（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书共三卷，第三卷的内容包括鞅论，随机积分，随机微分方程，扩散和连续 Марков 过程等．书中的许多内容是以前在专著中没有介绍过的．

本书的读者对象是高等院校概率论及其应用专业的大学生、教师和有关科学技术工作者．

И. И. Гихман А. В. Скороход
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
Издательство «НАУКА»
Том 3, 1975

随 机 过 程 论

第三卷

〔苏〕И. И. 基赫曼 А. В. 斯科罗霍德 著
石北源 区景祺 译
梁之舜 校

责任编辑 张鸿林 杜小杨
科 学 出 版 社 出 版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1992 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1992 年 2 月第一次印刷 印张：14
印数：1—1 350 字数：370 000
ISBN 7-03-002432-X/P · 495
定价： 15.20 元

目 录

第一章　鞅与随机积分

§1. 鞅及其推广

以前结果的概述　我们从回顾并更确切地说明关于鞅与半鞅的基本定义和原先得到的结果(第一卷第二章 §2 和第三章 §4) 开始.

设 $\{\Omega,\mathfrak{S},\mathbf{P}\}$ 是某个概率空间, T 是任意有序集(今后只考虑 T 是广义实直线$[-\infty, +\infty]$的子集这一情形), $\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$是 σ-代数流 $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{S})$; 如果 $t_1<t_2$, 那末 $\mathfrak{F}_{t_1}\subset\mathfrak{F}_{t_2}$. 用 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 或简记 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t\}$, 表示由可测空间 $\{\Omega,\mathfrak{S}\}$ 上的 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 和适应于 $\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 的随机过程 $\xi(t), t\in T$ (即对每个 $t\in T, \xi(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-可测的) 所组成的对象. 今后也称它为随机过程.

随机过程 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 称为 $\mathfrak{F}_t$-鞅 (或鞅, 当所指的那一个 σ-代数流不会含混时), 如果

$$\mathbf{E}|\xi(t)|<\infty, \forall t\in T \tag{1}$$

和

$$\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}=\xi(s),\ 当\ s<t, s,t\in T;$$

称 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 为上鞅(下鞅), 如果条件(1)满足及

$$\begin{gathered}\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\xi(s), s<t, s,t\in T\\ (\mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}\geqslant\xi(s), s<t).\end{gathered}\tag{2}$$

我们指出, 这里的定义区别于第一卷所用的定义, 因为现在要求 $\xi(t)$ 的教学期望都是有限的. 例如在上鞅情况, 以前仅假定量 $\mathbf{E}\xi^-(t)$ 是有限的.

所引入的定义等价于: $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 是鞅(上鞅), 如果对任意集合 $B_s\in\mathfrak{F}_s$ 及任意 $s,t\in T, s<t$,

$$\int_{B_s} \xi(t)\, d\mathbf{P} = \int_{B_s} \xi(s) d\mathbf{P} \quad \left(\int_{B_s} \xi(t)\, d\mathbf{P} \leqslant \int_{B_s} \xi(s) d\mathbf{P}\right).$$

上鞅和下鞅也称为半鞅.

本节基本上研究连续变量半鞅.

在区间 $[0,T]$ 上,对每个 $t\in(0,T]$ 有左极限且在 $[0, T)$ 上右连续的全体实函数,用 $\mathscr{D}$ 或 $\mathscr{D}[0, T]$ 表示. 记号 $\mathscr{D}[0, T)$, $\mathscr{D}[0,\infty)$ 或 $\mathscr{D}[0,\infty]$ 有类似的意义.

在鞅论中一系列不等式及极限的存在定理起着重要作用. 在第一卷(第二章 §2) 已确定如下关系:

如果 $\xi(t), t\in T$, 是可分下鞅,那末

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in T} \xi^+(t) \geqslant C\right\} \leqslant \frac{\sup\limits_{t\in T} \mathbf{E}\xi^+(t)}{C}, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}[\sup_{t\in T} \xi^+(t)]^p \leqslant q^p \sup_{t\in T} \mathbf{E}[\xi^+(t)]^p,\ q = \frac{p}{p-1},\ p > 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{E}\nu[a,b) \leqslant \sup_{t\in T} \frac{\mathbf{E}(\xi(t) - b)^+}{b-a}, \tag{5}$$

其中 $a^+ = a$, 当 $a \geqslant 0, a^+ = 0$, 当 $a < 0$,以及 $\nu[a,b)$ 表示过程 $\xi(t)$ 的样本函数由上到下相交于区间 $[a,b)$ 的数目(更确切的定义在第一卷第二章 §2 给出).

我们回顾半鞅的封闭元的定义.

