全国高等院校测绘专业规划教材

免费赠送
PPT电子课件
及习题答案

误差理论与测量平差

主　编　夏春林
副主编　钱建国　张恒璟

- 吸纳同类教材精华，内容全面
- 精选习题，易学易用
- 规范标准，推陈出新

清华大学出版社

全国高等院校测绘专业规划教材

误差理论与测量平差

主　编　夏春林

副主编　钱建国　张恒璟

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书是编者汲取多部同类教材的优点并结合长期的教学实践经验编写而成的。全书以适应高校测绘类专业课程改革为目标，以经典测量平差为基本任务，同时又兼顾了近代平差的基础性内容，具有自身的独特风格，能够满足大多数高校测量平差课程的教学要求。

本书在编写过程中，注重了教学内容与测绘行业发展现状的衔接，弃旧纳新。编写风格上注意化难为易，既降低理论难度，又不缺失教学内容，并配有大量经典例题、课后习题及参考答案，以提升学生学习本课程的效率与效果。

本书适合作为普通高校本专科、成人教育和培训班的测量平差课程教材，也可供测绘类工程技术人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差/夏春林主编. --北京：清华大学出版社，2015
(全国高等院校测绘专业规划教材)
ISBN 978-7-302-38074-0

Ⅰ. ①误…　Ⅱ. ①夏…　Ⅲ. ①测量误差—高等学校—教材 ②测量平差—高等学校—教材　Ⅳ. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 221111 号

责任编辑：张丽娜
装帧设计：杨玉兰
责任校对：周剑云
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62791865
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：13.5　　**字　　数**：323 千字
版　　次：2015 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 1 月第1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：28.00 元

产品编号：058145-01

前　言

“测量平差”既是测绘学科重要的专业基础课，同时又是一门应用科学，是多个应用领域数据处理的基础。随着测量装备、测量方法的日新月异，三角网、测边网等一些传统控制测量方法已逐渐成为历史，GPS 网平差、近代平差等成为测量平差的重要内容。为了适应测绘行业的发展趋势与高校测绘类专业课程改革的需求，结合多年的教学与实践经验，我们编写了本书。

全书共分为 7 章。第 1 章为基础部分，包括观测误差、精度指标、广义传播律、系统误差传播和最小二乘原理等内容；第 2～4 章为核心部分，包括条件平差、间接平差及其综合模型等内容；第 5、6 章分别介绍了误差椭圆和统计假设检验在测量中的应用；第 7 章简要介绍了近代平差的基础内容，为后续学习打下基础。

本书在结构上强调系统性和基础性，加强测量平差基础的系统概念，力争在有限的学时内涵盖测量平差的经典原理与方法；选编内容上强调时代性与实用性，删去了与当前科学技术发展不相称的陈旧内容，保留了导线网等沿用方法的平差内容，适当补充了近代平差方法的基础知识；在学习与训练上注重计算机应用能力培养，把平差模型改造成容易编程实现的表达式，删除了手工计算的过程性表格；为配合教师教学与学生练习，各章都附有习题及参考答案；全书在表述方法上循序渐进，深入浅出，力求化难为易，适合学生自学与复习。

本书由 3 个院校联合编写。辽宁工程技术大学夏春林教授编写第 1 章的 1.1 节、1.7 节、1.8 节以及第 5 章，大连理工大学城市学院文晔老师编写第 1 章的 1.2～1.6 节，辽宁工程技术大学钱建国副教授编写第 1 章的 1.9 节、第 6 章和第 7 章，辽宁工程技术大学张恒璟讲师编写第 2 章和第 3 章，吉林建筑大学李伟东副教授编写第 4 章。全书由夏春林任主编，钱建国、张恒璟任副主编。

本书在编写过程中参阅了大量文献资料，引用了同类书刊的部分内容与算例，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中错误在所难免，恳请使用本书的广大师生与读者提出宝贵意见，以便再版时修正。

编　者

目　　录

第 1 章　误差与误差理论

【学习要点及目标】

- 了解误差来源、观测误差的分类及测量平差的任务;
- 熟悉偶然误差的统计性质;
- 熟悉衡量精度的指标;
- 熟悉协方差传播律及其应用;
- 熟悉权与定权的常用方法;
- 熟悉协因数与协因数传播律及其应用;
- 熟悉由真误差计算中误差及实际应用;
- 熟悉系统误差的传播及系统误差与偶然误差的联合传播;
- 熟悉参数估计与最小二乘估计的计算方法。

