21世纪应用型本科院校规划教材

复变函数与积分变换

主　编　陈荣军　文传军

副主编　刘　坤　沈京一

许定亮　夏红卫

南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

复变函数与积分变换

主　编　陈荣军　文传军
副主编　刘　坤　沈京一
　　　　许定亮　夏红卫

南京大学出版社

内容简介

本书是为二本院校学生编写的理工科基础课“复变函数与积分变换”教材.

本书内容以“服务专业、实用易懂”为原则，简单易学，通俗简洁，包括复数与复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数和拉普拉斯变换等.

本书不强调理论的完整和系统性，不追求公式繁杂的证明，而关注于工科的应用和学生的计算能力的培养.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 陈荣军，文传军主编. -- 南京 ：南京大学出版社，2015.9

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978 - 7 - 305 - 15719 - 6

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①陈… ②文… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材 ②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 188449 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

丛 书 名　21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名　复变函数与积分变换
主　　编　陈荣军　文传军
责任编辑　吴　昊　单　宁　　　编辑热线　025 - 83596923

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　南京新洲印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张 8　字数 110 千
版　　次　2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 15719 - 6
定　　价　22.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前 言

本书是为二本院校学生编写的理工科基础课“复变函数与积分变换”教材.

复变函数与积分变换是高等院校一门重要的数学基础课程，是解决实际问题的强有力的工具.复变函数与积分变换起源于分析、力学、数学物理等理论与实际问题，具有鲜明的物理背景.复变函数与积分变换是电气工程及其自动化等专业的必修专业基础课，是学习“电路理论”“电机学”“信号与系统”等多门后继专业课的基础，在电力工程、通信和控制领域、信号分析和图像处理、语音识别与合成等领域中有着广泛的应用.

本书内容以“服务专业、实用易懂”为原则，简单易学，通俗简洁，本书不强调理论的完整和系统性，不追求公式繁杂的证明，而关注于工科的应用和学生易接受的计算能力的培养.本书的主要内容包括复数与复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数和拉普拉斯变换等.

如何在有限的教学学时内高效、有序、紧凑的完成教学任务，是我们一直思考的问题.为了达到这一目的，我们结合高等数学课程编写此书，将二者重复雷同的内容进行弱化或者删除，如复变函数平面点集部分、幂级数部分等，避免重复和无效的教学和学习.复杂的定理证明增加了学生学习的难度，且在专业应用中并不适用，因此对定理的证明过程进行了省略.同时为了增强学生

在专业中的应用能力,我们增加了该课程在实际问题中的应用性内容.

本书计划教学学时为30～32,课堂教学和自学使用时可根据需要选择章节使用.

本书由陈荣军、文传军担任主编,刘坤、沈京一、许定亮、夏红卫担任副主编,丁仲明、荆江燕参与校稿.由于编者水平有限,且时间紧迫,存在不如意之处,欢迎读者批评指正.

编 者

2015.6

目　录

第一章　复数与复变函数

复变函数中所研究的函数的自变量和因变量均为复数，需要对复数及复变函数进行学习.本章主要介绍了复数的概念、四则运算及三角表示式、平面点集、复变函数的概念、极限和连续性.

§1.1　复数

1.1.1　复数的概念

将形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x-\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 i 为**虚数单位**，且有 $\mathrm{i}^2=-1$；x,y 为任意实数，分别为 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z).$$

例如，复数 $z=3+\sqrt{2}\mathrm{i}$，其中，$\mathrm{Re}(z)=3$，$\mathrm{Im}(z)=\sqrt{2}$.

当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}0=x$ 为实数；当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=0+\mathrm{i}y=\mathrm{i}y$ 为**纯虚数**.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个复数.如果 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称 z_1 与 z_2 **相等**.很显然，若复数 $z=x+\mathrm{i}y=0$，当且仅当 $x=y=0$.需要注意的是，两个复数不能比较大小.

1.1.2　复数的四则运算

对任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，定义如下四则运算.

