较大的。

在考虑了这些力和力矩的非线性后，发展了拟线性法和摄动法，可求出弹箭角运动方程的近似解析解，应用了相轨线、奇点、极限环理论，在振幅平面和广义振幅平面上讨论弹箭运动的动态稳定性。与线性化方法相比，这种方法更符合实际情况，它成功地解释了试验中观察到的一些奇异现象、预示了弹箭飞行特性。

随着现代非线性振动理论的发展，弹箭非线性运动分析中又引进了分岔理论和混沌运动理论。分岔理论的研究有利于寻找引起弹箭飞行特性突变的弹箭气动力参数和结构参数分岔点，为进行参数设计、避免非线性飞行突变不稳提供依据；而混沌运动理论的研究，有利于设法产生幅值不大、运动实际上稳定的混沌运动，它比线性飞行理论中要么稳定得攻角衰减到零、要么不稳定发散到无穷的僵硬判据要切合实际得多。

本书是外弹道专业高年级学生及研究生的教学用书，也可用作弹箭专业的研究生以及从事弹箭设计、靶场试验等工作的工程技术人员的参考书。全书共分7章。

第一章是预备知识，介绍了运动稳定性定义及判定稳定性的方法，求解非线性微分方程的几种方法，奇点、相轨线、极限环、极限运动的概念，奇点类型判别准则，跳跃现象，超谐波与亚谐波振动，自激振动和参数振动，分岔和混沌振动。

第二章是弹箭角运动方程的建立和线性运动简述，建立运动方程时考虑了气动力和力矩的非线性和几何非线性，为进行非线性运动分析做好准备；同时简单总结了弹箭线性角运动的主要特点，特别是二圆运动和动态稳定性问题，以便与下面的非线性角运动方程的求解方法以及非线性运动特点进行对比。

第三章讲述了弹箭非线性角运动方程的系数可变情况下的解法，研究了由于弹箭飞行高度变化引起空气密度变化、弹箭转速变化，以及由滚转方位角变化产生周期性诱导滚转力矩等变系数因素对弹箭角运动性态的影响，并从中导出了分析弹箭角运动方程的拟线性求解方法。

第四章讲述了非旋转尾翼弹的平面非线性运动的极限环,分析了尾翼弹偶然掉弹的原因;采用拟线性解法获得弹箭非线性角运动方程的近似解析解；应用振幅平面法研究了尾翼弹形成极限圆运动、极限平面运动和产生自激振动、锥摆运动、参数振动和分岔的机理；得出了

在一般非线性空气动力矩作用下非旋转弹箭的运动形态及其动态稳定性判据。

第五章通过引入能量积分和动量矩积分，详细讲述了在几种类型三次方静力矩作用下，弹箭角运动方程的精确解析解，以及精确解与拟线性解的比较，导出了极限圆运动、广义极限平面运动存在的条件；特别分析了在非线性马格努斯力矩作用下使弹箭极限圆运动稳定的初始条件域，解释了某尾翼式低速旋转火箭在行进舰船上向左发射飞行稳定，向右发射飞行不稳定的原因。利用旋转弹箭在非线性静力矩作用下的拟线性解，分析了非线性强迫运动的稳态谐波运动和稳态非谐波运动，揭示了非线性强迫运动的跳跃现象。研究了在非线性赤道阻尼力矩作用下弹箭的强迫极限运动，得到一圆运动、二圆运动、三圆运动稳定的条件。最后探讨了弹箭在一般非线性气动力作用下的非线性运动动态稳定性判据。

第六章讲述了弹箭非线性运动分析的摄动法，其基本思想是以第五章求得的、在仅有三次方静力矩作用下以椭圆函数表示的角运动精确解为基础，将其他非线性力矩的影响作为椭圆函数基础解的摄动，并引入广义振幅和广义振幅面、变系数情况下的振幅方程，利用奇点理论分析扰动运动的性态和稳定性，除了得到形成极限圆运动和对称极限平面运动的条件，还得出形成绕平衡角平面极限运动和椭圆极限运动的条件。将摄动法与拟线性法得到的结果与角运动方程数值积分的结果相比较表明，摄动法的结果更接近数值积分的结果。