在测量工作中，观测的未知量一般是角度、距离和高差等。任何未知量，客观上总存在一个能反映其真正大小的数值，称为真值，而用仪器观测未知量获得的数值称为观测值。通常观测值不会等于真值，因为观测中不可避免地存在误差。例如，对某未知量重复观测两次以上，会发现观测值之间互有差异；观测一个平面三角形的 3 个内角，其和总是不等于理论值 180°。这都说明观测误差普遍存在。测量平差就是以包含误差的观测数据为研究对象，利用所含误差的自身规律，采取一定的数学手段消除或减弱其影响，从而得到未知量的最优估值(也称为最或然值)。本章从观测误差的统计规律入手，引出测量中常用的“精度”概念，推演出观测误差传播的基本定律——广义传播律，介绍其在测量中的典型应用实例，同时给出权的定义以及常用的定权方法。

1.1　观测误差与测量平差的任务

1.1.1　误差来源

既然观测误差不可避免，那么是什么原因使观测误差不可避免呢？产生观测误差的原因很多，其来源可以概括为以下 3 个方面。

1. 测量仪器

测量工作总是要借助测量仪器。由于每种仪器都具有某一限定的精密程度，不可能绝对准确，从而使观测值的精度受到一定的限制。例如，丈量长度的各种尺子，其刻划的格值都含有误差，所标注的长度并不是真长，因此用这些尺子量得的长度就不会是真长。又如，水

准仪的视准轴不平行于水准轴时，在水准尺上的读数就会产生误差，而且这个误差将随着水准仪与水准尺间距离的增大而增大。同样，经纬仪、全站仪、GPS 接收机、遥感传感器等仪器本身的缺陷，也会使测量结果产生误差。

2. 观测者

由于人的感知鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也将直接影响观测成果质量。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果产生直接影响。同时，随着以上条件的变化，它们对观测结果的影响也随之改变。因而，在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误差。

上述测量仪器、观测者、外界条件 3 个方面的因素是引起误差的主要来源。这 3 方面的因素综合起来称为观测条件。不难想象，观测条件的好坏与观测质量有着密切的关系：观测条件较好，则观测成果的误差小，即质量高，反之质量低；观测条件相同，则观测成果的质量也相同。也就是说，观测条件的优劣决定了观测成果质量的高低，而观测质量也客观反映了观测条件的好坏。因此，测量工作者要尽可能地克服不利因素，创造有利条件，确保观测成果质量达到所要求的标准。

1.1.2 观测误差的分类

根据观测误差对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差、偶然误差和粗差 3 类。

1. 系统误差

在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或按一定的规律变化，或为某一常数，那么这种误差就称为系统误差。

例如，使用具有一定尺长误差的钢尺量距时，由尺长误差所引起的距离误差会与所测距离成正比，因此距离越长，所积累的误差也越大；经纬仪因校正或安置的不完善而导致的轴系误差会使所测角误差产生规律性变化等，这些都是由于仪器误差而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与钢尺检定时的温度不一致，而使所测的距离产生规律性误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等，都是由于外界条件所引起的系统误差。此外，有的观测者在照准目标时，总是习惯地把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，这是由观测者引起的系统误差。

系统误差一般具有累积的效应，对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或者减弱其对观测成果的影响，达到可以忽略不计的程度。一种方法是利用科学的操作程序予以消除。例如，在进行水准测量时，使前后视距相等，以消除视准轴与水准轴不平行所引起的观测高差的系统误差。另一种方法是利用公式进行改正。如对量距用的钢尺预先进行检定，得到尺长误差的大小，然后对所量的距离进行尺长改正，以消除由尺长误差引起的系统误差。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下作一系列观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，服从一定的统计规律，那么这种误差就称为偶然误差。

例如，用经纬仪测角时，观测值的误差是由仪器误差、照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差等综合影响的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然因素所引起的小误差的代数和。例如，照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动、风力风向的变化等偶然因素所产生的小误差的代数和，而每项小误差又随着偶然因素的变化而不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负。这样，由它们所构成的测角误差的总和，无论大小还是符号都是随机性的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差或随机误差。可见，偶然误差是无法使用消除系统误差的方法来消除的。

顺便说明，根据概率统计理论，一组偶然误差作为随机变量，具有一定的统计规律，就其总体而言是服从或近似服从正态分布的。

3. 粗差

粗差是一种大数量级的误差，严格来说是一种错误。含有粗差的观测值不能采用，一旦发现，该观测值必须舍弃或重测。

粗差产生的原因较多，主要是作业人员疏忽大意或失职而造成的，如大数被读错、读数被记错、照准了错误的目标等。

在观测中必须避免出现粗差。行之有效地发现和防范粗差的方法有：①进行必要的重复观测，即多余观测；②采用必要而又严格的检核、验算方式；③遵守国家测绘管理机构制定的各类测量规范和细则，一般也能起到防范粗差的作用。