(1) 加、减法运算

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2).$$

(2) 乘法运算

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

(3) 除法运算

当 $z_2\neq 0$ 时,称满足 $z_2z=z_1$ 的复数 $z=x+iy$ 为 z_1 除以 z_2 的商,记作 $z=\frac{z_1}{z_2}$,从而有

$$\begin{aligned}(x_2+iy_2)(x+iy)&=x_1+iy_1\\&=(x_2x-y_2y)+i(x_2y+xy_2),\end{aligned}$$

根据复数相等的定义,得到

$$x_1=x_2x-y_2y,$$
$$y_1=x_2y+xy_2,$$

解得
$$x=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},y=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

则
$$z=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 1 计算$(4-3i)(5+6i)$.

解 $(4-3i)(5+6i)=[4\cdot 5-(-3)\cdot 6]+i[4\cdot 6+(-3)\cdot 5]=38+9i$.

例 2 计算 $z=\frac{1-2i}{2+3i}$.

解 $\frac{1-2i}{2+3i}=\frac{[1\cdot 2+(-2)\cdot 3]+i[2\cdot(-2)-1\cdot 3]}{2^2+3^2}=-\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i.$

(4) 四则运算的运算律

交换律:$z_1+z_2=z_2+z_1,z_1z_2=z_2z_1$;

结合律:$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;

分配律:$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

1.1.3 共轭复数

(1) 定义:把实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数,与 $z=x+iy$ 共轭的复数记作$\bar{z}=x-iy$.

（2）共轭复数的性质

设复数 z_1, z_2, z，对于共轭运算，有如下相关性质.

① $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$，$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；

② $\overline{(\bar{z})} = z$；

③ $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$；

④ $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$，$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})$.

（3）复数的模

设复数 $z = x + \mathrm{i}y$，则复数 z 的模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$，且 $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.

例 3　设任意两复数 z_1, z_2，证明 $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

证

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2.\end{aligned}$$

又 $z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2$，$z_2\bar{z}_2 = |z_2|^2$，$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$，所以有

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

同理可证 $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

复数的除法公式较为复杂，可以利用共轭复数的性质简化计算.

$$\begin{aligned}z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

例 4　利用共轭复数的方法计算 $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$.

解　$\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{(1-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \dfrac{(2-6)+(-4-3)\mathrm{i}}{13} = -\dfrac{4}{13} - \dfrac{7}{13}\mathrm{i}$.

例 5　设 $z_1=2-5\mathrm{i}, z_2=3+\mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解　直接利用除法运算法则也可以计算，但那样比较繁琐，可以利用共轭复数的方法计算.

为求 $\frac{z_1}{z_2}$，在分子分母同乘以 $\overline{z}_2$，再利用 $\mathrm{i}^2=-1$，得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{(2-5\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{|z_2|^2}=\frac{1-17\mathrm{i}}{10}=\frac{1}{10}-\frac{17}{10}\mathrm{i}.$$

§1.2　复数的三角表示

1.2.1　复平面、复数的模与幅角

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可唯一地对应一个有序实数对 (x,y)，而有序实数对又与二维坐标平面上的点一一对应. 因此，复数 z 的全体与坐标平面上的点的全体形成一一对应关系. 将坐标平面横轴上的点表示实数，纵轴上的点表示纯虚数，所建立的整个坐标平面则称为**复(数)平面**(图 1.1). 在点、数等同的观点下，复数与复平面上的点不加区别，一个复数集合即为一个平面点集. 例如，集合 $\{z\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$ 表示上半平面.

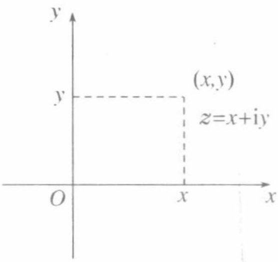

图 1.1

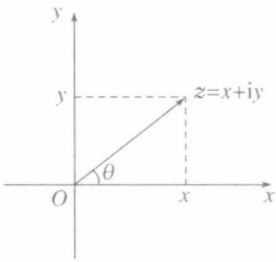

图 1.2

同时，复数还可以同平面向量一一对应，利用向量的平移不变性，将向量的起点放在坐标原点，终点为点 $z=x+\mathrm{i}y$，则此向量与向量的终点对应同一复数(图 1.2).

