电 工 基 础

电磁场理論部分

（試用教材）

激光专业 电子束专业 用

成都电訊工程学院

一九七二年元月

第 三 章

静电场和磁场基本方程的微分形式。

一、矢量场。

我们研究过的电场和磁场是客观存在的特殊形式的物质。在电场的空间区域内每一点都有一个确定的电场强度矢量 $\overline{E}$（或电通密度矢量 $\overline{D}$）；在磁场的空间区域内每一点都有一个确定的磁感应强度 $\overline{B}$（或磁场强度 $\overline{H}$）。不管电场或磁场，它们都用某一矢量的空间分布来表征，因此通称为矢量场。在矢量场的空间区域内，矢量的大小和方向一般是随着位置的不同而变化着，因而矢量场是一个位置的矢量函数。在直角坐标内，电场则为：

$$\overline{E}(x,y,z)=\overline{i}E_x(x,y,z)+\overline{j}E_y(x,y,z)+\overline{k}E_z(x,y,z)$$

磁场则为：

$$\overline{B}(x,y,z)=\overline{i}B_x(x,y,z)+\overline{j}B_y(x,y,z)+\overline{k}B_z(x,y,z)$$

自然界除电场及磁场外，还有如重力场、流体速度场等等也都是矢量场。

人们为了观察各种各样矢量场的内在性质，常用场线（在电场中用电力线，磁场中用磁线）把矢量场形象化地描绘出来。这些场线是处处都同矢量场相切的曲线，每一条线上常加一箭头指示矢量的正方向，所以它们指出了整个场内矢量的方向变化的情况；还通过场线的疏密程度来反应矢量的大小变化的情况。如图 3－1 中分别表示了某一电场和某磁场的矢量场图形，从这些图形可以大体上看出矢量场的分布及其内在性质。

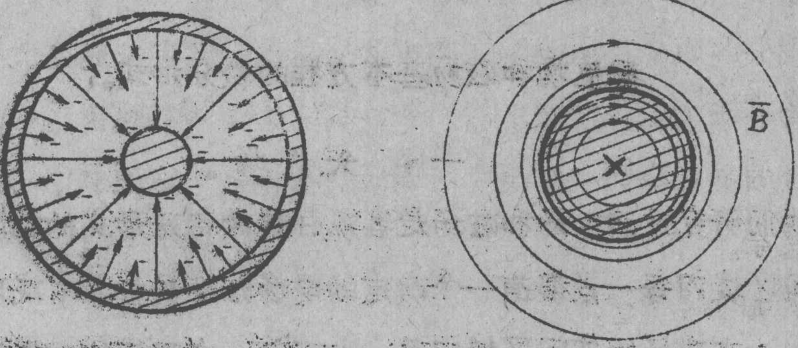

图 3—1

然而矢量场图形必竟只能定性地分析场的性质，要定量地分析和计算场仍然存在着困难。恩格斯指出："数学：辨证的辅助工具和表现形式"。在定量分析和要真正解决实际问题时，运用数学工具来掌握矢量场的变化规律是十分必要的。在第一章和第二章中已经用场矢量的闭合面积分和闭合线积分的分析方法表达了静电场和磁场的基本特性。现在总结如下：

静电场	磁场
$\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S}=q$ (电通量定理)	$\oint_S \overline{B}\cdot d\overline{S}=0$ (磁通连续性)
$\oint_l \overline{E}\cdot d\overline{l}=0$ (守恒性)	$\oint_l \overline{H}\cdot d\overline{l}=I$ (全电流定律)
$\overline{D}=\epsilon\epsilon_0\overline{E}$ (介质的电特性)	$\overline{B}=\mu\mu_0\overline{H}$ (介质的磁特性)

场矢量的闭合面积分和闭合线积分、是一种大范围内的计算方法。在生产斗争和科学实验中提出的实际问题往往是这样的：已知电场中的各导体的大小、形状及相互位置，在这些导体上给以已知的电位或总电荷，要求确定空间中各点的电场强度，即要求电场在空间的分布。

（或磁场问题是已知电流分布求磁场的分布。）而要根据场矢量的闭合面积分和闭合线积分的计算方法，从已知的电荷或电流分布直接求出电场或磁场是十分困难的。因为在大多数的实际情况中，只知道导体上带的总电荷而不知道电荷是怎样分布的；或知道电荷的分布不是十分复杂。