1.1.3　测量平差的任务

系统误差和偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要或可以忽略的地位，观测误差总体上就呈现出系统的性质；反之，则呈现出偶然的性质。当观测列中已经消除了系统误差，或其残余与偶然误差相比已处于次要地位，则该观测列中主要是存在着偶然误差，这样的观测结果与偶然误差便都是一些随机变量。如何处理这些随机变量，是测量平差所要研究的基础内容，一般认为属于“经典测量平差”的范畴。因此，参与经典平差的观测值必须是事先消除了系统误差、只带有偶然误差的观测值。

为了得到一个量的大小，仅测量一次就够了，也就不需要进行平差处理。但这样做是很危险的，因为不知道误差有多大，甚至有无粗差也未可知。因此在实际工作中，为了及时发现粗差，同时也为提高成果质量，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。如对一条导线边，总是要丈量两次或多次后取平均值作为最后长度。此时偶然误差的影响得到削弱，既防止了粗差又提高了精度。对某未知量的多个观测值取平均值就是一种最简单的平差方法。再如一个平面三角形，尽管观测其中两个内角即可决定它的形状，但通常要求观测 3 个内角，其和一般不等于理论值 180° ，产生不符值，从而暴露误差的大小。总之，通过多余观测，必然会发现观测结果之间的不一致或不符合应有关系而产生的不符值。

然后，对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，得到观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一项基本任务。测量平差的另一项任务就是评定观测值及其函数值的最可靠结果的精度，也就是考核测量成果的质量。人们把以上数据处理的整个过程叫作“测量平差”。概括来讲，测量平差有两大任务：一是通过数据处理求未知量的最优估值；二是评定最优估值的精度。

如果观测值中除偶然误差外，还包含系统误差甚至粗差，这时的数据处理相对来说较为复杂，一般认为属于“近代测量平差”的范畴。在设法消除系统误差、粗差影响的条件下，其基本任务仍是求未知量的最优估值和评定其精度。

1.2 偶然误差的统计性质

由于测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最可靠值，并评定测量成果的精度。因此，解决平差任务的关键问题在于深入研究偶然误差的理论，摸索出偶然误差对观测值的影响趋势及程度(规律)。通过单个偶然误差的大小和符号无法找出相应的规律，呈现偶然性，但就大量的偶然误差来看却是具有一定的统计规律，因此偶然误差被定义为一种随机变量，不难得出，带有偶然误差的观测值也同属于随机变量的范畴，那么有关随机变量的统计学原理也就同样适用于带有偶然误差的观测量的相关研究。

任何一个观测量，客观上总是存在一个能代表其真正大小的数值，这一数值称为该观测值的真值。从概率论与数理统计的观点看，当观测量仅含偶然误差时，其数学期望就是它的真值。

设进行了 n 次观测，得观测值 $L_1, L_2, \cdots, L_n$。假定观测量的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n$，因为各个观测值中都不可避免地带有一定误差，因此导致了观测值 L_i 与其真值 $\tilde{L}_i$ 或 $E(L_i)$ 不等，必然存在差值，即

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i, \tag{1-1}$$

式中，Δ_i 为真误差，简称误差。若记

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\tilde{\boldsymbol{L}}} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} \qquad \underset{n\times 1}{\boldsymbol{\Delta}} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$$

则矩阵形式有

$$\boldsymbol{\Delta} = \tilde{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L} \tag{1-2}$$

如果以观测量的数学期望

$$E(\boldsymbol{L}) = [E(\boldsymbol{L}_1) \quad E(\boldsymbol{L}_2) \ \cdots \ E(\boldsymbol{L}_n)]^{\mathrm{T}}$$

表示其真值，则

$$\left.\begin{aligned} E(\boldsymbol{L}) &= \tilde{\boldsymbol{L}} \\ \boldsymbol{\Delta} &= E(\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{L} \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

在这里，观测值中不含系统误差，Δ 仅仅是指偶然误差。

偶然误差 Δ 的统计规律究竟如何呢？在大部分情况下，这种统计规律可以用正态分布进行描述。而且无数的测量实践也表明，在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布确实表现出一定的统计规律性。

这种统计规律性可以从一些实例中分析得出。

某测区，在相同的观测条件下，独立地观测了 358 个三角形的全部内角，求得 358 个三角形的闭合差。由于观测值不可避免地存在误差，每个三角形内角观测值之和 $(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)$ ($i=1,2,\cdots,358$)一般与其真值 180° 不等，差值为

$$\Delta_i = 180^\circ - (\alpha_i+\beta_i+\gamma_i) \quad i=1,2,\cdots,358$$

式中，Δ_i 为三角形内角和闭合差，也就是三角形内角和的真误差。

为了清晰观察偶然误差的分布情况，现将误差出现的范围按 $d\Delta=0.20''$ 的间隔，分为若干个相等的小区间，将这一组误差按其正负号与绝对值的大小，分别统计其出现在某区间内的个数 v_i，以及误差出现在某区间内的频率 v_i/n (此处 n=358)，列于表 1-1 中。