设 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 是半鞅且集合 T 没有最大(最小)元素.随机变量 η 被称为半鞅 $\xi(t)$ 的右(左)封闭元, 如果可以扩充集合 T, 补充一新元素 $b(a)$, 使得与 T 中元素有关系

$$t < b(t > b) \quad \forall t\in T,$$

和补充合适的 σ-代数 $\mathfrak{F}_b(\mathfrak{F}_a)$ 于 σ-代数流 $\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 中, 使得扩充的随机变量族 $\xi(t), t\in T'$, $T' = T\cup\{b\}(T' = T\cup\{a\})$ 重新成为 $\mathfrak{F}_t$-半鞅.

定理 1 设 $\xi(t), t\in T$, 是可分下鞅, $T\subset(a, b)$, 点 a 及 b 是集合 T 的极限点($-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$). 此时,存在概率为 0 的集合 Λ,使当 $\omega\notin\Lambda$ 时:

1) 在集合 T 的每一内点 t，存在极限$\xi(t-)$ 及 $\xi(t+)$；

2) 如果 $\sup\{\mathbf{E}\xi^+(t), t\in T\}<\infty$，那末存在极限 $\xi(b-)$；这时，如果对某个 t_0，随机变量族 $\{\xi(t), t\in[t_0, b)\}$ 一致可积，那末极限 $\xi(b-)$ 也在 L_1 中存在，且 $\xi(b-)$ 是下鞅的右封闭元；

3) 如果 $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{E}\xi(t)>-\infty$，那末随机变量族 $\{\xi(t), t\in(a, t_0]\}$ 一致可积，对每个 $\omega\bar{\in}\Lambda$ 和在 L_1 收敛意义下极限 $\xi(a+)$ 存在，且 $\xi(a+)$ 是下鞅的左封闭元.

证. 前已证明(第一卷第三章 §4)在条件 $\sup\{E\xi^+(t), t\in(a, b)\}<\infty$ 下，对每个 $t\in[a, b]$，单方极限 $\xi(t-)$ 及 $\xi(t+)$ 以概率 1 存在.

此外，如果族 $\{\xi(t), t\in[t_0, b)\}$ 是一致可积的，则由 $t\uparrow b$ 时 $\xi(t)$ 以概率 1 收敛于 $\xi(b-)$ 推得也在 L_1 中收敛，且 $\xi(b-)$ 是下鞅 $\xi(t), t\in(a, b)$，的右封闭元. 其证明类似于离散变量下鞅情形(第一卷第二章 §2)*.

余下要证明论断 3).

设 $l=\lim\limits_{t\downarrow a}\mathbf{E}\xi(t)$. 因为 $\mathbf{E}\xi(t)$ 是单调不减函数，所以这极限存在. 又

$$|\xi(t)|=2\xi^+(t)-\xi(t),$$

故

$$\sup_{t\in(a, t_0]}\mathbf{E}|\xi(t)|\leqslant 2\mathbf{E}\xi^+(t_0)-l=C<\infty.$$

由 Чебышев 不等式 $\mathbf{P}(B_t)\leqslant\frac{C}{N}$，其中 $B_t=\{|\xi(t)|>N\}$，即当 $N\to\infty$ 时按 t 一致地有 $\mathbf{P}(B_t)\to 0$. 设 $\varepsilon>0$ 是任意数，t_1 是这样的：对所有 $t\leqslant t_1$ 均有 $\mathbf{E}\xi(t)-l<\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $t\in(a, t_1]$

* 此段的证明是英译本补充的. ——译者注

$$\begin{aligned}\int_{B_t}|\xi(t)|d\mathbf{P}&=\int_{\{\xi(t)>N\}}\xi(t)d\mathbf{P}+\int_{\{\xi(t)>-N\}}\xi(t)\,d\mathbf{P}-\mathrm{E}\xi(t)\\&\leqslant\int_{\{\xi(t)>N\}}\xi(t_1)d\mathbf{P}+\int_{\{\xi(t)>-N\}}\xi(t_1)d\mathbf{P}-\mathrm{E}\xi(t)\\&\leqslant\int_{B_t}|\xi(t_1)|d\mathbf{P}+\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

所以,对所有 $t\in(a,t_1]$ 和足够大的 N,有 $\int_{B_t}|\xi(t)|d\mathbf{P}<\varepsilon$. 因此,族 $\{\xi(t),t\in(a,t_0]\}$ 一致可积. 故极限 $\lim\limits_{t\downarrow a}\xi(t)$ 以概率 1 存在,从而在 L_1 收敛意义下也存在.

由不等式

$$\int_B\xi(s)d\mathbf{P}\leqslant\int_B\xi(t)d\mathbf{P},s<t,\ B\in\bigcap_{t\in T}\mathfrak{F}_t,$$

当 $s\downarrow a$ 时,极限可移至积分号内得到 $\xi(a+)$ 是下鞅 $\{\xi(t),t\in T\}$ 的左封闭元.

注 1. 定理 1 中"下鞅"可以用"上鞅"或"鞅"代替.

