高等数学概论

GAODENG SHUXUE GAILUN

尹逊波　孙杰宝　主编

科学出版社

高等数学概论

尹逊波　孙杰宝　主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是由哈尔滨工业大学编写的一本高等数学教材，本着删繁就简、注重实用的原则，对传统高等数学内容做了部分删减，针对的是对数学要求不高的部分专业.

本书主要介绍了一元微积分学及多元微分及二重积分的内容，每节后面都有相应的题目，书后附录还有综合性的练习题，同时为了配合教学内容，还摘引了部分数学家的趣闻轶事，阐述了数学与文化的联系.

本书可作为人文、经济等专业的本科、专科学生使用，也可以满足远程教育学生对高等数学的要求.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学概论/尹逊波，孙杰宝主编. —北京：科学出版社，2015.12
ISBN 978-7-03-046589-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①尹… ②孙… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第289574号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：钟 洋
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年12月第 一 版 开本：720×1 000 B5
2015年12月第一次印刷 印张：11
字数：260 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

培养基础扎实的人才一直是大学教育的重要目标，随着互联网时代到来，在线教育的全面发展，教材的多元化、信息化也是未来的趋势. 正是在这样的背景下，编者针对部分专业对高等数学要求不高，对这些专业及高等数学教学进行了一定的探索，才有了这本教材的出版.

本书的主要特色如下：

1. 与笔者在爱课程网站上线的“工科数学分析”部分内容配套，利于学生结合课本与网上资源学习；

2. 例题和习题丰富，特别是每节之后都有相应的配套习题，帮助学生更好地理解和掌握课程内容；

3. 为了拓宽学生的知识面及数学文化素养，特增加了数学家的趣闻轶事；

4. 书后给出模拟测试题及答案，以便于学生复习.

特别感谢在本书编写过程中，各位数学系同仁的关心和支持. 由于编者水平有限，书中错误、疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2015 年 11 月

目　录

前言

第 1 章　函数 …… 1
1.1　函数的概念 …… 1
1.1.1　实数集与实数 …… 1
1.1.2　函数的概念 …… 2
1.1.3　简单的经济函数 …… 4
习题 1.1 …… 6
1.2　函数的几种特性与类型 …… 7
1.2.1　函数的几种特性 …… 7
1.2.2　函数的类型 …… 8
习题 1.2 …… 9
1.3　初等函数 …… 10
1.3.1　基本初等函数及其图形 …… 10
1.3.2　复合函数与初等函数 …… 13
习题 1.3 …… 14
数学名家　通晓数学的大师——欧拉 …… 15

第 2 章　极限与连续 …… 18
2.1　函数的极限 …… 18
2.1.1　数列极限与函数极限 …… 18
2.1.2　无穷小量与无穷大量 …… 21
2.1.3　极限的存在准则及两个重要极限 …… 22
习题 2.1 …… 23
2.2　函数的连续 …… 24
2.2.1　连续函数的定义 …… 24
2.2.2　函数间断点的类型 …… 26
2.2.3　连续函数的性质 …… 27
习题 2.2 …… 28

