

《复变函数论基础》

习题解答

沈燮昌 顾筱英



中央民族学院出版社

《复变函数论基础》

习 题 解 答

沈燮昌 顾筱英

中央民族学院出版社

1986年·北京

《复变函数论基础》习题解答

沈燮昌 顾筱英编

*

中央民族学院出版社出版

(北京白石桥路二十七号)

新华书店北京发行所发行

北京市太白楼印刷厂印刷

787×1092毫米 32开 13.75印张 337千字

1986年10月第1版 1986年10月第1次印刷

印数：1—15,000册

统一书号：7441·7

定价：3.20元

内 容 简 介

本书对北京大学沈燮昌教授编写的《复变函数论基础》(《大学基础数学自学丛书》之一)的全部习题作了完整的解答,有的还给出了两种解法,以帮助读者开阔思路。为便于读者复习、巩固复变函数论的基本概念和主要的定理、方法,本书在每一节的习题前都扼要地介绍了相应的内容。该书对于自学青年以及正在学习或重温复变函数论课程的大学生,均是一本理想的参考书。

序 言

自从大学基础数学丛书《复变函数论基础》1982年出版以来，得到了广大读者的欢迎，因此1984年和1986年又进行了第二次与第三次印刷。不少读者在自学过程中感到有些习题不会做，就是做了也不知道解题的过程是否正确，因此纷纷来信，要求给以解答。这样，我们在中央民族学院出版社的大力支持下，就出版了这本针对《复变函数论基础》一书的习题解答。

为了使读者能够掌握《复变函数论基础》一书中讲授的主要概念与一些主要的定理，我们在每一章每一节的开始，扼要地介绍了这一节的主要内容。这样，一方面能起到复习及巩固所学到的内容的作用，另一方面可以使读者进一步掌握这一节的基本概念与基本理论，这有利于着手解题。此外，对一些习题，我们还给出了两种解法，以便读者比较并开阔思路。

自学在时间上总比在学校里紧得多，困难也会更大些，但是只要同志们能够勤于思考，反复实践，在掌握书中一些基本概念、基本理论及基本技巧的基础上，努力做题，就一定能掌握书中的基本内容。这本习题解答正是为了帮助同志们更好地掌握书中基本内容而写的。我们相信，只要同志们能够循序渐进，持之以恒，勤思考，多实践，就一定能够掌握这一门课程。

沈冀昌 顾筱英

1986.7于北京大学

目 录

序言

第一章 复数

第一节 复数的概念	1
内容提要	1
习题1.1 解答	5
第二节 平面的点集及区域	12
内容提要	12
习题1.2 解答	14
第三节 序列与级数	26
内容提要	26
习题1.3 解答	30
第一章复习讨论题解答	35

第二章 解析函数

第一节 复变函数	54
内容提要	54
习题2.1 解答	57
第二节 解析函数的概念	61
内容提要	61
习题2.2 解答	62
第三节 柯西-黎曼方程	65
内容提要	65
习题2.3 解答	66

第四节	初等解析函数	75
	内容提要	75
	习题2.4 解答	79
第五节	调和函数	85
	内容提要	85
	习题2.5 解答	86
第二章	复习讨论题解答	90

第三章 解析函数的积分理论

第一节	复变函数的积分	121
	内容提要	121
	习题3.1 解答	123
第二节	解析函数的柯西定理	129
	内容提要	129
	习题3.2 解答	130
第三节	原函数与不定积分	132
	内容提要	132
	习题3.3 解答	133
第四节	解析函数的柯西公式	135
	内容提要	135
	习题3.4 解答	137
第五节	解析函数的最大模原理	142
	内容提要	143
	习题3.5 解答	143
第三章	复习讨论题解答	145

第四章 解析函数的级数展开

第一节	函数项级数及其基本性质	161
-----	-------------	-----

	内容提要·····	161
	习题4·1 解答·····	165
第二节	解析函数的泰勒级数展开·····	173
	内容提要·····	173
	习题4·2 解答·····	175
第三节	解析函数的罗朗展开式·····	184
	内容提要·····	184
	习题4·3解答·····	187
第四节	孤立奇点的分类及其性质·····	191
	内容提要·····	191
	习题4·4解答·····	194
第五节	整函数与亚纯函数的概念与性质·····	199
	内容提要·····	199
	习题4·5解答·····	200
第四章	复习讨论题解答·····	202