注 2. 定理的论断 3)显然可直接搬到序列的情形. 此时它可陈述为

3) 如果 $\{\cdots\xi(-n),\ \xi(-n+1),\cdots,\ \xi(0)\}$ 是下鞅,且 $\lim\limits_n\mathbf{E}\xi(-n)>-\infty$, 那末序列 $\{\xi(-n)\}$ 一致可积且以概率 1 及在 L_1 意义下均存在极限 $\xi_\infty=\lim\xi(-n)$, 并且此极限是下鞅 $\{\xi(n),n=\cdots,-k,-k+1,\cdots,0\}$ 的左封闭元.

今后,如果相应的随机变量族 $\xi(t),t\in T$, 是一致可积的,我们称半鞅为一致可积;如果 $\sup\{\mathbf{E}|\xi(t)|,t\in T\}<\infty$, 则称半鞅为可积的.

定理 2 设 $T\subset(a,b)$,a 和 b 是集合 $T(-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty)$ 的极限点. 为使鞅 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,\ t\in T\}$ 是一致可积的充分必要条件是存在随机变量 η, 使

$$\mathbf{E}|\eta|<\infty,\xi(t)=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\},t\in T.\tag{6}$$

如果这条件成立,那末可以认为 $\eta=\lim\limits_{t\uparrow b}\xi(t)$, 且变量 η 在所

有 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量的类中被唯一地确定 (mod $\mathbf{P}$).

证. 如果鞅 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 一致可积,那末按定理 1 它有右封闭元,因此可得式(6).

现设鞅 $\xi(t)$ 按公式(6)表出. 这时

$$\int_A \xi(t)d\mathbf{P} = \int_A \eta d\mathbf{P}, \forall A\in\mathfrak{F}_t,$$

由此得

$$\int_B |\xi(t)|d\mathbf{P} \leqslant \int_B |\eta|d\mathbf{P}, \quad \forall B\in\mathfrak{F}_t. \tag{7}$$

特别, $\mathbf{E}|\xi(t)| \leqslant \mathbf{E}|\eta|$. 因此由 Чебышев 不等式得,当 $N\to\infty$ 时,关于 t 一致地 $\mathbf{P}\{|\xi(t)| > N\}\to 0$. 应用不等式 (7) 于集合 $B = B_t = \{|\xi(t)| > N\}$, 可见族 $\{\xi(t), t\in T\}$ 一致可积.

余下要证明在全体 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量的类中, 表示式(6)是唯一的. 如果存在用随机变量 $\eta_i, i = 1,2$ 表示的两个这样的表示式,那末

$$\mathbf{E}\{\zeta|\mathfrak{F}_t\} = 0, \quad \forall t\in T,$$

其中 $\zeta = \eta_1 - \eta_2$.

因此,对 $\mathfrak{F}_t$ 中所有 A 和 T 中所有 t,

$$\int_A \zeta d\mathbf{P} = 0$$

成立,于是对 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$ 中的所有 A 也成立. 因为量 ζ 是 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测,所以 $\zeta = 0 (\bmod P)$.

注. 如果 $\{\xi(t), t\in T\}$ 是鞅,且在 T 中存在极大元,那末随机变量族 $\xi(t), t\in T$, 一致可积.

在表示式(6)中 $\sigma\{\mathfrak{F}_t, t\in T\}$-可测随机变量 η 称为鞅 $\xi(t), t\in T$ 的边界值.

在第一卷(第三章 §4)中已指出, 在十分一般的假设下对给定的半鞅存在随机等价的过程 $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, t\geqslant 0\}$, 其样本函数属于 $\mathscr{D}[0,\infty)$, 且 σ-代数流 $\mathfrak{F}_t$ 是右连续的,即

$$\mathfrak{F}_{t+} = \mathfrak{F}_t, \forall t > 0.$$

在本节如无相反的特别声明, 我们通常将假定所考虑的半鞅具有

这些性质。

拟鞅 设 $\{\mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是右连续 σ 代数流 $(\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_{t+})$。

定义 适应于 $\mathfrak{F}_t$ 的过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 称为拟鞅($\mathfrak{F}_t$-拟鞅)，如果

$$\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty, \forall t \geqslant 0,$$

且

$$\sup \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{E}|\xi(t_k) - \mathbf{E}\{\xi(t_{k+1})|\mathfrak{F}_{t_k}\}| = V < \infty,$$

其中 sup 是按任意值 n 和 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ 取的；$0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < \infty$。

下面将指出拟鞅的研究可归结为半鞅的研究。

鞅和满足 $\inf \mathbf{E}\xi(t) > -\infty (\sup \mathbf{E}\xi(t) < \infty)$ 的上(下) 鞅都是拟鞅的例子，两个上鞅之差的过程也是拟鞅。事实显示出所有拟鞅只限于这些例子。