数学名家 极限理论的奠基人——柯西、魏尔斯特拉斯 …… 30

第 3 章 一元微分学 …… 33

3.1 导数与微分 …… 33

3.1.1 导数的定义 …… 33

3.1.2 导数的基本公式 …… 38

3.1.3 微分 …… 40

习题 3.1 …… 42

3.2 导数与微分的计算 …… 43

3.2.1 四则运算求导法则 …… 43

3.2.2 反函数与复合函数求导法则 …… 44

3.2.3 隐函数与参数方程求导法则 …… 47

3.2.4 高阶导数 …… 49

习题 3.2 …… 52

3.3 微分中值定理与洛必达法则 …… 53

3.3.1 微分中值定理 …… 53

3.3.2 洛必达法则 …… 55

习题 3.3 …… 59

3.4 导数的应用 …… 60

3.4.1 函数的单调性 …… 60

3.4.2 函数的极值与最值 …… 62

3.4.3 曲线的凸凹性及曲线的渐近线 …… 65

3.4.4 导数在经济学中的应用 …… 68

习题 3.4 …… 71

数学名家 18,19 世纪承上启下的数学大师——拉格朗日 …… 72

第 4 章 一元积分学 …… 75

4.1 不定积分的概念 …… 75

习题 4.1 …… 79

4.2 不定积分的计算 …… 79

习题 4.2 …… 83

4.3 微分方程的求解 …… 84

4.3.1 微分方程的概念 …… 84

4.3.2 可分离变量的方程 …… 85

4.3.3 一阶线性微分方程 …… 86

4.3.4 变量代换 …… 88
习题 4.3 …… 89
4.4 函数的定积分 …… 90
4.4.1 定积分的概念 …… 90
4.4.2 定积分的简单性质 …… 92
4.4.3 微积分基本定理 …… 93
4.4.4 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 96
4.4.5 定积分的应用 …… 98
习题 4.4 …… 102
4.5 反常积分 …… 103
4.5.1 无穷区间上的反常积分 …… 103
4.5.2 无界函数的反常积分 …… 105
习题 4.5 …… 106
数学名家　微积分创始人之一——莱布尼茨 …… 107

第 5 章　多元函数微积分学 …… 115
5.1 多元函数的基本概念 …… 115
5.1.1 多元函数 …… 115
5.1.2 多元函数的极限与连续 …… 117
习题 5.1 …… 118
5.2 偏导数与全微分 …… 118
5.2.1 偏导数 …… 118
5.2.2 高阶偏导数 …… 120
5.2.3 全微分 …… 121
习题 5.2 …… 123
5.3 复合函数隐函数求导法则 …… 124
5.3.1 复合函数求导法则 …… 124
5.3.2 隐函数求导法则 …… 126
习题 5.3 …… 128
5.4 多元函数的极值 …… 129
习题 5.4 …… 131
5.5 二重积分 …… 131
5.5.1 二重积分的概念 …… 131
5.5.2 二重积分的性质 …… 133
5.5.3 二重积分的计算 …… 134

习题 5.5 …… 138
数学名家　最富创造性的数学家——黎曼 …… 140
参考文献 …… 145
部分习题答案 …… 146
附录　模拟测试题(五套)及答案 …… 156

第 1 章　函　　数

函数是最重要的数学概念之一，是反映变量间对应关系的一种方式，是本书主要的研究对象，所以有必要对相关知识进行简要介绍. 除函数的概念之外，与函数相关的函数周期性、有界性、奇偶性、单调性等性质，以及本书主要涉及的基本初等函数和初等函数在本章均将加以介绍.

1.1　函数的概念

1.1.1　实数集与实数

实数是有理数和无理数(无限不循环小数)的统称，有理数又分为整数和分数.

取定了原点、长度单位和方向的直线称为数轴. 数轴上的点与实数是一一对应的. 今后，我们对实数和数轴上的点不加区别.

以数为元素的集合称为数集，习惯上自然数集记为 $\mathbf{N}$ 、整数集记为 $\mathbf{Z}$ 、有理数集记为 $\mathbf{Q}$. 所有实数构成的数集称为实数集，记为 $\mathbf{R}$.

设 $a,b\in\mathbf{R}$ ，且 $a<b$ ，以 a,b 为端点的有限区间包括

开区间： $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

闭区间： $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

半开区间： $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\}$;

$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b,\ x\in\mathbf{R}\}$.

此外，还有五种无穷区间：

$$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a,\ x\in\mathbf{R}\};$$

$$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a,\ x\in\mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,\ b)=\{x\,|\,x<b,\ x\in\mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,\ b]=\{x\,|\,x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,\ +\infty)=\mathbf{R}.$$

设 $\delta>0$ ，称开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U_\delta(x_0)$ 或 $U(x_0,\delta)$. 它是以 x_0 为中心，长为 2δ 的开区间(图 1.1). 有时我们不关心 δ 的大小，常用“邻域”或“ x_0 附近”代替 x_0 的 δ 邻域.

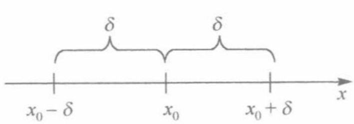

图 1.1

称集合 $(x_0-\delta,\ x_0)\cup\{x_0, x_0+\delta\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}_\delta(x_0)$.

实数 x 的绝对值

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

下面列出绝对值的几个常用性质：

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$；　(2) $|x|\geqslant 0$；

(3) $|-x|=|x|$；　(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(5) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$；　(6) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$；

(7) $|xy|=|x||y|$；　(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$；

(9) 当 $a>0$ 时，$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$；

(10) 当 $b>0$ 时，$|x|>b\Leftrightarrow x<-b$ 或 $x>b$.