例如拿电通量定理来说，图3—2所示，某电场中的一闭合面内的电荷总数已经知道，则闭合面上的电通量也可求得。但闭合面内的电荷总数保持不变，电荷分布的方式在变化时，闭合面上的电通量仍然不变，而电通量在闭合面上的分布情况却无法确定。为了解决实际问题，我们必须把研究的范围缩小，想方法把电场分布及电荷分布，或磁场分布和电流分布在空间每一点上的关系找出来。这就需要在数学上，经过取极限的过程，求出微分的关系才能达到目的。下面就研究这些问题。

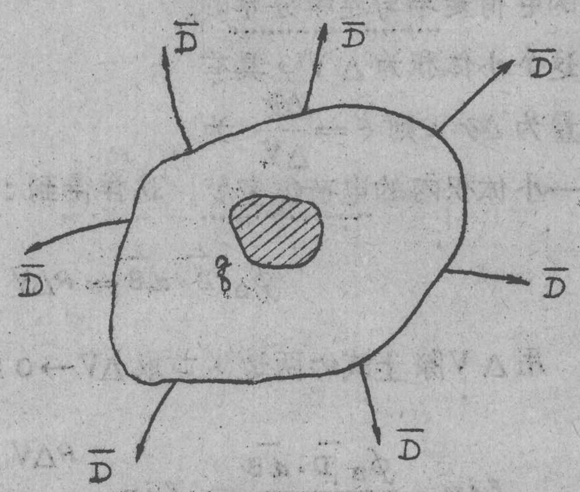

图3—2

二、矢量场的散度

1　静电场中，电通量定理告诉我们：“任意闭合面上的电通量等於闭合面内所含有的电量总数”即，

$$\oint_S \overline{D}\cdot\overline{dS}=q。$$

如图3—3，当闭合面所包围的体积无限地收缩成一“点”，即

体积趋於零时，我们就可以考察电场中一"点"的情况。由於体积收缩得很小很小可以认为在这样一个小体积中的电荷是均匀连续分布的。若这个小体积为ΔV，具有电量为Δq，则$\rho=\dfrac{\Delta q}{\Delta V}$为这一小体积内的电荷体密度，这样得到：

图3—3

$$\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S}=\rho\Delta V$$

用ΔV除上式的两边，並取$\Delta V\to 0$时的极限值，则得

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\rho\Delta V}{\Delta V}=\rho \qquad (3—1)$$

（3—1）式的左边$\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\oint_S \overline{D}\cdot d\overline{S}}{\Delta V}$，我们取一个新的名词叫做$\overline{D}$矢量的散度，並用符号$div\overline{D}$表示之，它的物理意义为每单位体积内所产生的场线数目。於是就有

$$div\overline{D}=\rho \qquad (3—2)$$

即，电通密度矢量$\overline{D}$的散度等於电荷体密度ρ。

"散度"这个名词在$\rho\neq 0$和$\rho=0$的地方都能很好地把场的特点表示出来。在电场中正电荷是产生场线的"源泉"，场线从它发散出来。负电荷如像是场线的"排洩沟"，场线在它那里终止。因此，在某一体积dV内，若电荷体密度不等於零（$\rho>0$或$\rho<0$），那么

场线就要穿过包围此体积的面积发散到周围的空间去，或者从周围收集拢来，（如图3—4(1)及(2)），这可简单地说成"矢量$\bar{D}$的散度不等於零"。反之，若场中某处的$\bar{D}$的散度不等於零，则该处一定具有正电荷或负电荷分布着。另外若电场中的某一区域内$\bar{D}$的散度处处为零，则可以确定这一区域内不存在有电荷。（如图3—4(3)）。

