数学分析教程

第一卷　第一分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基 著
刘远图　郭思旭　高尚华 译

人民教育出版社

本书主要内容有绪论，实数，数列极限，函数的极限，一元函数微分学，n 维空间，曲线几何等．原书分二卷，本书为一卷第一分册，可作为高等学校理科数学，计算数学等专业的参考书．

数学分析教程

第一卷 第一分册

[苏] C. M. 尼柯尔斯基 著

刘远图 郭思旭 高尚华 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 181,000

1980 年 11 月第 1 版 1981 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001— 14,500

书号 13012·0534 定价 0.69 元

译者的话

本书作者 C.M. 尼柯尔斯基是苏联科学院院士、莫斯科物理技术学院的教授. 他所写的《数学分析教程》在苏联是较著名的教本. 该书叙述细腻,在某些问题的处理上作了新的尝试,对于高等学校数学分析课程的教学,有一定的参考价值.

本书的 1—5 章由刘远图同志翻译, 6—7 章由郭思旭同志翻译,8—11 章由高尚华同志翻译. 刘远图同志并对照原文审阅了全书.

由于译者水平所限,错误之处在所难免,请读者不吝批评指正.

译　者

1980 年10 月

第一版前言

这一课本分两卷出版．它的内容，除了若干补充内容以外，和我在莫斯科物理技术学院多年讲授数学分析课程的大纲是适应的．

第一章具有绪论的性质．在这一章里，以极限的直观表示为基础，引入了数学分析的基本概念，而且甚至从直观的和物理的角度出发建立了导数和积分的联系，介绍给读者平行学习物理所必需的微分和积分基本技巧．

第二章讲述实数．把一个数表示为无穷小数的形式，被看作是数的概念的基础．这一章中用大号字排印的部分才是必学的内容．如果愿意的话，必学的内容还可以减少．

但是，我仍然坚持传统的观点，即数学分析的基本的事情应当是先讲一元函数，后讲多元函数．这里不可能避免重复，但重复不多．另一方面，对于象我们力学数学专业、物理数学专业和物理技术专业的大学生这样一些听讲者来说，讲完一元函数以后，完全可以不讲二元和三元函数，而直接讲 n 元函数．这里整个问题只在于要有合适的符号．但是这样的符号在各种杂志和文献资料中早已采用，其合理性也已经过检验，现在应当把它们当作我们的课本的一份财富．这种处理方法保证了正确的发展前景．因为在教程的下半部分，象傅里叶级数、傅里叶积分这样一些章节里，读者必须掌握函数空间无穷维的概念．

在叙述中，我相当早地引入了 n 维欧几里得空间、内积空间、巴拿赫空间等概念．而且广泛地使用这些概念．当然这只限于完成大纲所必需的范围以内．

按照大纲的要求，数学分析课程是以黎曼积分为基础来讲授的．对于一维和多维情况下类似的定理，我尽量采用类似的证明方法，以便减轻读者的负担，把精力用于探讨其他问题．

一个很微妙的问题是：怎样处理 L 和 L_2 空间的完备性？为了解决这个问题，我没有构造一些抽象的东西去替代勒贝格可积函数，而是在基本课文中只限于说明，应当怎样用勒贝格积分的术语来解释有关的事实．

但是在课本的第二卷补写了一章，即第 19 章．这一章讲述勒贝格积分．我相信本书的许多读者将会主动阅读这一章．他们不会为此失去任何东西．现代数学物理学，作为他们应当学习的一门学科，就需要勒贝格积分．例如，数学物理学中的直接变分方法，不应用勒贝格积分，就会变得不可思议．读者只需熟悉约当测度的概念，就完全可以开始阅读第 19 章了．

第 17 章和第 18 章（第二卷）也是补充内容．第 18 章讨论了现代分析的重要概念，例如按索波列夫的函数平均和单位分解．认真地说，这些项目应当作为必学内容列入较高水平的分析课程的教学大纲．

第 17 章介绍微分流形和微分形式．这一章的高峰是证明 n 维空间中的司托克斯定理．这一章可以用来检查学完本书的读者掌握的程度．

我希望本书的读者在学完本课程以后，会比较容易地理解数学物理方法．增加的一些补充内容，正是考虑到数学物理学的需要．在阐述与多元函数有关的问题时，出现了很大的活动场地．我们关于这一方面的教学思想，仍有待探讨．我希望本书对于这一艰巨任务能作出一些微末贡献．

我愿意列出曾经对我产生过巨大影响的那些书籍．

首先应当提到的是瓦莱-布善的《无穷小分析教程》．这里，我

愿意表达对瓦莱-布善的崇敬，早在我还是一个大学生时，我就努力学习瓦莱-布善写的该书的两卷本，而且至今仍是我案头必置的一本书.