第七章专门讲述非线性气动系数的获取方法，介绍了从靶道试验或攻角纸靶试验测试结果获取非线性气动系数的数学方法——微分修正法和参数微分法。同时也介绍了气动系数的工程计算法及获得的非线性气动系数的例子。

本书由韩子鹏主编，常思江博士、史金光副教授参加了第二章和第七章的编写，杨绍卿院士、李鸿志院士、郭锡福教授、余军教授对全书进行了审查，在编写过程中还参阅了国内外许多专家、学者、研究生的论文、著作，在此向这些同志、同行表示衷心的感谢。

限于水平，书中的错误和不足之处敬请读者指正。

作　者

目 录

CONTENTS

第1章
预 备 知 识

1.1 非线性运动理论和运动稳定性的基本概念

1.1.1 概述

本书所研究的非线性运动主要指的是非线性振动。在自然界、工程技术和日常生活与社会生活中普遍存在物体或系统的往复运动或状态的循环变化，这类现象称为振荡，如大海的波涛起伏、心脏的跳动、机器的运转、经济发展的起伏等。而振动指的是一种特殊的振荡，即在平衡位置附近的微小或有限的振荡，从最小的粒子到巨大的天体，从简单的单摆到复杂的生物体无处不存在振动现象。尽管振动现象的形式多种多样，但有着共同的客观规律和统一的数学表达式，因此有可能建立统一的理论来进行研究。

振动现象在数学中可以用微分方程的形式（包括常微分方程和偏微分方程）来描述，本书只涉及有一个自变量的常微分方程系统。根据描述振动的数学模型的不同，振动理论可分为线性振动理论和非线性振动理论。线性振动理论适用于线性系统，即作用于系统的弹性力和阻尼力与运动参数呈线性关系的系统，其数学描述为常系数常微分方程。不属于线性系统的系统为非线性系统。

线性振动理论是对振动现象的近似描述，在振幅足够小的大多数情况下，线性振动理论可以足够准确地反映振动的客观规律。但实际力学系统中广泛存在着各种非线性因素，如电场力、磁场力、万有引力、弹性力、气动力矩等作用力的非线性，法向加速度、科氏加速度等运动学非线性，弹性大变形、大攻角飞行的气动力非线性和几何非线性等，因此严格说起来，实际中的振动系统绝大多数是非线性系统。

非线性系统的运动特性与线性系统有本质的不同，例如：

（1）非线性运动不具有叠加性，即不同初始条件或不同强迫干扰所造成的运动不等于各个因素初始扰动或各个强迫干扰单独作用造成的运动之和。

（2）弹箭线性运动的稳定性只与弹箭的结构参数和气动参数有关，而与运动的初始条件无关，但非线性运动的稳定性却与运动的初始条件密切相关。线性运动中，弹箭自由振动的固有频率 ω_0 与初始条件、振幅大小无关，是系统本身的特性，而在非线性运动中自由振动频率 ω 随振幅大小改变，不同于线性系统固有频率。而且除基频 ω 外还有频率为 $3\omega, 5\omega, \cdots$ 的高次谐波存在，在声学中这些高次谐波称为泛音，各种不同声音结构的泛音决定了它们的音色。

（3）弹箭线性运动只有唯一的一种极限运动，即攻角为零的极限运动，但在非线性运动

中却可以出现非零的极限运动。例如，弹箭非线性运动可出现极限圆运动、极限平面运动、极限外摆线运动等。

（4）在非线性运动中可以出现自激振动，而线性系统不可能产生自激振动。

（5）线性运动中，在周期性强迫干扰作用下（例如对于弹箭，不对称因素产生干扰的频率就是自转角速度），最后剩下的强迫运动的频率与外激励频率 ω 相同。非线性系统在频率为 ω 的外力激励作用下，所产生的响应中不仅包含频率为 ω 的受迫振动，而且有 $3\omega, 5\omega, \cdots$ 等高次谐波存在，称为倍频响应。