设复数 $z\neq0$，将其所对应向量的长度叫做 z 的**模**，即为 $|z|$；将其所对应向量的方向角 θ 叫做 z 的**幅角**. 很显然，z 的幅角有无穷多个，任意两幅角之间相差 2π 的整数倍. 采用记号 $\mathrm{Arg}\,z$ 作为 z 的幅角的一般表示，即 $\mathrm{Arg}\,z$ 可以不受限制地取 z 的幅角的任意值. 再用记号 $\arg z$ 表示 z 的**主幅角**，且有 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. 所以

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，此时 z 的幅角没有意义. 对于共轭复数，$|z|=|\overline{z}|$；当 $z\neq0$ 且不为负实数时，$\arg\overline{z}=-\arg z$；当 z 为负实数时，$\arg\overline{z}=\arg z=\pi$.

当 $z=x+\mathrm{i}y\neq0$ 时，它的实部、虚部和模、幅角之间的关系为

$$x=|z|\cos\mathrm{Arg}\,z,y=|z|\sin\mathrm{Arg}\,z,$$

由 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 可知

$$|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|.$$

结合高等数学向量代数知识，可以得到复数模的三角不等式，设复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则有

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

$\arg z\,(z\neq0)$ 与 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 之间的关系可归纳为：

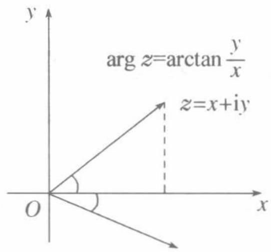

图 1.3a

当 $x>0$ 时，$\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}$；(图 1.3a)

当 $x<0$ 时，若 $y\geqslant0$，$\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}+\pi$；(图 1.3b)

若 $y<0$，$\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}-\pi$；(图 1.3c)

当 $x=0$ 时，若 $y>0$，$\arg z=\dfrac{\pi}{2}$；若 $y<0$，$\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$.

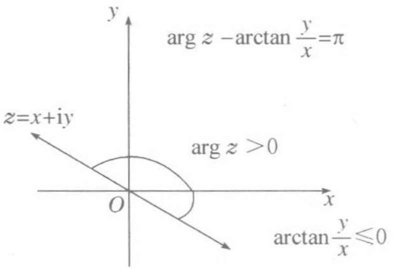

图 1.3b

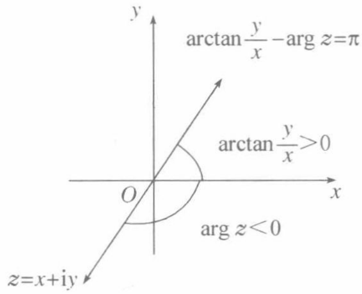

图 1.3c

例 1 求复数$\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$的模和主幅角.

解
$$\left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}\right|=\frac{2}{|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|}=\frac{2}{\sqrt{1+3}}=1,$$
$$\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{-2(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$
$$x=-\frac{1}{2}<0,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}>0,\ \arg z=\arctan\frac{y}{x}+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

1.2.2 复数的三角表示及指数表示

设复数 $z\neq0$,r 为 z 的模,θ 为 z 的任意一个幅角,则复数的**三角表示**为
$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,可得复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$的**指数表示**为
$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

一个复数的三角表示不是唯一的,因为复数的幅角有无穷多种选择.如果有两个三角表示相等:
$$r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$
则有
$$r_1=r_2,\ \theta_1=\theta_2+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

例 2 写出复数 $z=1+\mathrm{i}$ 的三角表示(图 1.4).

解　因为$|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，$\arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$，所以 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

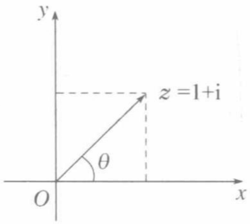

图 1.4

例 3　设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$r>0$，求复数$\bar{z}$及$\frac{1}{z}$的三角表示.

解　因为$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$，$|z|=r$，$\bar{z}=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$，

所以$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$.

例 4　求复数 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 的三角表示式与指数表示式.