其次是П.С.阿列克山得洛夫和А.Н.柯尔莫柯洛夫合著的《实变函数论导论》. 这本书我曾经认真地学习过，而且在弟聂泊尔彼特洛夫大学按照这本书进行过教学. 此外，我曾经多次聆听过这两位杰出的作者的讲演，其中А.Н.柯尔莫柯洛夫还是我的指导教师. 这里我向他们表示深深的谢意.

我想向莫斯科物理技术学院数学教研室这个集体表示感激，因为我在这个集体中工作二十五年了，在此期间曾经多次讨论了数学分析教学的问题. 当然，这里我应当特别提到的是我的同事、教研室主任Л.Д.库德里亚弗切夫教授和О.В.别索夫教授，同他们交谈是极有教益的.

我的同事Е.А.沃尔柯夫教授和П.И.里卓尔金教授仔细地阅读了本书手稿的前面几章，指出了那里存在的缺点. 这些缺点，我都作了改正. Р.В.嘎姆克列里哲教授仔细地阅读了讲述微分形式的第17章. 他提出的许多建议，我都作了研究. 我同А.А.杰津教授也就这个问题作过讨论，他提出的一些建议对我也是很有益的.

本书的正式评审者И.Н.维库阿院士和莫斯科电子机械制造学院数学教研室，对我写的这本书给予了很高的评价。他们提出的许多有益的建议，我都一一采用了.

我的同事、本书编辑А.А.瓦沙林仔细地审读了手稿全文，并且对本书各个部分作了核对. 对他提出的意见，当然我也作了考虑.

对上面提到的所有的人，我表示深深的谢意.

С.М.尼柯尔斯基　1970年

目　录

第一章 绪　　论

§1.1. 引　　言

《数学分析》这个名称是由旧名称《无穷小分析》演变而来的简称. 旧名称比较长一些，但也是简称. 《利用无穷小进行分析》这个名称才比较精确地刻划了学科的特点.

如果名称反映了应予分析(研究)的那些对象，那就更好了. 在古典的数学分析中,这种对象首先是函数,即依赖于其他变量的变量.

我们说"首先",是因为数学分析进一步发展,使得有可能利用它的方法去研究比函数更为复杂的结构(泛函,算子,等等).但是,现在谈这个问题还为时过早. 我们当前的任务，是用无穷小方法(或者叫做极限方法)研究相当普遍的、实际中遇到的那些函数. 无穷小方法是什么呢?——这个问题以后将逐渐向读者讲述. 这里，我们要特别指出，由这种方法可以导出极其重要的对于函数的两种运算——微分和积分.

§1.2 和 §1.3 将阐述集合和函数的概念.

接下去的三节,即 §1.4—§1.6,具有纯粹绪论的性质. 从这几节里，对本书将详细展开讨论的数学分析的基本概念——连续性，导数，不定积分和定积分——读者可得知其梗概. 极限的概念,这里我们当然要用到,但是现在还不对它下定义,也不作详细说明,暂时完全依赖读者的直观. 读本书时,也可以先跳过 §1.4—§1.6,而在以后按照书中需要引用到这几节时再回头读它们.

§1.2. 集合. 开区间. 闭区间

任意的一些对象的任意汇集或整体，在数学里称为集合(或集). 例如，可以说，林边草地里生长的所有的树的集合，在这块草地上放牧的所有的鹅的集合，所有整数的集合. 如果A表示一些对象的某一特定的集合，而x表示其中一个对象，那么就说x是集合A的元素，并将这一事实记作: $x\in A$.

如果y不是A的元素，那么这一事实可以记作: $y\overline{\in}A$，或$y\notin A$.

如果两个字母A和B表示同一个集合，那么就写成$A=B$. 此时必须指出，这里讲的是集合论的相等，而不能把它同数的相等混淆起来.