设

$$\delta(s,t) = \xi(s) - \mathbf{E}\{\xi(t)|\mathfrak{F}_s\}, (s < t), a(t) = \mathbf{E}\xi(t).$$

此时，

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a(t_k) - a(t_{k+1})| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathbf{E}\delta(t_k, t_{k+1})| \leqslant V,$$

即 $a(t)$ 是有界变差函数。特别，对任意 $t > 0$ 极限 $a(t-)$ 和 $a(t+)$ 存在，而 $a(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} a(t)$ 也存在。

不等式 (3)—(5) 可以推广到拟鞅。为此我们注意在第一卷(第二章 §2) 对可列序列已建立的不等式 (21) 和(23)适用于可分拟鞅，这时它可以写成如下形式：

$$\mathbf{P}\{\sup \xi(t) \geqslant C\} \leqslant \frac{\sup \mathbf{E}\xi^+(t) + V}{C}, \tag{8}$$

$$E\nu[a,b) \leqslant \frac{\sup\limits_t \mathbf{E}(\xi(t) - b)^+ + V}{b-a}, \tag{9}$$

其中 $\nu[a,b)$ 是由上到下相交于区间 $[a,\ b)$ 的数目. 利用不等式(9),如半鞅时一样,可建立如下定理(第一卷第三章 §4 定理 6 和 7):

定理 3 可分拟鞅 $\xi(t), t>0$, 以概率 1 对每个 t 有左、右极限. 这时 $\{\xi(t+), \mathfrak{F}_{t+}, t\geqslant 0\}$ 也是拟鞅,且其样本函数右连续和对每个使 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$ 及 $\mathbf{E}\xi(t)$ 连续的点 t, $\mathbf{P}\{\xi(t)=\xi(t+)\}=1$.

由这个定理,不失一般性,今后我们可以只考虑样本函数以概率 1 属于 $\mathscr{D}$ 和对所有 $t\geqslant 0, \mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$ 的拟鞅. 在本段我们将认为此条件成立.

定理 4 任意拟鞅可以有分解式

$$\xi(t)=\mu(t)+\zeta(t),$$

其中 $\mu(t)$ 是鞅,且 $\mathbf{E}|\zeta(t)|\to 0$, 当 $t\to\infty$.

此分解式是唯一的.

如果 $\xi(t)$ 是满足条件 $\inf\xi(t)>-\infty$ 的上鞅,那末 $\zeta(t)$ 是非负上鞅.

证. 对每个 $s>0$ 和 $t\geqslant 0$, 令

$$\xi(s,t)=\mathbf{E}\{\xi(s+t)|\mathfrak{F}_t\},$$

并考虑过程 $\xi(s,t)$ 的可分修正. 我们来证明对固定的 $t, \xi(s,t)$ 作为 s 的函数以概率为 1 是有界变差的.

事实上,

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|=\sum_{k=0}^{n-1}|\mathbf{E}\{\xi(s_k+t)$$
$$-\mathbf{E}\{\xi(s_{k+1}+t)\mathfrak{F}_{t_{k+1}}|\mathfrak{F}_t\}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\{|\delta(s_k+t, s_{k+1}+t)|\mathfrak{F}_t\}$$

且

$$\mathbf{E}\sum_{k=0}^{n-1}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|\leqslant V.$$

可以认为变量 s 和 t 的函数 $\xi(s,t)$ 的可分点集具有形式 $I\times I$. 对每个 $t\in I$ 取序列 $\{s_0,s_1,\cdots,s_n\}$, $s_k\in I$, 使当 n 递增时,它是单调递增集合且在极限情形取尽全部 I. 这时和 $\sum_{k=0}^{n-1}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|$ 单调不减且趋向本身的上限 $V(t)$. 因此 $\mathbf{E}V(t)\leqslant V$ 及 $V(t)<\infty$ 对每个 t 以概率 1 成立. 由此得知存在这样的集合 $N\in\mathfrak{S},\mathbf{P}(N)=0$,使得如果 $\omega\notin N$,那末对任意 $t,V(t)<\infty$. 于是以概率 1 存在极限

$$\mu(t)=\lim_{s\uparrow\infty}\xi(s,t).$$

设 $s_n\uparrow\infty$. 因为

$$|\mu(t)-\xi(s_n,t)|\leqslant\sum_{n}^{\infty}|\xi(s_k,t)-\xi(s_{k+1},t)|\leqslant V(t),$$

所以 $\mu(t)$ 是可积随机变量且序列 $\xi(s_n,t)$ 有可积控制变量, 于是当 $t_1<t_2$ 时

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\mu(t_2)|\mathfrak{F}_{t_1}\}&=\mathbf{E}\{\lim_{s\to\infty}E\{\xi(s+t_2)|\mathfrak{F}_{t_2}\}|\mathfrak{F}_{t_1}\}\\&=\lim_{s\to\infty}E\{\xi(s+t_2)|\mathfrak{F}_{t_1}\}=\mu(t_1).\end{aligned}$$

这样就证明了 $\mu(t)$ 是 $\mathfrak{F}_t$-鞅.