第五章 留数理论及其应用

第一节	留数定理及留数的求法·····	236
	内容提要·····	236
	习题5·1解答·····	238
第二节	利用解析函数的理论求定积分·····	243
	内容提要·····	243
	习题5·2解答·····	245
第三节	幅角原理及其应用·····	254
	内容提要·····	254
	习题5·3解答·····	255
第五章	复习讨论题解答·····	257

第六章 解析开拓

第一节	解析开拓的概念与方法	271
	内容提要	271
	习题6·1解答	274
第二节	完全解析函数与黎曼曲面	279
	内容提要	279
	习题6·2解答	281
第三节	利用多值函数进行积分计算	283
	内容提要	283
	习题6·3解答	284
	第六章复习讨论题解答	291

第七章 解析函数的几何理论

第一节	保形变换的概念及性质	301
	内容提要	301
	习题7·1解答	303
第二节	分式线性变换	307
	内容提要	307
	习题7·2解答	311
第三节	茹科夫斯基变换	332
	内容提要	332
	习题7·3解答	333
第四节	几个初等函数实现的变换	337
	内容提要	337
	习题7·4解答	341
第五节	利用对称原理及边界对应定理	

	进行单叶保形变换.....	350
	内容提要.....	350
	习题7.5解答	352
第六节	上半平面到多角形的保形变换.....	362
	内容提要.....	362
	习题7.6解答	363
第七节	黎曼存在及唯一性定理.....	370
	内容提要.....	370
	习题7.7解答	371
第七章	复习讨论题解答.....	373

第八章 拉普拉斯变换初步

第一节	含有参变量的积分.....	398
	内容提要.....	398
第二节	拉普拉斯变换的概念.....	399
	内容提要.....	399
	习题8.2解答	400
第三节	拉普拉斯变换的性质.....	401
	内容提要.....	401
	习题8.3解答	404
第四节	拉普拉斯变换的逆变换.....	405
	内容提要.....	405
	习题8.4解答	408
第五节	拉普拉斯变换公式表.....	410
	习题8.5解答	410
第六节	拉普拉斯变换在解微分方程中的应用.....	412
	内容提要.....	412

习题8-6解答	415
第八章复习讨论题解答	422

第一章 复数

第一节 复数的概念

1. 复数及其表示法

我们称形如 $x+iy$ 的数为**复数**，其中 x 与 y 都是实数， $i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位。若 $z=x+iy$ ，则 x 与 y 分别称为复数 z 的实部与虚部，记作

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z.$$

一个复数 z 对应且只对应着一对有序的实数 x 与 y ，记作 $z=(x, y)$ 。

复数的几何表示 在平面上取笛卡儿直角坐标系，其原点在 O 点，坐标轴为 Ox 与 Oy ，每一个复数 $z=(x, y)$ 在此直角坐标系中对应着一个点 P ，其横坐标为 x ，纵坐标为 y ；反之，此直角坐标系中每一个点 $P(x, y)$ ，对应着一个复数 $z=x+iy$ 。

复数的向量表示 可以用起点在原点 $O(0, 0)$ ，终点在点 $P(x, y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 $z=x+iy$ 。向量 $\overrightarrow{OP}$ 还可以看做自由向量，即对于任何向量，不管其起点与终点的位置如何，只要其长度及方向同 $\overrightarrow{OP}$ 一样，就可以看作与 $\overrightarrow{OP}$ 是同一个向量。反过来，对任意一个向量，将它的起点平移到原点，那么终点的横坐标 x 及纵坐标 y 就对应着一个复数 $z=x+iy$ 。

复数的极坐标表示 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+iy$ 的模, 记作

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 Ox 轴的夹角 θ 称为复数 z 的幅角, 记作

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

设幅角的一个值为 θ_0 , 可以取 θ_0 满足

$$0 \leq \theta_0 < 2\pi,$$

这样的 θ_0 称为 z 的主幅角, 记作 $\theta_0 = \arg z$. 显然有

$$\theta_0 = \theta_0 + 2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}),$$

且

$$\theta_0 = \arg z = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}, & \text{当 } z \text{ 在第一象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \pi, & \text{当 } z \text{ 在第二象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + \pi, & \text{当 } z \text{ 在第三象限;} \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{当 } z \text{ 在第四象限.} \end{cases}$$

z 的极坐标表示为:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

复数的三角表示式

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z| [\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)] \end{aligned}$$

复数的指数表示式

$$z = r e^{i\theta}$$

2. 复数的运算

1° **复数相等** 两个复数 $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$ 当且仅当 $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ 时认为相等: $z_1 = z_2$.