如果由$x\in A$总能得出$x\in B$，那么就记作$A\subset B$，并且说，A包含于B，或者A是B的子集(或部分). 我们可以想到，在这个定义下，$A=B$这种情形是$A\subset B$的一种特殊情形. 因为当$A\subset B$而且$B\subset A$时，有$A=B$，反过来也对.

如果集合仅由一个元素x组成，那么最好用另外的字母(例如，A)来表示这个集合，因为必须在逻辑上将由一个元素组成的集合同这个元素本身加以区别. 此外，需要从形式上引入空集，即不包含任何元素的集合，空集记作: $\varnothing$. 根据定义，对于任一集合A，有$\varnothing\subset A$.

从中学数学课程我们知道，在实数和直线上的点之间，可以按下列法则建立一一对应①. 数0同直线上任意选取的点O(零点)一一对应. 把某一确定的线段的长度取作单位长度. 每一个实数$\pm a(a>0)$对应于直线上一点，这点和零点的距离等于a，它在O的右边还是左边，取决于a前面的符号是“+”还是“-”. 反过来，如

① 关于这一点可以参看下面§2.7.

果A是上述直线上任意一点，它和O的距离为a，那么根据A在O的右边还是左边，A对应于数$+a$或$-a$.

按照上述方法使直线上所有的点同全体实数建立对应，这条直线叫做**数直线**或**实数轴**. 实数轴上的点可以用它表示的数来称呼. 这样一来，就可以说点0，点1，点1.2，点$\sqrt{2}$，等等. 以后，我们既可以把数称为(实数轴上的)点，也可以反过来把点称为数.

设数(点)a和b满足不等式$a<b$.

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的数x的集合：称为**闭区间**(包括端点a和b)，记作：$[a,b]$.

满足不等式$a<x<b$的数x的集合，称为**开区间**(不包括端点a和b)，记作：(a,b).

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的数x的集合，分别记作$[a,b)$，$(a,b]$，并称为**半开区间**或**半闭区间**. 例如，前一个是左闭右开.

还经常讨论所谓**无穷区间**或**无穷半开区间**的集合：1)$(-\infty,\infty)$，2)$(-\infty,a]$，3)$(-\infty,a)$，4)(a,∞)，5)$[a,\infty)$.

其中第一个是全体实数的集合(实数直线)；其余四个分别是由满足下列不等式的所有的数组成的集合：2)$x\leqslant a$，3)$x<a$，4)$a<x$，5)$a\leqslant x$.

设A和B是任意的两个集合. A和B的**和**或**并**是指这样的集合，它是A和B之所有元素的全体，记作$A+B$或$A\cup B$.

A和B的**差**是指这样的集合，它是A中不属于B的所有元素的全体，记作$A\backslash B$(或$A-B$).

A和B的**交**是指这样的集合，它是既属于A、又属于B的所有元素的全体，记作AB或$A\cap B$.

设A,B,C是任意集合. 在集合论中下列等式成立：

$$(A\pm B)C=AC\pm BC \tag{1}$$

例如，对于"+"的情况，上列等式可以证明如下. 如果元素 x 属于(1)式的左边，那么它同时要既属于 $A+B$，又要属于 C. 但是这时 x 至少应当属于 A 或 B 中的一个集合. 为了确定起见，设 $x\in A$；于是 $x\in AC$，因此，x 属于(1)式的右边. 反过来，设 x 属于等式的右边. 这时 x 属于集合 AC 或 BC 中的一个集合. 为了确定起见，设 $x\in AC$；于是 x 既属于 A，又属于 C，因此，x 既属于 $A+B$，又属于 C，也就属于(1)式的左边.

集合的和的概念，可以自然地推广到任意有限个甚至无穷多个集合相加的情况.

表达式

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 + \cdots + A_N, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 + A_2 + \cdots$$

分别表示集合 $A_1, \cdots, A_N$ 或 $A_1, A_2, \cdots$ 的元素的全体，称为上述集合的和或并.

下面两个等式成立(跟(1)式取"+"的情况类似)：

$$C\bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{k=1}^{N} CA_k, \quad C\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} CA_k,$$

其中 C 是任意集合.

例.

1) $[0, 2]+[1, 3]=[0, 3]$；

2) $[0, 2]-[1, 3]=[0, 1)$；

3) $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[k, k+1]=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}[k, k+1)=R$，其中 R 是全体实数的集合.