令 $\zeta(t)=\xi(t)-\mu(t)$. 这时 $\mathbf{E}|\zeta(t)|\to 0$ 当 $t\to\infty$.

事实上,若不然,那末可找到 $\varepsilon>0$ 及对任意的 $N>0$ 有 $t=t_N$, $t_N>N$, 使得 $\mathbf{E}|\xi(t_N)|>\varepsilon$. 取某个 t_1,因为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|\zeta(t_1)|=\mathbf{E}|\xi(t_1)-\lim_{s\to\infty}\xi(t_1,s)|=\lim_{s\to\infty}\mathbf{E}|\xi(t_1)\\-\xi(t_1,s)|,\end{aligned}$$

所以可找到 s_1 使 $\mathbf{E}|\xi(t_1)-\xi(t_1,s_1)|>\varepsilon$. 令 $t_2=t_1+s_1$ 则可找到 $t_3>t_2$ 使 $\mathbf{E}|\zeta(t_3)|>\varepsilon$. 继续此步骤至无穷. 此时,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\sum_{1}^{2n-1}|\delta(t_k,t_{k+1})|&\geqslant\mathbf{E}\sum_{1}^{n}|\delta(t_{2k-1},t_{2k})|\\&=\mathbf{E}\sum_{1}^{n}|\xi(t_{2k})-\mathbf{E}\{\xi(t_{2k})|\mathfrak{F}_{t_{2k-1}}\}|\end{aligned}$$

$$\geqslant n\varepsilon \to \infty,$$

这和拟鞅的定义相矛盾.

因此,存在满足定理条件的分解. 我们来证明其唯一性.

设存在两个分解式: $\xi(t) = \mu_1(t) + \zeta_1(t) = \mu_2(t) + \zeta_2(t)$, 这时 $\mu_1(t) - \mu_2(t) = \zeta_2(t) - \zeta_1(t)$, 且 $\mathbf{E}|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)| \to 0$ 当 $t \to \infty$. 另方面, $|\mu_1(t) - \mu_1(t)|$ 是下鞅且 $\mathbf{E}|\mu_1(t) - \mu_2(t)|$ 是 t 的单调不减函数. 于是 $\mathbf{E}|\mu_1(t) - \mu_2(t)| \equiv 0$ 因而 $\mu_1(t) = \mu_2(t)(\mathrm{mod}\mathbf{P})$. 最后如果 $\xi(t)$ 是上鞅,那末 $\mu(t) = \lim\limits_{s\uparrow\infty}\xi(s,t) = \lim\limits_{s\to\infty}\mathbf{E}\{\xi(s+t)|\mathfrak{F}_t\} \leqslant \xi(t)$, 因此, $\zeta(t) = \xi(t) - \mu(t) \geqslant 0$.

定义 满足当 $t \to \infty$ 时 $\mathbf{E}\xi(t) \to 0$ 的非负上鞅称为位势.

我们指出,对位势来说,极限 $\xi_\infty = \lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)$ 存在且以概率 1, $\xi_\infty = 0$.

因此, 满足条件 $\inf\mathbf{E}\xi(t) > -\infty$ 的上鞅有分解式 $\xi(t) = \mu(t) + \pi(t)$, 其中 $\mu(t)$ 是鞅, $\pi(t)$ 是位势. 此分解式是唯一的. 类似于古典的上调和函数理论,它称为 Riesz 分解. 我们约定在定理 4 所建立的分解也称为 Riesz 分解,而满足条件 $\mathbf{E}|\zeta(t)| \to 0$ (当 $t \to \infty$)的拟鞅称为拟位势.

现来证明任意拟位势可表为两位势之差.

设 $\zeta(t)$ 是拟位势. 令

$$\delta_{k,n} = \delta\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right),$$

$$\delta_{k,n}^+ = \max(\delta_{k,n}, 0), \delta_{k,n}^- = \delta_{k,n}^+ - \delta_{k,n}$$

$$\pi_+^n(t) = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=j(t)}^{\infty}\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\right\},$$

$$\pi_-^n(t) = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=j(t)}^{\infty}\delta_{k,n}^-|\mathfrak{F}_t\right\},$$

其中 $j(t)$ 是由条件 $\frac{j(t)-1}{2^n} < t \leqslant \frac{j(t)}{2^n}$ 所确定的整数.

我们注意，当 $t=\frac{j}{2^n}$ 时

$$\zeta(t)=\mathbf{E}\left\{\sum_{k=j}^{\infty}\delta_{k,n}|\mathfrak{F}_t\right\}=\pi_+^n(t)-\pi_-^n(t),$$

而且级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\delta_{k,n}$ 绝对收敛 (mod$P$) 及可积性可由拟鞅的定义得到. 显然，$\mathbf{E}\{\pi_+^n(t)|\mathfrak{F}_s\}\leqslant\pi_+^n(s)$，当 $s<t$，因此 $\pi_+^n(t)$ 是位势.