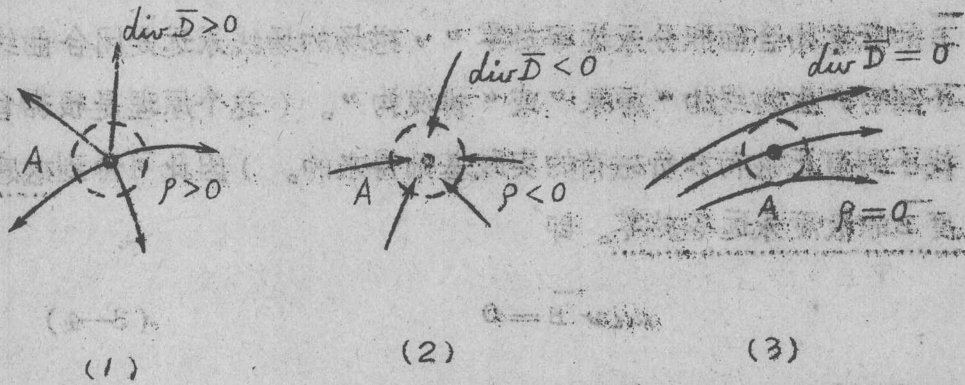

图3—4

静电场是由正负电荷形成，因此在整个电场中必然会有场线的"源泉"和"排泄沟"，所以静电场是一种有源场。

散度符号 div 本身是一种空间微分运算，通过它可以把场矢量在空间的变化与电荷体密度联系起来。可以证明（见附录）在直角坐标内散度的运算公式为

$$div\bar{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$=(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\bar{i}D_x+\bar{j}D_y+\bar{k}D_z)$$

$$=\nabla\cdot\bar{D}$$

式中$\nabla=(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z})$是一种矢量微分算子。於是从（3—2）式，得到

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho. \tag{3-3}$$

2　在恒定磁场中，磁通连续性原理告诉我们“磁感应強度矢量$\bar{B}$的任意闭合面积分永远等於零”，磁场的场线永远是闭合曲线，找不到有产生磁线的“源泉”或“排洩沟”。（这个原理是根据自然界找不到有正磁荷和负磁荷的实践基础得来的。）因此可得到磁感应強度$\bar{B}$的散度永远等於零。即

$$div\,\bar{B}=0 \tag{3-4}$$

因而恒定磁场是一种无源场（或无散度场）

3　电磁场中还有另一种有用的无散度场叫做电流场。例如图3—5所示，一段由细而粗的导体中通过电流I，很明显，在细的一段导体空间内电荷一定比较密集地通过截面S_1，而在粗的一段中电荷比较稀疏地通过截面S_2，在粗和细导体相接的空间内电荷的流动比较复杂。电荷在整个导体空间在流动形成了一个电流场，（这与流水在水管中流动形成一流体速度场相类似）。为了表示电流在通过导体截面时的疏密程度，常常引入电流密度的概念，电流密度定义为单位面积上的电流強度，即

$$J=I/S \tag{3-5}$$

J的单位为安/米^2。如图3—5中　I＝10安，r_1＝1厘米和

$r_2=2$厘米，则$J_1=3.17\times10^4$安／米^{2}和$J_2=0.79\times10^4$安／米^2。

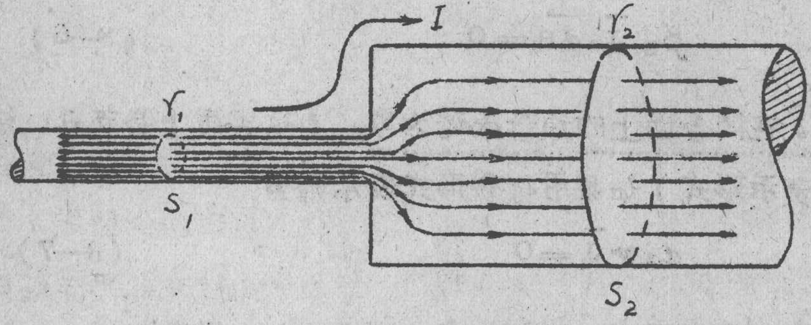

图3—5

一般电流密度是一个矢量，它的方向是指某处电荷运动的方向（一般说就是该处电场的方向。）而以上所讨论的是以电流密度矢量$\overline{J}$都垂直於面积S而言的。为了形象地表示电流场，在导体空间內划出一些线叫做电流线来表示每处电荷运动的方向，並用电流线的疏密程度来表示电流密度的大小。如图3—5中细的一段和粗的一段导体中电流是均匀地通过的，所以电流线应该是均匀分布的直线，並且细导体中电流线比较密，粗导体中比较疏。但在粗细导体相接处，情况稍复杂一些，为了分析这一般情况，把这一区域用图3—6表示，把面积S分成很多个微小面积dS，由於电流密度矢量$\overline{J}$与dS的法线方向成θ角，所以通过这小面积dS上的电流dI应为