2° **复数的加法** 两个复数 $z_1 = x_1 + i y_1$ 与 $z_2 = x_2 + i y_2$ 的加法定义为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

复数相加与两个向量平行四边形法则相加是一样的.

3° **复数的减法** 作为加法的逆运算来定义,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

$z_1 - z_2$ 就是起点在 z_2 , 终点在 z_1 的向量.

4° **复数的乘法** 两个复数 $z_1 = x_1 + i y_1$ 与 $z_2 = x_2 + i y_2$ 的乘法定义为

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

可以把它看作是二个复数 z_1 与 z_2 的表示式用分配律进行乘法运算, 利用 $i^2 = -1$ 化简而得到的结果.

若 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

5° **复数的除法** 作为乘法的逆运算来定义,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

这也可以从

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

而得到.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

6° **复数的开方** $w = \sqrt[n]{z_0}$ 或 $w = z_0^{\frac{1}{n}}$ 表示求所有满足 $w^n = z_0$ 的复数 w . 设 $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\varphi}$, 则 $\rho = \sqrt[n]{r_0}$,

$\varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$ (k 是整数), 因此

$$w = \sqrt[n]{z_0} = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}, \quad k \text{ 是整数.}$$

实际上只有当 $k=0, 1, \dots, n-1$ 时得到的复数 w 是不同的, 因此 w 共有 n 个不同的值.

7° **共轭复数** 复数 $z = x + iy$ 的共轭复数定义为 $x - iy$. 记作 $\bar{z} = x - iy$, 因此

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z},$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad z_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3. 三角不等式

对任意两个复数 z_1, z_2 有

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

等号当且仅当 $z_1 = kz_2$ 时成立, 其中 $k > 0$, 这里认为 $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. 由此推出

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

及

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

习 题 1.1

1. 求下列复数的模与幅角, 并作图:

(1) $\sqrt{3} + i$; (2) $3 - 3\sqrt{3}i$;

(3) $-1 + \sqrt{3}i$; (4) $-1 - i$;

(5) bi , b 是实数;

(6) $a + bi$, a 与 b 是实数 ($a \neq 0$).

解: (1) 模 $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$,

幅角 $\arg z = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

(2) 模 $|z| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$,

幅角 $\arg z = 2\pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{-3\sqrt{3}} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.

(3) 模 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

幅角 $\arg z = \pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

(4) 模 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

幅角 $\arg z = \pi + \operatorname{tg}^{-1} \frac{-1}{-1} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$.

(5) 模 $|z| = \sqrt{b^2} = |b|$,

$$\text{幅角 } \arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b > 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & b < 0; \\ \text{没有值}, & b = 0. \end{cases}$$

(6) 模 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\text{幅角 } \arg z = \begin{cases} \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}, & \text{当 } a > 0, b > 0 \text{ 时}, \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a} + \pi, & \text{当 } a < 0, b > 0 \text{ 时}, \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a} + \pi, & \text{当 } a < 0, b < 0 \text{ 时}, \\ \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a} + 2\pi, & \text{当 } a > 0, b < 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } a > 0, b = 0 \text{ 时}, \\ \pi, & \text{当 } a < 0, b = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

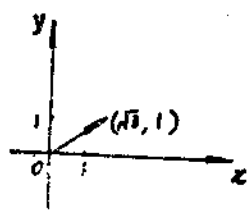


图1-1-1-(1)

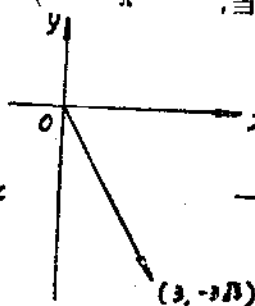


图1-1-1-(2)

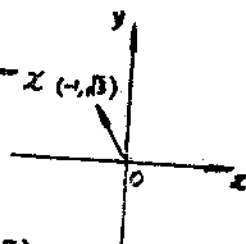


图1-1-1-(3)