§1.3. 函　数

设 E 是一个数集，根据某一完全确定的法则，使得 E 中每一个数 x 都有(一个)数 y 与之对应，那么就说，在 E 上给出了一个(单

值)函数，记作：

$$y=f(x) \qquad (x\in E). \tag{1}$$

这个定义是由Н.И.罗巴切夫斯基和迪里赫勒①提出的. 集合 E 叫做函数 $f(x)$ 的定义域. 我们也说，给定了一个独立变量 x，它可以取集合 E 的各个值 x，而且对于每一个 $x\in E$，根据上述法则，有另一个变量 y 的一个确定的值(数)与之对应；变量 y 称为函数或因变量. 独立变量 x 称为自变量.

可以使用几何的语言来描述函数的概念. 我们说，给定了实数直线上的点 x 的集合(即函数的定义域)和一个法则，根据这个法则，对于每一个点 $x\in E$ 都有一个数 $y=f(x)$ 与之对应.

如果我们想把函数说成是某种法则，使得每一 $x\in E$ 都有某一数 y 与之对应，那么只须用一个字母 f 来表示函数就足够了. 符号 $f(x)$ 表示根据法则对应于值 $x\in E$ 的数 y. 例如，如果数1属于函数 f 的定义域 E，那么 $f(1)$ 就是在点 $x=1$ 处函数 f 的值. 如果1不属于 $E(1\bar{\in}E)$，那么就说函数 f 在点 $x=1$ 处没有定义.

对于所有 $x\in E$，$y=f(x)$ 的一切值的集合 E_1，称为集合 E 在函数 f 下的象，这种情况有时记作 $E_1=f(E)$. 但是使用这种符号应当慎重，尽可能每次都说明在什么时候使用这种符号，以免和符号 $y=f(x)$ 混淆. 后者的 x 是属于集合 E 的任意一个点(数)，而 y 是 x 在函数(法则) f 下集合 E_1 的对应点. 我们也说，函数 f 将集合 E 映满集合 E_1.

如果象 $E_1=f(E)\subset A$，其中 A 一般是和 E_1 不同的数集，那么就说函数 f 将 E 映入 A.

对于在同一集合 E 上定义的函数 f 和 φ，可以定义和 $f+\varphi$，

① Н.И.罗巴切夫斯基(1792—1856)是伟大的俄罗斯数学家，非欧几何的创立者. 迪里赫勒(1805—1859)是德国数学家.

差 $f-\varphi$，积 $f\varphi$，商 $\frac{f}{\varphi}$. 这是一些新的函数，它们的值分别用公式表示如下：

$$f(x)+\varphi(x),\ f(x)-\varphi(x),\ f(x)\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)},\ x\in E, \tag{2}$$

其中对于商的情况，假定在 E 上 $\varphi(x)\neq 0$.

表示函数也可以使用任何其他字母，如 $F, \Phi, \Psi, \cdots$，同样，可以用 $z, u, v, w, \cdots$ 代替 x, y.

如果函数 f 将集合 E 映入 E_1，而函数 $z=F(f(x))$ 将集合 E_1 映入集合 E_2，那么函数 $z=F(f(x))$ 称为*函数的函数*，或*复合函数*，或 f 和 F 的*叠加*. 它定义在集合 E 上，将 E 映入 E_2.

复合函数可以由 n 个函数组成：$z=F_1(F_2(F_3\cdots(F_n(x))\cdots))$.

实践为我们提供了许多函数的例子. 例如，圆的面积 S 是它的半径的函数，用公式表示是 $S=\pi r^2$. 这个函数显然定义在全体正数 r 的集合上.

如果不把上面的问题同圆面积联系起来，也可以讨论变量 S 和 r 之间由公式 $S=\pi r^2$ 表示的依赖关系. 由这个公式表示的函数 $S=\varphi(r)$ 在整个实数轴上，也就是对于全体实数 r 有定义，而不仅是对正数才有定义.

下面列出几个用公式表示函数的例子：

1) $y=\sqrt{1-x^2}$，　　4) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，

2) $y=\lg(1+x)$，　　5) $y=\arcsin x$.

