《复变函数论基础》

习题解答

沈燮昌　顾筱英

中央民族学院出版社

《复变函数论基础》

习 题 解 答

沈燮昌　　顾筱英

中央民族学院出版社

1986年·北京

《复变函数论基础》习题解答

沈燮昌　顾筱英编

*

中央民族学院出版社出版
（北京白石桥路二十七号）
新华书店北京发行所发行
北京市大白楼印刷厂印刷
787×1092毫米　32开　13.75印张　337千字
1986年10月第1版　1986年10月第1次印刷
印数：1—15,000册
统一书号：7441·7　　　定价：3.20元

内 容 简 介

本书对北京大学沈燮昌教授编写的《复变函数论基础》(《大学基础数学自学丛书》之一)的全部习题作了完整的解答，有的还给出了两种解法，以帮助读者开阔思路. 为便于读者复习、巩固复变函数论的基本概念和主要的定理、方法，本书在每一节的习题前都扼要地介绍了相应的内容. 该书对于自学青年以及正在学习或重温复变函数论课程的大学生，均是一本理想的参考书.

序　　言

自从大学基础数学丛书《复变函数论基础》1982年出版以来，得到了广大读者的欢迎，因此1984年和1986年又进行了第二次与第三次印刷．不少读者在自学过程中感到有些习题不会做，就是做了也不知道解题的过程是否正确，因此纷纷来信，要求给以解答．这样，我们在中央民族学院出版社的大力支持下，就出版了这本针对《复变函数论基础》一书的习题解答．

为了使读者能够掌握《复变函数论基础》一书中讲授的主要概念与一些主要的定理，我们在每一章每一节的开始，扼要地介绍了这一节的主要内容．这样，一方面能起到复习及巩固所学到的内容的作用，另一方面可以使读者进一步掌握这一节的基本概念与基本理论，这有利于着手解题．此外，对一些习题，我们还给出了两种解法，以便读者比较并开阔思路．

自学在时间上总比在学校里紧得多，困难也会更大些，但是只要同志们能够勤于思考，反复实践，在掌握书中一些基本概念、基本理论及基本技巧的基础上，努力做题，就一定能掌握书中的基本内容．这本习题解答正是为了帮助同志们更好地掌握书中基本内容而写的．我们相信，只要同志们能够循序渐进，持之以恒，勤思考，多实践，就一定能够掌握这一门课程．

沈燮[illegible]　[illegible]筱英

1986.7于北京大学

目　录

第三章 解析函数的积分理论

第四章 解析函数的级数展开

第五章 留数理论及其应用

第六章 解析开拓

第七章 解析函数的几何理论

第八章　拉普拉斯变换初步

第一章　复　数

第一节　复数的概念

1.　复数及其表示法

我们称形如$x+iy$的数为**复数**，其中x与y都是实数，$i=\sqrt{-1}$称为虚数单位．若$z=x+iy$，则x与y分别称为复数z的实部与虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}z,\qquad y=\mathrm{Im}z.$$

一个复数z对应且只对应着一对有序的实数x与y，记作$z=(x,y)$．

复数的几何表示　在平面上取笛卡儿直角坐标系，其原点在O点，坐标轴为Ox与Oy，每一个复数$z=(x,y)$在此直角坐标系中对应着一个点P，其横坐标为x，纵坐标为y；反之，此直角坐标系中每一个点$P(x,y)$，对应着一个复数$z=x+iy$．

复数的向量表示　可以用起点在原点$O(0,0)$，终点在点$P(x,y)$的向量$\overrightarrow{OP}$表示复数$z=x+iy$．向量$\overrightarrow{OP}$还可以看做自由向量，即对于任何向量，不管其起点与终点的位置如何，只要其长度及方向同$\overrightarrow{OP}$一样，就可以看作与$\overrightarrow{OP}$是同一个向量．反过来，对任意一个向量，将它的起点平移到原点，那么终点的横坐标x及纵坐标y就对应着一个复数$z=x+iy$．

复数的极坐标表示 向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数$z=x+iy$的模，记作

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

向量$\overrightarrow{OP}$与Ox轴的夹角θ称为复数z的幅角，记作

$$\theta=\mathrm{Arg}z$$

设幅角的一个值为θ_0，可以取θ_0满足

$$0\leq\theta_0<2\pi,$$

这样的θ_0称为z的主幅角，记作$\theta_0=\arg z$. 显然有

$$\theta_0=\theta_0+2k\pi\quad(k\text{为任意整数}),$$

且

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第一象限};\\ \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当}z\text{在第二象限};\\ \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当}z\text{在第三象限};\\ \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}+2\pi, & \text{当}z\text{在第四象限}.\end{cases}$$

z的极坐标表示为：

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta.$$

复数的三角表示式

$$\begin{aligned}z=x+iy&=r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=|z|[\cos(\mathrm{Arg}z)+i\sin(\mathrm{Arg}z)]\end{aligned}$$

复数的指数表示式

$$z=re^{i\theta}$$

2. 复数的运算

1° **复数相等** 两个复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$当且仅当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$时认为相等：$z_1=z_2$.