1.1.2　函数的概念

在研究自然的、社会的，以及工程技术的某个过程中，经常会遇到各种不同的量. 在所研究的过程中保持不变的量称为常量，习惯上用字母 a,b,c 等表示. 在所研究的过程中，数值有变化的量称为变量，习惯上用英文字母 x,y,z 等表示.

函数的概念与中学介绍的函数概念是一致的，只是在表述方式上有所不同.

定义 1.1　如果两个变量 x 和 y 之间有一个数值对应规律，使变量 x 在其可取值的数集 X 内每取得一个值时，变量 y 就依照这个规律确定唯一对应值，则说 y 是 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量.

自变量 x 可取值的数集 X 称为函数的定义域. 所有函数值构成的集合 Y 称为函数的值域. 显然，函数 $y=f(x)$ 就是从定义域 X 到值域 Y 的映射，所以，有时把函数记为

$$f:X\to Y.$$

函数概念中有两个要素：其一是对应规律，即函数关系；其二是定义域.

函数的表示方法是多样的，主要有：公式法、图形法、表格法. 公式法给出的函数，有时在定义域内由一个公式表达出函数关系，有时无法或很难用一个公式表达出函数关系，而在定义域的不同部分用不同的公式来表达一个函数关系，这样的函数称为**分段函数**.

例 1　根据 2011 年国家税收规定：个人月收入少于 3500 元的部分不纳税，超

过 3500 元而少于 5000 元的部分按 3%纳税，而超过 5000 元少于 8000 元的部分按 10%纳税，所以个人月收入 x 与应纳税 y 的函数关系是(图 1.2)

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 3500,\\ (x-3500)\cdot 3\%, & 3500<x\leqslant 5000,\\ 45+(x-5000)\cdot 10\%, & 5000<x\leqslant 8000.\end{cases}$$

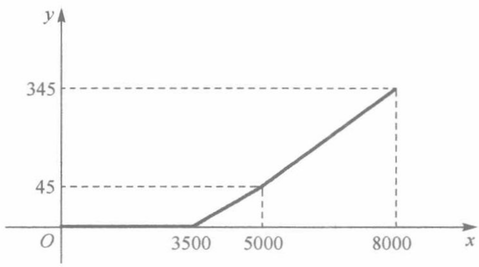

图 1.2

例 2　某公司第四季度各月计算机销售量(台)见表 1.1. 月份 t 和销售量 S 两个变量有表 1.1 中所示的依赖关系.

表 1.1

月份 t	10	11	12
销售量 S	58	47	36

例 1 分别用公式法和图形法表示变量间的函数关系，而例 2 则是表格法给出的函数关系. 下面给出的一个函数是典型的分段函数.

例 3　符号函数(克罗内克函数)(图 1.3)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

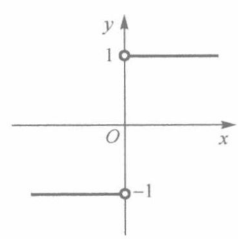

图 1.3

例 4　确定 $y=\sqrt{4x^2-1}+\arcsin x$ 的定义域.

解　因为负数不能开平方，所以有

$$4x^2-1\geqslant 0,$$

它等价于 $|x|\geqslant\dfrac{1}{2}$，又因 $\arcsin x$ 的定义域是 $|x|\leqslant 1$，故所求的定义域是集合

$$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right].$$

例 5　确定 $y=1/\lg(3x-2)+\tan x$ 的定义域.

解　由负数和零不能取对数，零不能作分母及正切函数的定义知

$$3x-2>0,\quad 3x-2\neq 1,\quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

故定义域

$$X=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{2}{3},\text{且}x\neq 1,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),x\in\mathbf{R}\right\}.$$

1.1.3　简单的经济函数

人们在生产和经营活动中，希望在保证质量的条件下尽可能降低产品的成本，增加收入与利润. 而成本 C、收入 R 和利润 L 这些经济变量都与产品的产量或销售量 x 有关，经抽象简化，可以把它们看成 x 的函数，分别称为**总成本函数**，记为 $C(x)$，**总收入函数**，记为 $R(x)$，**总利润函数**，记为 $L(x)$.

一般地说，总成本由固定成本和可变成本两部分组成. 固定成本与产量 x 无关，如厂房、设备、企业管理费等；可变成本随产量 x 的增加而增加，如原材料费、动力费、工时费、运输费等. 因此成本函数 $C(x)$ 是产量 x 的单增函数，最简单的成本函数为线性函数：

$$C(x)=a+bx,$$

其中 a, b 为正的常数，a 为固定成本.