（6）线性系统在频率为 ω 的周期外力激励作用下的强迫运动，只有当其固有频率 ω_0 接近激励频率 ω 时才产生共振，但在非线性强迫运动中，除了有与激励频率相同的主共振（即谐波响应）外还有与激励频率成整数倍或真分数倍的超谐波共振和亚谐波共振。亚谐波共振的出现将剧烈地破坏弹箭的飞行稳定性。

（7）线性系统在周期激励强迫作用下，强迫运动的振幅随激励频率的变化（即幅频特性曲线）是单值而连续的变化，而非线性系统强迫运动的幅频特性曲线可以出现多值段，从而产生跳跃现象。

（8）非线性系统的运动状态随系统中的参数变化而可能出现突变，即可能出现分岔现象。

（9）线性系统可以存在周期运动和非周期运动，但在无限长时间历程中，非周期运动都不是往复的稳定运动，如强阻尼线性振动趋于静止、不稳定的自由振动和无阻尼线性受迫振子共振时的运动都发散到无穷。而非线性系统则不同，它可以存在往复但非周期性的运动，既不收敛到零也不无穷发散，这种运动叫混沌振动。在实际工程中，如果混沌运动的范围不超出一定的限度，则可以认为运动是稳定的。

以下将逐渐对这些问题展开讲述，但只针对弹箭运动研究的需要，而略去一些数学上深入的理论和概念的讨论分析。

1.1.2 稳态运动和扰动运动方程

对于某个力学系统，假设它的运动状态可用下面的微分方法组来描述：

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}=Y_j(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1-1-1}$$

式中，y_j 是表征运动状态的变量，称为状态变量，如坐标、速度等。这组方程称为状态方程，以状态变量为基，建立抽象的 n 维空间，称为**状态空间或相空间**。相空间内的每个点与状态变量的每一组值相对应，称为**相点**。随着时间的推移，相点在相空间移动所描绘出的超曲线称为**相轨线**，它由状态方程的解确定。

引入 n 维列阵 $\boldsymbol{y}=(y_j)$ 和 $\boldsymbol{Y}=(Y_j)$，则方程（1－1－1）可写为矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}, t) \tag{1-1-2}$$

此方程满足解的存在与唯一性条件。设方程（1－1－2）存在特解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_s(t)$，满足

$$\dot{\boldsymbol{y}}_s=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}_s, t) \tag{1-1-3}$$

此特解所描述的是系统的某种特定运动，在实践中对应于某种正常工作状态、平衡状态或周期运动状态。将此特定的运动状态称为系统未受干扰的运动，简称**未扰动运动或稳态运动**。只要状态变量的初始值满足稳态运动的要求，$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_s(t_0)$，则此稳态运动能实现成为系统的

实际运动。若状态变量的初始值 $\boldsymbol{y}_0(t_0)$ 偏离 $\boldsymbol{y}_s(t_0)$，则系统的运动将偏离稳态运动，称该运动为受扰运动。受扰运动 $\boldsymbol{y}(t)$ 与未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 是同一动力学方程（1－1－2）但不同初速条件的解。引入受扰运动与未扰运动的差值作新的变量 $\boldsymbol{x}(t)$：

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_s(t) \tag{1-1-4}$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 称为扰动，其初始值 $\boldsymbol{x}(0)$ 为初扰动。将方程（1－1－2）与方程（1－1－3）相减，得到确定扰动量变化规律的微分方程，即扰动方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t) \tag{1-1-5}$$

式中

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}_s+\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{y}_s,t) \tag{1-1-6}$$