现来证明 $\pi_+^n(t)\leqslant\pi_+^{n+1}(t), n=1,2,\cdots$. 取包含在 $\pi_+^n(t)$ 的表达式中的某一被加项，例如，$\mathbf{E}\{\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\}$ $\left(\frac{k}{2^n}\geqslant t\right)$. 我们有

$$\mathbf{E}\{\delta_{k,n}^+|\mathfrak{F}_t\}=\mathbf{E}\left\{\left[\zeta\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right\}-\mathbf{E}\left\{\zeta\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\middle|\mathfrak{F}_{\frac{2k}{2^{n+1}}}\right\}\right.$$

$$\left.+\zeta\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)-\mathbf{E}\left\{\zeta\left(\frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)\middle|\mathfrak{F}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\right\}\middle|\mathfrak{F}_{\frac{k}{2^n}}\right]^+|\mathfrak{F}_t\right\}$$

$$\leqslant\mathbf{E}\{[\delta_{2k,n+1}^++\delta_{2k+1,n+1}^+]|\mathfrak{F}_t\},$$

由此得到序列 $\pi_+^n(t)$ 的单调性. 由证明得 $\pi_-^n(t)$ 也是位势且 $\pi_-^n(t)\leqslant\pi_-^{n+1}(t)$.

令 $\pi_+(t)=\lim\pi_+^n(t)$，$\pi_-(t)=\lim\pi_-^n(t)$. 对每个 t，此极限以概率 1 存在. 因为 $E(\pi_+^n(t)+\pi_-^n(t))=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\infty}|\delta_{k,n}|\leqslant V$，所以 $\mathbf{E}\pi_\pm(t)<\infty$. 显然 $\pi_\pm(t)$ 是上鞅.

还不难证明 $E\pi_\pm^n(t)\to 0$ 当 $t\to 0$ 时对 n 一致成立. 于是 $\pi_\pm(t)$ 是位势.

对所有 $t\geqslant 0$，我们定义过程 $\pi_\pm(t)$ 使其样本函数以概率 1 右连续. 顾及到过程 $\zeta(t)$ 也是右连续，可见等式 $\zeta(t)=\pi_+(t)-\pi_-(t)$ 对所有 t 以概率 1 成立.

定理 5 如果 $\zeta(t)$ 是样本函数属于 $\mathscr{D}$ 的拟位势，那末存在

位势 $\pi_+(t)$ 和 $\pi_-(t)$ 使

$$\zeta(t)=\pi_+(t)-\pi_-(t),\quad \forall t\geqslant 0,$$

以概率为 1 成立。

停止与时间的随机置换 在本段将考虑半鞅

$$\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\},\ \text{其中}\ T=N=\{0,1,\cdots,n,\cdots\}$$

$$\text{或}\ T=[0,\infty).$$

如果 $T=[0,\infty)$，那末我们假定过程 $\xi(t)$ 的样本函数属于 $\mathscr{D}$ $[0,\infty)$ 和 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+},t\in[0,\infty)$。

先来回顾随机时间的定义(第一卷第一章 §1)。设$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$是某个 σ-代数流．取值于T的函数 $\tau=f(\omega),\omega\in\Omega_\tau\subset\Omega$，称为在$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 上的随机时间(或 $\mathfrak{F}_t$-随机时间)，如果 $\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t$，对所有 $t\in T$。

今后将考虑定义在整个空间 $\Omega(\Omega_\tau=\Omega)$ 上的随机时间。

每个随时间 τ 对应于事件的 σ-代数 $\mathfrak{F}_\tau$，$\mathfrak{F}_\tau$ 称为由 τ 前事件所生成的 σ-代数．它是由所有满足如下条件的事件 $B\in\mathfrak{S}$ 组成：

$$B\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t,\ \forall t\in T.$$

不难验证，如果 $\tau_1\leqslant\tau_2$，那末 $\mathfrak{F}_{\tau_1}\subset\mathfrak{F}_{\tau_2}$(第一卷第一章 §1)。在第一卷(第二章 §2)已证明如下结果：

引理 1 设 T 是有限集，$\tau_k,k=1,\cdots,s$ 是定义在整个 Ω 的$\{\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 上的随机时间序列且 $\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots\leqslant\tau_s$，$\mathfrak{F}_k^*=\mathfrak{F}_{\tau_k}$ 是随机时间 $\tau_k(k=1,\cdots,s)$ 所生成的 σ-代数．如果 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 是上鞅(鞅)，那末 $\{\xi(\tau_k),\mathfrak{F}_k^*,k=1,\cdots,s\}$ 也是上鞅(鞅)。