如果产品的单位售价为 p，销售量为 x，则总收入函数为

$$R(x)=px.$$

总利润等于总收入减去总成本，故总利润函数为(设产销平衡)

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

例 6　设某厂每天生产 x 件产品的总成本为 $C(x)=2.5x+300$ (单位：元)，假若每天至少能卖出 150 件产品，为了不亏本，单位售价至少应定为多少元？

解　为了不亏本，必须使每天售出的 150 件产品的总收入与总成本相等，设此时的价格为 p，则应有

$$150p=2.5\times150+300=675,$$

解得 $p=4.5$. 因此，为了不亏本，价格不能少于 4.5 元.

例 7　设某商店以每件 a 元的价格出售某种商品，但若顾客一次购买 50 件以上，则超出 50 件的部分以每件 $0.9a$ 元的优惠价出售，试将一次成交的销售收入 R 表示成销售量 x 的函数.

解　由题意可知，一次售 50 件以内的收入为

$$R(x)=ax\quad (0\leqslant x\leqslant 50),$$

而一次售出超过 50 件时，收入为

$$R(x)=50a+0.9a(x-50) \quad (x>50),$$

所以，一次成交的销售收入 R 是销售量 x 的分段函数

$$R(x)=\begin{cases} ax, & 0\leqslant x\leqslant 50, \\ 50a+0.9a(x-50), & x>50. \end{cases}$$

下面再来介绍需求律和供给律，它们是经济学研究中的基本规律.

一种商品的市场需求量 Q 与该商品的价格 p 密切相关，降价使需求量增加，涨价使需求量减少. 如果不考虑其他影响需求量的因素，需求量 Q 可以看成是价格 p 的一元函数，称为**需求函数**，记为

$$Q=Q(p).$$

需求函数 $Q(p)$ 为价格 p 的单调减少函数. 最简单、最常见的需求函数是线性需求函数

$$Q=a-bp.$$

其中 a, b 为正的常数，a 为价格为零时的最大需求量，a/b 为最大销售价格(这个价格下，需求量为零).

一种商品的市场供给量 S 也受商品价格 p 的制约. 价格高，将刺激生产者向市场提供更多的产品，使供给量增加；反之，价格低将使供给量减少. 所以，供给量 S 也是价格 p 的一元函数，称为**供给函数**，记为

$$S=S(p).$$

供给函数 $S(p)$ 为价格 p 的单调增加函数，最简单的供给函数为线性供给函数：

$$S=-c+dp,$$

其中 c, d 为正的常数.

使一种商品的市场需求量与供给量相等的价格，称为**均衡价格**，记为 p_0.

当市场价格 p 高于均衡价格 p_0 时，供给量将增加，而需求量则相应减少；反之，市场价格低于均衡价格时，供给量减少，而需求量增加. 市场价格的调节量是这样按照需求律和供给律来实现的. 如图 1.4 所示.

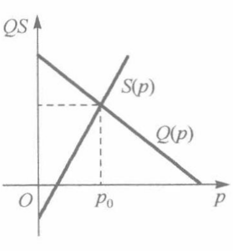

图 1.4

例 8 已知鸡蛋每千克 6 元，每月能收购 10000kg，若收购价每千克提高 0.2 元，则收购量可增加 1000kg，求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为

$$S=-c+dp,$$

其中 S 为收购量，p 为收购价格，由题意有

$$10000=-c+6d,$$
$$11000=-c+6.2d.$$

解得 $d=5000, c=20000$，从而所求供给函数为

$$S=-20000+5000p.$$

例 9　已知某商品需求函数和供给函数分别为

$$Q=14-1.5p,\quad S=-5+4p,$$

求该商品的均衡价格 p_0.

解　由供需均衡条件 $Q=S$，有

$$14-1.5p=-5+4p,$$

得均衡价格为

$$p_0=\frac{19}{5.5}\approx 3.45.$$

习　题　1.1

1．用区间表示下列不等式中 x 的取值范围.

(1) $|x-1|<0.2$；　(2) $0<|x-1|<5$；

(3) $|x|\geqslant 50$；　(4) $2<|x-2|<4$.

2．求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-x}\arcsin x$；　(4) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$.

3．求函数值.

(1) 设 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2),\ f(-2),\ f(0)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(1),\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\ f(-2),\ f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(3) 设 $f(x)=2x-3$，求 $f(a^2),\ [f(a)]^2$.