$$dI=J\cos\theta\, dS=\overline{J}\cdot\overline{dS}$$

而通过面积S的电流应为

$$I=\int_S\overline{J}\cdot\overline{dS}$$

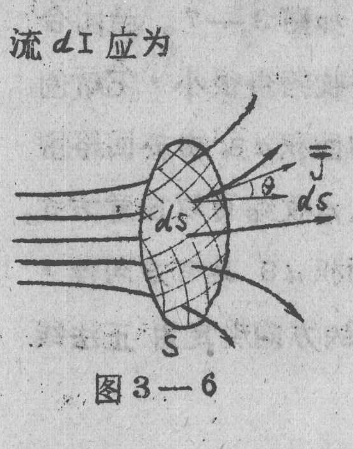

图3—6

我们从电路中知道，电流一定要通过电源形成一个闭合回路，因而电流线也一定是一根根闭合的线，当我们任取一个闭合面时，穿进闭合面的电流线等於穿出闭合面的电流线，即

$$\oint_S \overline{J}\cdot\overline{dS}=0 \tag{3-6}$$

电流密度矢量$\overline{J}$在闭合面上的通量永远为零。（这实质上是节点电流定律的又一种表示形式）如果用微分形式表示则为

$$div\,\overline{J}=0 \tag{3-7}$$

一般称它为电流连续性原理。因此恒定电流场是一个无散度场。

三、 矢量场的旋度。

在磁场中，全电流定律告诉我们："磁场强度矢量$\overline{H}$沿着闭合回路的线积分等於这闭合回路包围的面内所穿过的全部代数和。"即

$$\oint_l \overline{H}\cdot\overline{dl}=I$$

这个关系式只能确定穿过闭合回路包围的表面的电流值，但电流在表面的分布情形，却不能根据此积分的大小来判断。为了解决这个问题，必须把闭合回路收缩成一"点"，来考察磁场中一"点"的情况。如图3—7。当闭合回路收缩得很小，它所围成的面积dS，由於回路围绕A点收缩可以任意方式，即面积dS具有方向性，dS的方向规定为 正法线

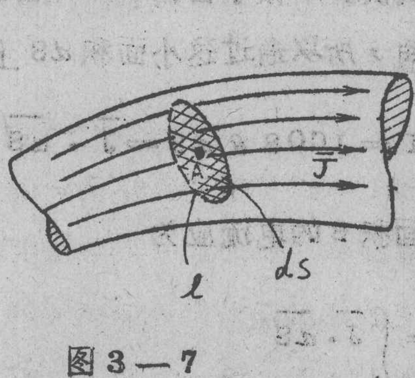

图3—7

方向，而正法线的方向又定为右螺旋沿回路l正方向旋转时螺旋前进的方向（即由右手螺旋法则决定）。於是得到

$$\oint_l \overline{H}\cdot d\overline{l}=\Delta I=\overline{J}\cdot d\overline{S}=J\cos\theta\Delta S=J_n\Delta S$$

用ΔS除以上式两边，並取$\Delta S\to 0$时的极限，则

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \overline{H}\cdot d\overline{l}}{\Delta S}=J_n$$

上式左边$\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\oint_l \overline{H}\cdot d\overline{l}}{\Delta S}$的极限值具有方向性，它决定於面积$\Delta S$法线的取向，当$\Delta S$的正法线方向与电流密度矢量$\overline{J}$相垂直时，极限值为零；当$\Delta S$的正法线方向与$\overline{J}$平行时，极限值为最大（等於电流密度$J$）；当$\Delta S$的正法线方向与$\overline{J}$成任意一角度$\theta$时，极限值恰好是最大极限值的投影（$J_n$）。所以我们可把这最大的极限值

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \overline{H}\cdot d\overline{l}}{\Delta S}=\mathrm{rot}\,\overline{H}$$

定义为一个矢量，並叫做磁场強度$\overline{H}$的旋度矢量，用符号$\mathrm{rot}\,\overline{H}$表示之。而且从上可知

$$\mathrm{rot}\,\overline{H}=\overline{J}。\qquad (3\text{—}8)$$

“旋度”这个名词是从研究流体速度场中得来的。我们从日常生活中观察流体（如水流）的流动有两种情况：一种是没有漩涡的流动；一种是有漩涡的流动。在最简单的平行的水流中，如果相邻流线的流速不相等时，如图3—8中（图中流线密的地方，流速比较快。）如

放置一个小水轮，则此水轮将绕轴旋转，表示水流是有旋涡的流动。如用一矢量表示此旋涡的強弱程度时，此矢量的方向应为水轮旋转轴的方向（图中矢量进入纸面），其大小则代表流速沿垂直流线方向的变化率。用数学式表示为速度的"旋度"$rot\bar{v}$。