我们将此结果推广到本节所研究的半鞅。

设 $\{\xi(t),\mathfrak{F}_t,t\in T\}$ 是满足下面条件的上鞅：存在可积随机变量 η，使得

$$\xi(t)\geqslant \mathbf{E}\{\eta\,|\,\mathfrak{F}_t\}. \tag{10}$$

考虑取值于 T，还可取 $t=\infty$的随机时间 τ．令

$$\mathfrak{F}_\infty=\sigma\{\sigma(\eta),\mathfrak{F}_t,t\in[0,\infty)\},$$

$$\xi_\tau=\begin{cases}\xi(t), & \text{当}\ \tau=t,\ t\in T;\\ \eta, & \text{当}\ \tau=\infty.\end{cases}$$

则随机变量 ξ_τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测的*. 事实上，在离散时间情形，已在第一卷第一章 §1 的引理 5 证明了. 对 $T=[0,\infty)$ 证明如下:

取随机时间 τ 的离散渐近序列 $\tau^{(n)}=\dfrac{k+1}{2^n}$，如果 $\tau\in\left(\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right]$; $\tau^{(n)}=0$，如果 $\tau=0$. 由过程 $\xi(t)$ 的样本函数的右连续性推得 $\lim\xi(\tau_n)=\xi(\tau)$. 另方面

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau<t\}=\lim\{\xi(\tau^{(n)})<a\}\cap\{\tau^{(n)}<t\}.$$

对 $t\in\left(\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right]$ 有

$$\{\xi(\tau^{(n)})<a\}\cap\{\tau^{(n)}<t\}\in\mathfrak{F}_{\frac{k+1}{2^n}}.$$

因此

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau<t\}\in\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t.$$

再次利用 $\mathfrak{F}_{t+}=\mathfrak{F}_t$，我们有

$$\{\xi(\tau)<a\}\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathfrak{F}_t.$$

这就证明了 $\xi(\tau)$ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测的.

定理 6 设上鞅满足条件(10)，σ, τ 是随机时间且 $\sigma\leqslant\tau$. 这时随机变量 ξ_σ 和 ξ_τ 是可积的且

$$\mathbf{E}\{\xi_\tau|\mathfrak{F}_\sigma\}\leqslant\xi_\sigma. \tag{11}$$

证. 首先研究 $T=N$ 的情形，设 $\sigma_k=\sigma\wedge k$, $\tau_k=\tau\wedge k$. 设 $\xi(t)=\zeta(t)+\eta(t)$，其中 $\eta(t)=\mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}$, $\zeta(t)=\xi(t)-\eta(t)$. 由定理的条件得 $\zeta(t)\geqslant 0$，此外，$\zeta(t)$ 是上鞅.

先考察过程 $\zeta(t)$. 由引理 1 得 $\mathbf{E}\zeta_{\tau_k}\leqslant\mathbf{E}\zeta_0$. 当 $k\to\infty$ 取极限并利用 Fatou 引理得 $\mathbf{E}\zeta_\tau=\mathbf{E}\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_{\tau_k}\leqslant\mathbf{E}\zeta_0$，因此 $\mathbf{E}\zeta_\tau<\infty$.

设 $B\in\mathfrak{F}_\sigma$，这时由引理 1，有

$$\int_{B\cap\{\tau\leqslant k\}}\zeta_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_{B\cap\{\sigma\leqslant k\}}\zeta_\tau d\mathbf{P}\leqslant\int_{B\cap\{\sigma\leqslant k\}}\zeta_{\sigma_k}d\mathbf{P}$$

---

* 以下证明是英译本补充的.——译者注

$$= \int_{B\cap\{\sigma\leqslant k\}} \zeta_\sigma d\mathbf{P}.$$

顾及到当 $\sigma=\infty$时 $\zeta_\tau=\zeta_\sigma=0$ 且当 $k\to\infty$将所得的关系式取极限,得

$$\int_B \zeta_\tau d\mathbf{P} \leqslant \int_B \zeta_\sigma d\mathbf{P}, \tag{12}$$

从而对于过程 $\zeta(t)$ 得到定理的结论.我们转来考察过程 $\eta(t)$.它是一致可积鞅. 注意

$$\eta_\tau = \mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_t\}|_{t=\tau} = \mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_\tau\}. \tag{13}$$

事实上,如果 $A\in\mathfrak{F}_\tau$, $A_k=A\cap\{\tau=k\}$, $k=0, 1, \cdots, n, \cdots, \infty$, 那末

$$\int_{A_k} \eta_\tau d\mathbf{P} = \int_{A_k} \mathbf{E}\{\eta|\mathfrak{F}_k\} d\mathbf{P} = \int_{A_k} \eta d\mathbf{P}.$$

对此等式按所有 k 求和,得

$$\int_A \eta_\tau d\mathbf{P} = \int_A \eta d\mathbf{P}.$$

因为 η_τ 是 $\mathfrak{F}_\tau$-可测随机变量,所以由最后的关系式得(13)及 $\mathbf{E}_{\eta_\tau}$ 是有限值. 此外,由此得知对任意 $B\in\mathfrak{F}_\sigma(\mathfrak{F}_\sigma\subset\mathfrak{F}_\tau)$,

$$\int_B \eta_\tau d\mathbf{P} = \int_B \eta_\sigma d\mathbf{P}.$$

后一等式与不等式(12)两边相加得式(11).