4．已知 $f(x)$ 是线性函数，即 $f(x)=ax+b$，且 $f(-1)=2,\ f(2)=-3$，求 $f(x)$，$f(5)$.

1.2　函数的几种特性与类型

1.2.1　函数的几种特性

在研究函数时，注意到函数的特性，将带来许多便利.

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，即当 $x\in X$ 时，必有 $-x\in X$，若对任何 $x\in X$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**；若对任何 $x\in X$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**.

由以上定义可知，偶函数的图形是关于 y 轴对称的，而奇函数的图形关于原点对称的. $y=x^2$，$y=\cos x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数，而 $y=x$，$y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

2. 函数的周期性

设

$$y=f(x),\quad x\in X,$$

如果存在常数 $T>0$，只要当 x，$x+T\in X$ 时，均有

$$f(x)=f(x+T),$$

则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，常数 T 称为它的**周期**. 例如，$y=\sin x$ 是以 2π 为周期的函数. 按周期的定义，常数 $4\pi,6\pi$ 也是 $y=\sin x$ 的周期，2π 是它的最小周期. 通常说某周期函数的周期，都是指它的最小正周期.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，如果对于 X 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_2)>f(x_1)),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上**单调增加**(**单调减少**).

在定义域上，单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**. 有时函数在其定义域上不是单调函数，但在定义域内的某个区间上是单调的，则此区间称为该函数的**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数，但它在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，在 $[0,+\infty)$ 上单调增加的，而 $y=x^3$ 在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，若存在常数 $M>0$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M, \quad \forall x\in X,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上是**有界的**，或者说 $f(x)$ 是 x 上**有界函数**，否则称 $f(x)$ 在 X 上是**无界的**.

例如，$y=\sin x$ 是有界函数，$y=\dfrac{1}{x}$ 是无界函数，但它在区间 $(0,+\infty)$ 上有下界，在区间 $(1,+\infty)$ 上有界.

1.2.2 函数的类型

下面介绍几种常见的函数类型.

1. 反函数

一般地，对于函数 $y=f(x)$，如果将 y 当成自变量，x 作为因变量，则由 $y=f(x)$ 确定的函数 $x=g(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的**反函数**. 习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 改记为 $y=g(x)$. 这样，$y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，中学已证明过，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.5).

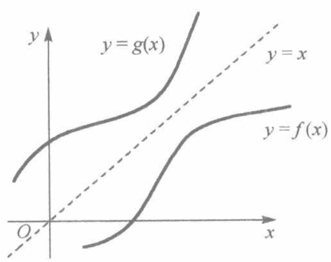

图 1.5

2. 隐函数

若变量 x, y 之间的函数关系是由一个含 x, y 的方程

$$F(x,y)=0$$

给定的，则说 y 是 x 的**隐函数**. 相应地，把由自变量的算式表示因变量的函数称为**显函数**.

例如，由方程 $2x+3y-1=0$, $xy=e^x-e^y$ 表示的函数都是隐函数；而 $y=\cos x$, $y=\ln(1+\sqrt{1-x^2})$ 都是显函数.

如果能从隐函数中将 y 解出来，就得到它的显函数形式. 例如，$x^2+y^2=1$ 的显函数形式为 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 注意，这里 $\forall x\in(-1,1)$，都有两个 y 与之对应，这不符合前面函数的定义，故不能称为函数. 但有时为了方便或其他目的，称此例所确定的变量关系为多值函数，满足前面定义的变量为单值函数. 本书所涉及的函数若无特别声明，都是单值函数.

3. 参数方程表示的函数

两个变量 x,y 之间的函数关系，有时是通过参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in T$$

给出的，这样的函数称为**参数式的函数**，t 称为**参数**，也称为**参变量**.

例如，隐函数 $x^2+y^2-a^2=0$ (圆)，即可表为显函数 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，又可以用参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t<2\pi$$

来表示.

习　题　1.2

1. 指出下列函数中的奇偶函数和周期函数.

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=2+\tan\pi x$；

(3) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(4) $y=3^{-x}(1+3^x)^2$.

2. 指出下列函数的单调区间及有界性.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=\arctan x$；

(3) $y=|x|-x$；　　(4) $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

3. 设 $y=f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=x$，试求当 $\pi\leqslant x<3\pi$ 时，函数 $f(x)$ 的表达式.