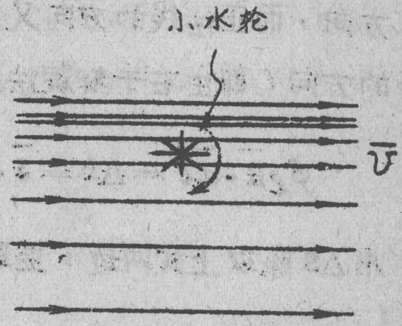

图3—8

与"散度"一样，旋度符号rot本身是一种空间微分运算，通过它可以把磁场矢量的空间变化和电流密度相联系起来。可以证明（见附录）在直角坐标内$rot\bar{H}$的表达式为

$$rot\bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\bar{i}H_x + \bar{j}H_y + \bar{k}H_z\right)$$

$$= \nabla \times \bar{H} \qquad (3-9)$$

248558

由於静电场中电场强度矢量$\overline{E}$在任意闭合回路上的线积分等於零。所以可得到其微分形式为

$$rot\,\overline{E}=0 \quad 或 \quad \nabla \times \overline{E}=0 \qquad (3-10)$$

例3—1：已知某一电场的分布在柱面坐标内的表达式为$E_r=Ar$（当$r\leq r_0$）及$E_r=A\dfrac{r_0^{\,2}}{r}$，（当$r\geq r_0$时）求产生此电场的"源"——即电荷的分布。（式中A为常数）

解：在园柱坐标内，散度的计算式为

$$div\,\overline{D}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{D}_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho$$

本题中 $D_r=\epsilon\epsilon_0 E_r$，$D_\alpha=0$，$D_z=0$，所以

$$\rho=div\,\overline{D}=\epsilon\epsilon_0\, div\,\overline{E}=\epsilon\epsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)$$

当$r\leq r_0$时，$\rho=\epsilon\epsilon_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[r(Ar)]=\epsilon\epsilon_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(Ar^2)$

$$=(2\epsilon\epsilon_0 A)$$

当$r\geq r_0$时，$\rho=\epsilon\epsilon_0\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}[r(\dfrac{r_0^{\,2}}{r})]=0$

所以产生这电场的电荷分布在半径为$r=r_0$的一个园柱体中，体电荷密度是一个常数$2\epsilon\epsilon_0 A$。在$r>r_0$时没有电荷。

例3—2，已知某一磁场的分布在柱面坐标中的表达式为$H_\alpha=Ar$（当$r\leq r_0$）及$H_\alpha=A\dfrac{r_0^2}{r}$（当$r\geq r_0$），求产生此

磁场的电流分布。

解：园柱坐标内，旋度的计算表达式为

$$\operatorname{rot}\bar{\bar{H}}=\bar{a}_r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \alpha}-\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right]+\bar{a}_\alpha\left[\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right]$$

$$+\bar{a}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rH_\alpha)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \alpha}\right]$$

本题中 $H_r=0$，$H_z=0$，所以

当 $r\leq r_0$ 时

$$\bar{J}_c=\bar{a}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\alpha)\right]=\bar{a}_z\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2A)=\bar{a}_z\,2A$$

当 $r\geq r_0$ 时

$$\bar{J}_c=\bar{a}_z\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{Ar_0^2}{r}\right)\right]=0$$

所以产生磁场的电流分布在 $r=r_0$ 的一条园柱形导线内，电流密度为常数（2A）。导线中的电流大小为 $I=\pi r_0^2 J_c=2\pi r_0^2 A$，流向在 z 方向。

例3—3，已知某一场的分布在直角坐标内，在 z 从0到 d 范围内场的表达式为

$$\bar{F}=\bar{i}A+\bar{j}0+\bar{k}0$$

在 z 小於0及 z 大於 d 的范围内场等於零。试求产生场的原因（即产

生场$\overline{F}$的电荷分布或电流分布），式中A为常数。

解：先求此场的散度，

$$div\overline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

因为$F_x=A$，$F_y=0$，$F_z=0$　所以

$$div\overline{F}=\frac{dF_x}{dX}=\frac{dA}{dX}=0$$

说明此场内没有体电荷分布。

再求此场的旋度

$$rot\overline{F}=\overline{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\overline{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+$$

$$+\overline{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=\overline{j}\frac{\partial F_x}{\partial z}+\overline{k}\left(-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$=\overline{j}\frac{\partial A}{\partial z}+\overline{k}\left(-\frac{\partial A}{\partial y}\right)=0$$