考虑 $T=[0, \infty)$ 的情形. 引入量 τ 及 σ 的离散逼近 $\tau^{(n)}$ 及 $\sigma^{(n)}$, 令

$$\tau^{(n)}=\frac{k}{2^n}, \text{ 如果 } \tau\in\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right],$$

$$\tau^{(n)}=\infty, \text{ 如果 } \tau=\infty,$$

类似地定义 $\sigma^{(n)}$. 由前面

$$\int_A \xi_{\tau^{(n)}} d\mathbf{P} \geqslant \int_A \xi_{\sigma^{(n)}} d\mathbf{P}, \ \forall A\in\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}}.$$

这时

$$\sigma\leqslant\sigma^{(n+1)}\leqslant\sigma^{(n)}, \ \mathfrak{F}_\sigma\subset\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}}, \ \forall n.$$

因此对所有 $A\in\mathfrak{F}_\sigma$ 上关系式成立.由过程 $\xi(t)$ 的右连续性推得

$\xi_{\tau^{(n)}} \to \xi_t$ 和 $\xi_{\sigma^{(n)}} \to \xi_\sigma$ 均以概率 1 成立。因此为证明定理只要验证随机变量序列 $\{\xi_{\tau^{(n)}},\ n = 1,2,\cdots\}$ 和 $\{\xi_{\sigma^{(n)}},\ n = 1,2,\cdots\}$ 一致可积就够了。

注意，$\sigma^{(n)} \leqslant \sigma^{(n-1)}$。因此

$$\xi_{\sigma^{(n)}} \geqslant \mathbf{E}\{\xi_{\sigma^{(n-1)}} | \mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}}\}.$$

如果令 $\xi_{\sigma^{(n)}} = \eta_{-n}$，$\mathfrak{F}_{\sigma^{(n)}} = \mathfrak{G}_{-n}$，那末因为 $\mathbf{E}\eta_{-n} = \mathbf{E}\xi_{\sigma^{(n)}} \leqslant \mathbf{E}\xi_0$，不等式

$$\eta_{-n} \geqslant \mathbf{E}\{\eta_{-n+1} | \mathfrak{G}_{-n}\}$$

表明 $\{\eta_k, \mathfrak{G}_k,\ k = \cdots, -n,\ -n+1, \cdots,\ -1\}$ 构成上鞅，且 $\mathbf{E}\eta_{-n} \leqslant C$。因此随机变量族 η_{-n} 一致可积。此论证也适用于序列 $\xi_{\tau^{(n)}}$。

推论 1 如果 $\{\xi_t,\ \mathfrak{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ 是一致可积鞅，σ 和 τ 是随机时间，$\sigma \leqslant \tau$，那末

$$\xi_\sigma = \mathbf{E}\{\xi_\tau | \mathfrak{F}_\sigma\}$$

且 ξ_τ 可积。

推论 2 如果 $\eta(t) = \mathbf{E}\{\eta | \mathfrak{F}_t\}$ 及 τ 是随机时间，那末

$$\eta_\tau = \eta(\tau) = \mathbf{E}\{\eta | \mathfrak{F}_\tau\}.$$

推论 3 如果 $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是一致可积上鞅(鞅)，那末过程

$\{\eta(t), \mathfrak{F}_t^*, t \geqslant 0\}$，其中 $\eta(t) = \xi(\tau \wedge t), \mathfrak{F}_t^* = \mathfrak{F}_{\tau\wedge t}$，也是上鞅(鞅)。

此过程称为过程 $\xi(t)$ 的停止(或 τ-停止)。

定理 6 在今后将多次用到。作为它的应用之一，现在我们来导出今后也利用到的结论。

定理 7 设 $\{\xi(t),\ t \geqslant 0\}$ 是非负右连续上鞅。令

$$\tau = \inf\{t: \xi(t) = 0 \text{ 或 } \xi(t-) = 0\},$$

如果 t 的对应的集合不空；$\tau = \infty$，在相反的情形。那末以概率 1 对所有 $t \geqslant \tau(\tau < \infty), \xi(t) = 0$。

证。设 $\tau_n = \inf\left\{t: \xi(t) < \frac{1}{n}\right\}$（约定 $\inf\varnothing = \infty$），χ_n 是事