2° **复数的加法** 两个复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的加法定义为

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

复数相加与两个向量平行四边形法则相加是一样的.

3° **复数的减法** 作为加法的逆运算来定义：

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

z_1-z_2就是起点在z_2，终点在z_1的向量.

4° **复数的乘法** 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$的乘法定义为

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

可以把它看作是两个复数z_1与z_2的表示式用分配律进行乘法运算，利用$i^2=-1$化简而得到的结果.

若$z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

5° **复数的除法** 作为乘法的逆运算来定义：

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

这也可以从

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

而得到.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

6° **复数的开方** $w=\sqrt[n]{z_0}$ 或 $w=z_0^{\frac{1}{n}}$ 表示求所有满足 $w^n=z_0$ 的复数 w. 设 $z_0=r_0e^{i\theta_0}$, $w=\rho e^{i\varphi}$, 则 $\rho=\sqrt[n]{r_0}$,

$\varphi=\frac{\theta_0+2k\pi}{n}$ （k是整数），因此

$$w=\sqrt[n]{z_0}=r_0^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \quad k\text{是整数}.$$

实际上只有当 $k=0$, $1\cdots$, $n-1$ 时得到的复数 w 是不同的，因此 w 共有 n 个不同的值.

7° **共轭复数** 复数 $z=x+iy$ 的共轭复数定义为 $x-iy$, 记作 $\bar{z}=x-iy$, 因此

$$|z|=|\bar{z}|, \qquad \text{Arg}z=-\text{Arg}\bar{z},$$

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2, \quad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\ \bar{z}_2, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

3. 三角不等式

对任意两个复数 z_1、z_2 有

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,$$

等号当且仅当$z_1=kz_2$时成立，其中$k>0$，这里认为$z_1\neq0$，$z_2\neq0$．由此推出

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

及

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

习　题 1·1

1．求下列复数的模与幅角，并作图：

(1) $\sqrt{3}+i$；　　(2) $3-3\sqrt{3}i$，

(3) $-1+\sqrt{3}i$；　(4) $-1-i$；

(5) bi，b是实数；

(6) $a+bi$，a与b是实数（$a\neq0$）．

解：　(1) 模 $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

幅角$\arg z=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$．

(2) 模 $|z|=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$，

幅角$\arg z=2\pi+\mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{-3\sqrt{3}}=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$．

(3) 模 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

幅角$\arg z=\pi+\mathrm{tg}^{1}\frac{\sqrt{3}}{-1}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$．

(4) 模 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，

幅角$\arg z=\pi+\mathrm{tg}^{-1}\frac{-1}{-1}=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi$。

(5) 模$|z|=\sqrt{b^2}=|b|$，

$$\text{幅角}\arg z=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & b>0;\\ \frac{3\pi}{2}, & b<0;\\ \text{没有值}, & b=0.\end{cases}$$

(6) 模$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$$\text{幅角}\arg z=\begin{cases}\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}, & \text{当}a>0,\ b>0\text{时};\\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}+\pi, & \text{当}a<0,\ b>0\text{时};\\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}+\pi, & \text{当}a<0,\ b<0\text{时};\\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}+2\pi, & \text{当}a>0,\ b<0\text{时};\\ 0, & \text{当}a>0,\ b=0\text{时};\\ \pi, & \text{当}a<0,\ b=0\text{时}.\end{cases}$$

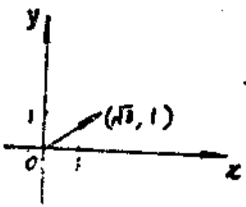

图1·1-1-(1)

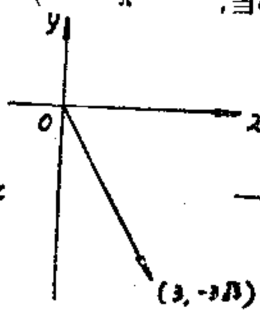

图1·1-1-(2)

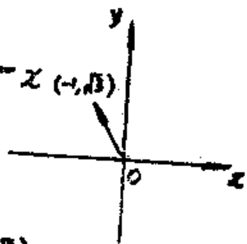

图1·1-1-(3)