于是系统的未扰动运动与扰动方程的零解 $\boldsymbol{x}(t)\equiv 0$ 完全等价。相空间中与零解对应的点称为**平衡点**。

1.1.3　稳定性概念和李雅普诺夫稳定性定义

一般来说，任何一个力学系统都有运动稳定性问题。运动稳定性理论的任务是研究某些干扰因素（瞬时干扰、长期干扰）、系统结构参数对系统运动状态的影响，建立判别运动是否稳定的准则，讨论系统的动态性质。

微小的干扰因素对系统运动的影响随不同的运动而不同。对一些运动，这种影响并不显著，受干扰的运动与未受干扰的运动相差很小；而对某些运动，干扰因素的影响可能就很显著，以至于无论干扰因素多么小，随着时间的增长，受干扰的运动与未受干扰的运动的差别都很大，甚至越来越大。称第一类未受干扰的运动是稳定的，称第二类未受干扰的运动是不稳定的。

运动稳定性理论在自然科学和工程技术的许多领域有着广泛的应用，尤其在力学系统、自动控制系统、弹箭飞行理论中是重要研究内容。对于一般的线性和非线性系统的运动稳定性问题，李雅普诺夫在他的著名论文《运动稳定性一般问题》中提出了两种解决问题的方法。

第一种方法是级数展开法，在《运动稳定性的一般问题讲义》一书中已做了详细论述。本书着重叙述第二种方法的基本内容，因为它已经发展成为今天解决运动稳定性问题的基本方法。第二种方法就是李雅普诺夫第二方法，有时又称李雅普诺夫直接法，该方法无须求出系统运动微分方程的解，当把未受干扰的运动的稳定性归结为平衡位置的稳定性时，李雅普诺夫把构造具有特殊性质的函数（通常称为李雅普诺夫函数）V 与系统的稳定性联系起来，通过利用系统运动微分方程，求出函数 V 的变化率 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$，就可以判别系统的运动稳定性。

下面介绍李雅普诺夫意义下的运动稳定性定义。

定义 1　若给定任意小的正数 ε，存在正数 δ，对于一切受扰运动，只要其初始扰动满足 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|=\sum x_j^2(t_0)\leqslant\delta$，就能在所有 $t>t_0$ 时均有 $\|\boldsymbol{x}(t)\|=\sum x_j^2<\varepsilon$，则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 是稳定的。

此稳定性定义的几何解释是，在相空间以零点为中心作 $\|\boldsymbol{x}\|=\varepsilon$ 的球面 S_ε 和 $\|\boldsymbol{x}\|=\delta$ 的球面 S_δ，从 S_δ 内出发的每一条相轨迹将永远限制在 S_ε 以内（图 1－1－1 曲线 a）。

定义 2　如果未扰运动是稳定的，并且当 $t\to\infty$ 时 $\|\boldsymbol{x}\|\to 0$，则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 是渐近稳

定的。

渐近稳定性的几何解释是相空间内从 S_δ 内出发的每一条相轨迹都渐近地向原点趋近（图 1-1-1 曲线 b）。

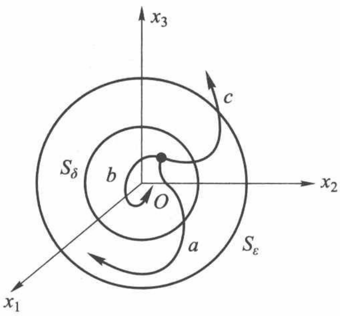

图 1-1-1　稳定性的几何解释

定义 3　若存在正数 ε_0，对任意 δ，存在受扰运动 $\boldsymbol{y}(t)$，当其初扰动满足 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|\leqslant\delta$ 时，存在时刻 $t_1>t_0$ 满足 $\|\boldsymbol{x}(t)\|=\varepsilon_0$，则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(t)$ 是不稳定的。