解　显然，$r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+(-2)^2}=\sqrt{16}=4$.

$$\theta=\arg z=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

因此 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

因此 $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$ 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

1.2.3　利用复数的三角表示作乘除运算

利用复数的三角表示，可以给出复数乘法和除法的新解释和新运算.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)]\end{aligned}$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)],$$

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},$$

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|=r_1r_2,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2+2k\pi=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2,k\in\mathbf{Z}.$$

上式为多值相等,其含义表示等式左边的任意取值,都在右边集合中出现,反之亦然.

当 $z_2\neq0$ 时有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{r_1}{r_2},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2.$$

例 5 设 $z_1=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$,$z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$,试用三角形式表示 z_1z_2 及$\dfrac{z_1}{z_2}$.

解 $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,$z_2=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$,故

$$z_1z_2=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

1.2.4 复数的乘方与开方

对于复数的乘方,需要首先学习**棣莫弗公式**,如式(1)所示

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta, \tag{1}$$

对于复数 $z\neq0$,n 为正整数,z^n 表示 n 个 z 的乘积,设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

例 6 设$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{10}=x+(y-\sqrt{3})\mathrm{i}$,求实数 x 与 y.

解 由于$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$,

则$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{10}=2^{10}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi\right)=512-512\sqrt{3}\mathrm{i}$,

所以 $512-512\sqrt{3}\mathrm{i}=x+(y-\sqrt{3})\mathrm{i}$.

根据复数相等的条件得 $x=512, y=-511\sqrt{3}$.

例 7　求$(1+\mathrm{i})^8$.

解　$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$,故有

$$(1+\mathrm{i})^8=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=(\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{(8\times\frac{\pi}{4})\mathrm{i}}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=16.$$

对于开方而言,开方是乘方的逆运算,n 为正整数,z 的 n 次方根记作 $z^{\frac{1}{n}}$. 为了讨论其取值,设 $w=z^{\frac{1}{n}}$,即有 $w^n=z$.

当 $z=0$ 时,显然有 $w=0$. 当 $z\neq 0$ 时,给出 z,w 的三角表示以讨论二者的关系.

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$
$$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi).$$

由 $w^n=z$ 得

$$\rho^n=r, n\varphi=\theta+2k\pi, k\in\mathbf{Z}.$$

则有

$$\rho=\sqrt[n]{r}, \varphi=\frac{1}{n}(\theta+2k\pi), k\in\mathbf{Z}.$$

当 k 取值 $0,1,\cdots,n-1$ 时,得到 φ 的 n 个不同的值,且各值之间相差不是 2π 的整数倍. 所以开方 w 有 n 个不同的值,从而可表述为

$$w=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)\right], k=0,1,\cdots,n-1.$$

在复平面上,一个复数的 n 次方根所生成的 n 个值(根),形成以原点为中心,$\sqrt[n]{r}$为半径的圆的内接正 n 边形的顶点,顶点到原点的距离都为 $\sqrt[n]{|z|}$,其中一个点的幅角为$\frac{1}{n}\arg z$.

例 8　求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$的所有值.

解 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，所以有

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right],$$

$$=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right],k=0,1,2,3.$$

即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

§1.3 复变函数

1.3.1 平面点集、无穷大

平面点集是定义复变函数的基础，但有关平面点集的概念和定义已在先修课程高等数学中学习过，所以这里仅对所涉及的重复的概念作一个罗列，高等数学和复变函数中重复的平面点集概念有：邻域、开集、内点、外点、边界点、聚点、边界、有界集、无界集、区域、闭区域、有界区域、无界区域、单连通区域、复(多)连通区域等．这些概念出现在高等数学的二元函数及格林公式部分，同学们在学习时可参看相应知识点．

另外还有一些概念是复变数学所特有的：

设 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，$(a\leqslant t\leqslant b)$，如果 $x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)$ 和 $y(t)=\mathrm{Im}\,z(t)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则称点集 $\{z(t)\mid t\in[a,b]\}$ 为一条**连续曲线**.

如果对 $[a,b]$ 上任意不同两点 t_1 及 t_2，但不同时是 $[a,b]$ 的端点．若当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)=z(t_2)$ 称为曲线 C 的**重点**．没有重点的连续