说明此场内没有电流分布。

初看起来，产生场的原因（即电荷或电流）都不存在，似乎这个场是不可能存在的。实质不是这样。让我们把场的图形表示在图3—9中，从图中可见在xy面上有电荷存在。在$z=a$的平行於xy面的平面上有负电荷存在，这些电荷就产生这个场。为什么在求场

的散度时这些电荷找不到？因为场的散度等於体电荷密度，如果是体电荷产生的场，则可以通过散度来求得。而现在的电荷分布在一个平面上，因此通过散度的计算是找不到的。怎样求得这些表面电荷呢？这个问题将在后面解决。

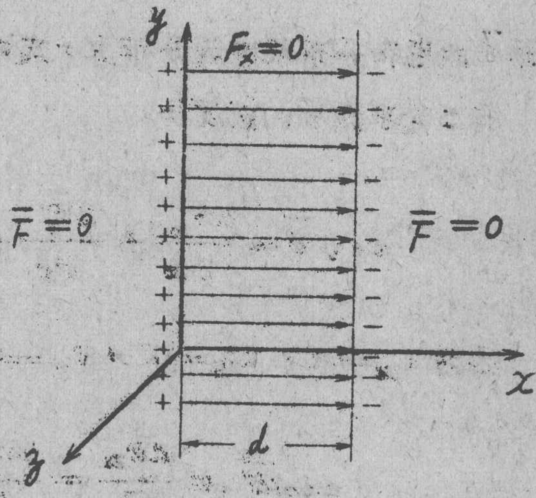

图3—9

四、静电场和磁场的基本规律的微分方程。

从上面几节的讨论，可以把静电场和磁场的基本规律的微分形式总结如下：

$$\left.\begin{aligned} rot\,\overline{E}&=0\\ div\,\overline{D}&=\rho\\ \overline{D}&=\epsilon\epsilon_0\overline{E}\end{aligned}\right\}\text{静电场的微分方程}\qquad(3\text{—}11)$$

$$\left.\begin{aligned} rot\,\overline{H}&=\overline{J}\\ div\,\overline{B}&=0\\ \overline{B}&=\mu\mu_0\overline{H}\end{aligned}\right\}\text{磁场的微分方程}\qquad(3\text{—}12)$$

可见静电场及磁场从本质上讲是不相同的。静电场是“有源无旋”场，电场矢量出发自正电荷、终止於负电荷，电力线永远不能闭合。而磁场是“无源有旋”场，磁线永远是闭合曲线，並每根磁线必然围

绕着电流。

我们从日常生活中的经验知道，要使液体流动产生一个流体场可有两种方法：一种方法是向场中注射液体或从场中吸出液体（要建立稳定的流体场、则注入和吸出的液体要相等）也就是在场中设置"源"和"沟"。而矢量$\overline{v}$的散度$div\overline{v}$就直接表示"源"或"沟"的強度。所以场的散度方程是把场和产生场的一个原因在空间每个地方联系起来。另一种引起流体场的方法是使液体发生漩涡，例如拿一物体搅动液体，则在无"源"和无"沟"的情况下也可以使液体产生漩涡状的流体场，而矢量$\overline{v}$的旋度$rot\overline{v}$就表示了每一点漩涡強度的大小。所以场的旋度方程式是把场和产生场的另外一个原因在空间每个地方联结起来。如果流体中既无"源"和"沟"，又无漩涡，则就无法使液体流动而成流速场，就像一潭死水一样。

如果把静电场和磁场与上面的流速场作一类似的比较。静电场没有旋度，只能靠"源"和"沟"来产生。磁场是没有散度，只能靠漩涡（即电流）来产生。有了电荷或电流存在时就有了产生场的原因。从整个系统来讲，没有电荷又没有电流，便没有电磁场。

从求解电场及磁场的角度来看，在数学中可以证明，一个矢量场，如果他的旋度及散度知道，这个场就确定了。因此我们把场的散度方程和旋度方程叫做场的基本微分方程。当然在具体解决实际问题时，常常遇到数学上的困难，人们在长期实践工作，结合生产实践，积累了一些求解上面微分方程式的各种各样方法。下面将介绍一些简单的方法。

五、静电场的泊松方程和拉普拉斯方程。

根据静电场的无旋度的性质，$rot\overline{E}=0$，或$\oint_l \overline{E}d\overline{l}=0$，