不稳定的几何解释是不论相空间 S_δ 选择如何小，总有一条从 S_δ 内出发的相轨迹最终到达 S_ε 的边界（图 1-1-1 曲线 c）。

从上面所叙述的李雅普诺夫意义下的稳定性定义中，可看出以下几个特点：

（1）李雅普诺夫的稳定性概念是一个局部概念，它涉及在被考虑的状态下附近的特性。因此，初始扰动的范围较小，也就是 δ 值较小，特别是对渐近稳定性而言，要求的 δ 值就更小。

（2）时间 t 是无限长的。

（3）初始扰动的大小与初始时刻 t_0 的选取无关。

（4）初始扰动之后无其他外界干扰。

（5）未扰动运动与扰动运动服从于同一方程，而且二者在同一时刻进行比较。

上面所介绍的李雅普诺夫意义下的稳定性概念，是考虑未被干扰的运动对于干扰的初始条件（即初始扰动之后无其他外界干扰）的稳定性。但随着科技和工程的发展，又出现了许多不符合李雅普诺夫稳定性定义的问题，推动了数学的发展，出现了有限时间稳定性理论、极限环的轨道稳定性概念及在经常受干扰作用下系统的稳定性等。例如，真正的动力系统常常是受到不大的干扰因素作用，而在建立运动方程时，要考虑它们实际上又是不可能的。因此，研究在扰动因素经常作用下的运动稳定性问题就具有特别的意义。从数学的观点来看，这就意味着不但要考虑初始条件的扰动，而且要考虑运动方程本身的扰动。下面介绍在扰动因素经常作用下的运动稳定性定义，它是李雅普诺夫意义下的运动稳定性定义的推广。

用下面的微分方程组代替运动方程组（1-1-1）：

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}t}=Y_j(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)+R_j(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)\ (j=1,2,\cdots,n) \qquad (1-1-7)$$

式中，$R_j(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是取决于干扰因素的已知函数，假定它足够小，并且满足某些一般的条件，使得方程（1-1-7）在所考察的未扰运动附近有解存在。

定义　如果对于任何正数 ε，无论它多么小，都存在两个其他的正数 δ_1 和 δ_2，使方程（1-1-7）的任何解 $y(t)$，当在 $t=t_0$ 时满足不等式

$$\left|\boldsymbol{y}(t_0)-\boldsymbol{f}_s(t_0)\right|<\delta_1$$

而在 $t>t_0$ 时满足不等式

$$\left|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{f}_s(t)\right|<\varepsilon$$

并不论 $R_j(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是怎样的函数，只要它在区域 $t>t_0$，$\left|\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{f}_s(t)\right|<\varepsilon$ 内满足不等式

$$\left|R_j(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)\right| < \delta_2$$

则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{f}_s(t)$［方程（1－1－1）的特解］在扰动因素经常作用下是稳定的。反之，则称未扰运动是不稳定的。

1.1.4　李雅普诺夫直接法

李雅普诺夫直接法是研究运动稳定性的重要方法。它不对扰动运动方程求解，而是构造具有某种性质的函数，即李雅普诺夫函数，使该函数与扰动运动方程相联系以估计受扰运动的趋向，从而判断扰动运动的稳定性。以下只研究扰动方程（1－1－5）的右端不显含时间的自治系统（显含时间的系统称为非自治系统）。设受扰运动微分方程具有下面的形式：

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = X_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-1-8}$$

函数 X_j 在区域

$$|x_j| \leqslant h \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-1-9}$$

内是连续的，并且使方程（1－1－8）对于在区域（$|x_j| \leqslant h$）内的初始值有唯一的解。

1. 基本定义

假定函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 定义在坐标原点的某个区域内，是单值的，当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时，$V=0$，并且对每个坐标具有连续的偏导数。

定义 1　函数 V 称为定号的（正定的或负定的），当 $|x_j| \leqslant h$ 时（h 是足够小的正数），它只能是具有一定符号的值，而且仅在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时，它才等于零。