3) $y=x-1$，

我们现在考虑的只限于实变函数；当自变量 x 取实数值时，这种函数取实数值 y. 不难看出，上面五个函数的定义域分别是：

1) 闭区间 $[-1,1]=\{-1\leqslant x\leqslant 1\}$；

2) 集合 $x>-1$;

3) 整个实数轴;

4) 除去点 $x=1$ 以外的整个实数轴;

5) 闭区间$[-1, +1]$.

例 1 和例 2 中的函数,可以看作是函数的函数: 1) $y=\sqrt{u}$, $u=1-v$, $v=x^2$; 2) $y=\lg u$, $u=1+x$.

表示函数的一种重要工具是图象. 我们给定 x 和 y 的直角坐标系(图 1.1), 在 x 轴上标出闭区间$[a, b]$, 再任意画一条曲线 Γ, 使它具有下述性质: 经过任意一点 $x\in[a, b]$且平行于 y 轴的直线, 都和曲线 Γ 相交于一点 A. 在直角(笛卡尔)坐标系中这样作出的曲线 Γ, 叫做图象. 在闭区间 $[a, b]$上, 图象按下述方式定义函数 $y=f(x)$. 如果 x 是闭区间$[a, b]$上任意一点, 那么就把对应的值 $y=f(x)$定义为点 A 的纵坐标(参看图 1.1). 这样, 利用图象可以给出完全确定的、x 和 $y=f(x)$间的对应法则.

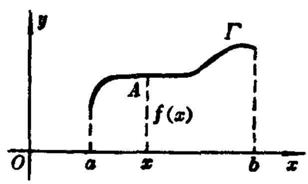

图 1.1

前面我们利用图象在闭区间这种集合 E 上给出了函数. 在其他情况下, E 可以是开区间、半开区间、整个实数轴、属于某一开区间的有理点集,等等.

在某一开区间(a, b)上,给定函数 $f(x)$和任意常数 $\alpha\neq0$. 由 α 和 f 可以构成许多其他的函数: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x)+\alpha$; 3) $f(x-\alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. 1)和 2)两个函数的定义域是同一开区间(a, b). 同 $f(x)$纵坐标相比, 1) 中函数 $\alpha f(x)$的纵坐标是前者的 α 倍. 将 f 的图象升高 α 就得到函数 2)的图象①; 将 f 的图象往右移动 α, 就得到函数 3)的图象. 最后, 当 $\alpha>0$ 时, 函数 4)的定义域显然是开

① 显然, 当 $\alpha<0$ 时, 升高 α 或者右移应当分别理解为下降或左移 $|\alpha|$.

区间$\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right)$;将$f$的图象均匀地压缩为$\alpha$分之一，就得到它的图象.

如果函数f定义在关于原点对称的集合上，而且在这个集合上具有性质$f(-x)=f(x)$或性质$f(-x)=-f(x)$,那么函数f称为偶函数或奇函数.

显然,偶函数的图象关于y轴对称,而奇函数的图形则关于坐标原点对称. 例如,x^{2k}(k是自然数),$\cos x$, $\ln|x|$, $\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$都是偶函数，而x^{2k+1}($k\geqslant 0$,而且是整数)，$\sin x$，$x\sqrt{1+x^2}$，$xf(|kx|)$都是奇函数.

不难看出,两个偶函数或两个奇函数的积是偶函数,而偶函数和奇函数的积是奇函数.

当然,大部分函数既不是偶函数,也不是奇函数.

函数在它的定义域的不同部分上可以用不同的公式表示出来. 例如，一列火车在$t=0$时由A地开出，速度是每小时100公里,行驶2小时到达B地;在那里停车1小时后,以每小时80公里的速度继续向前行驶3小时. 于是，表示火车在时刻t同A地的距离(单位:公里)的函数,显然可以用下面三个公式表示:

$$f(t)=\begin{cases}100\,t & (0\leqslant t\leqslant 2),\\ 200 & (2\leqslant t\leqslant 3),\\ 200+80(t-3), & (3\leqslant t\leqslant 6).\end{cases}$$

函数可以用表格的形式表示出来. 例如，我们可以每隔1小时测量一次气温T. 于是对应于每一时刻$t=0, 1, 2, \cdots, 24$,都有表中的一个确定的数T与之对应.

这样一来，我们得到的是用数值表给出的、定义在从0到24的整数集E上的函数$T=f(t)$.

如果函数$y=f(x)$在某一集合E上是用公式表示的，那么总