定义 2　函数 V 称为常号的（如果 $V \geqslant 0$，称 V 为常正的；$V \leqslant 0$ 时称 V 为常负的），如果它在区域（$|x_j| \leqslant h$）内只能是具有一定符号的值，但它可以在 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$ 时等于零。

定义 3　函数 V 称为变号的，如果它既不是定号的，也不是常号的，也就是说，无论 h 多么小，它在区域（$|x_j| \leqslant h$）内，既可以具有正的值，也可以具有负的值。

例如：

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ 是正定的；$V(x_1, x_2) = x_1^2$ 是常正的；$V(x_1, x_2) = x_1$ 是变号的。

在实际应用李雅普诺夫直接法时，要求知道 V 函数的定号性及变号性。但是，对于一般的 V 函数，判别它的定号性和变号性是比较困难的，只是对于某些简单的情况可以判别其定号性与变号性。

例如二次型

$$2V = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} C_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \tag{1-1-10}$$

由线性代数的知识可知，用线性变换

$$y_j = \alpha_{j1} x_1 + \alpha_{j2} x_2 + \cdots + \alpha_{jn} x_n \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1-1-11}$$

可将函数 V 变换成

$$V = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \tag{1-1-12}$$

式中，$\lambda_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为二次型（1－1－10）系数矩阵 $(C_{\alpha\beta})$ 的特征根。

如果所有的特征根 λ_s 都不等于零且具有相同的符号，则由式（1－1－12）知，函数 V 是

定号的；如果一部分特征根 λ_s 等于零，而其余的具有相同的符号，则函数 V 是常号的；如果在特征根 λ_s 中，既有正的也有负的，则函数 V 是变号的。

另外，根据线性代数二次型的判别法则，有下面的定理：

定理 二次型（1－1－10）为正定的充分必要条件是它的系数行列式的主子式

$$C_{11},\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{vmatrix}$$

都是正的。

2. 李雅普诺夫直接法基本定理

现在讨论李雅普诺夫直接法的基本定理。在考虑函数 V 的同时，考虑它对于时间的导数，并假定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足受扰运动微分方程（1－1－8），这样有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}\cdot\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}X_j \tag{1－1－13}$$

式中，$X_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为受扰运动方程右端函数。当 $x_j=0$ 时 $X_j=0(j=1,2,\cdots,n)$。

定理 1 如果对于受扰运动微分方程，可以找到一个定号的函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它对于时间的由这些方程构成的全导数是常号的函数，并且其符号与 V 相反，或者恒等于零，则未扰运动是稳定的。

定理 2 如果对于受扰运动微分方程，可以找到定号函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它对于时间的由这些方程构成的全导数也是定号函数，但符号与 V 相反，则未扰运动是渐近稳定的。

定理 3 如果对于受扰运动微分方程，可以找到函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它对时间的由这些方程构成的全导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是定号函数，而函数 V 不是具有与 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的符号相反的常号函数，则未扰运动是不稳定的。

定理 4 如果存在函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它对于 t 的依受扰运动方程构成的全导数在区域（$|x_j|\leqslant h$）内具有形式

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\lambda V+W(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

式中，λ 是正的常数，而 W 或者恒等于零，或者是常号函数，并且在后一种情形，V 不是与 W 符号相反的常号函数，那么未扰运动是不稳定的。

定理 5 如果对于受扰运动微分方程，可以找到正定函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它对于时间的由这些方程构成的全导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\leqslant 0$，并且 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$ 除零点外不包含受扰运动方程的整条轨线，则未扰运动是渐近稳定的。

例 1－1－1 用李雅普诺夫直接法判断以下系统未扰运动的零解稳定性：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)\\ \dot{x}_2&=-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)\end{aligned} \tag{a}$$

解：选定正定的李雅普诺夫函数

$$V(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2 \tag{b}$$