表 1-1　某测区 358 个真误差分布情况

误差区间 $I('')$	Δ 为负值			Δ 为正值			备　注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	$d\Delta=0.20''$；等于区间左端值的误差算入该区间内
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	181	0.505		177	0.495		

从表 1-1 中可以明显看出，该组误差的分布有以下规律。

(1) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的个数多。

(2) 绝对值相等的正、负误差出现的个数相近。

(3) 误差的绝对值超过 1.60″ 的个数为 0，也就是说，其不会超过一定的限值。

可以想象，在相同的观测条件下，若得到更多的三角形内角观测值，如果数量足够多，各区间内误差个数会相应增加，但各区间内误差的频率会相对稳定，停留在某一常数即理论频率附近。而且个数越多，频率越稳定，变动的幅度也越小。就如同大家都熟知的“抛硬币”游戏，当抛的次数较少时，正、反面出现的频率并非都是 0.5，随着游戏次数的无限增多，正、反面出现的频率就逐步稳定于 0.5 附近。所以当 $n \to \infty$ 时，各个频率就趋近于一个确定的数值，代表的就是误差出现在该区间内的概率。这就说明，在相同观测条件下得到的观测值或误差，对应着一种确定的误差分布。

为了便于对误差分布进行分析和比较，列出另一测区 421 个等精度独立观测三角形内角和的真误差，按上述方法作了统计，列于表 1-2 中。

表 1-2　另一测区 421 个真误差分布情况

误差区间 /(″)	Δ为负值			Δ为正值			备　注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	
0.20～0.40	34	0.081	0.450	36	0.085	0.425	
0.40～0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60～0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80～1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00～1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20～1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	$d\Delta=0.20''$；等于区间左端值的误差算入该区间内
1.40～1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60～1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80～2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00～2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20～2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40～2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	210	0.499		211	0.501		

表 1-2 中所列的数值，尽管其观测条件不同于表 1-1，但同样可以看出，二者具有十分相似的分布特点。因而，表 1-2 中的误差分布情况与表 1-1 中的误差分布情况具有本质上的相同。

描述偶然误差的分布情况，除了采用如表 1-1、表 1-2 所列的误差分布表的形式外，还能够采用其他方式进行形象的表达。譬如利用数理统计里的直方图来表达，以真误差出现的区间作为横坐标，间隔 $d\Delta=0.2''$，以各区间内误差出现的频率与区间间隔的比值作为纵坐标，即 $f(\Delta)=\dfrac{v_i/n}{d\Delta}$，分别根据表 1-1 和表 1-2 中的数据绘制出直方图，即图 1-1 和图 1-2。

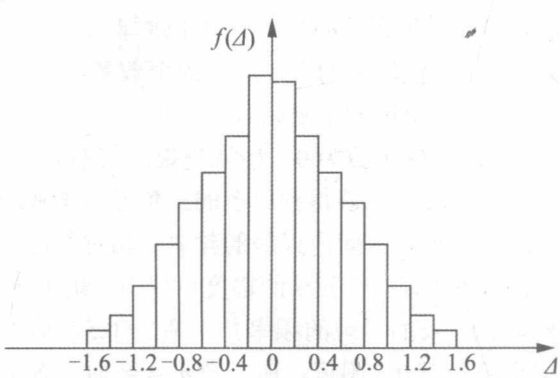

图 1-1　表 1-1 的误差分布直方图

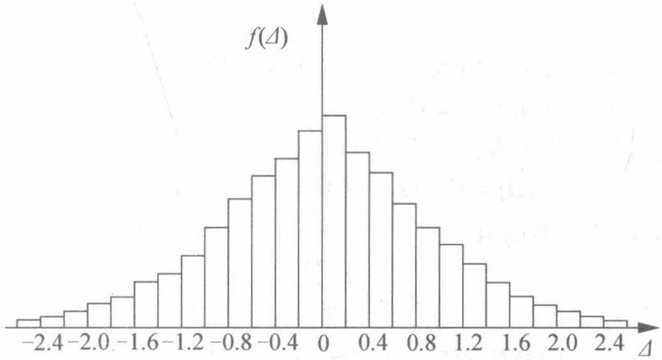

图 1-2　表 1-2 的误差分布直方图

直方图中每个长方条的面积为 $f(\Delta)\mathrm{d}\Delta=\dfrac{v_i}{n}$，即每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。那么直方图可以表达出什么样的信息呢？

(1) 较小误差的长方形较高，面积较大，即出现的频率较大；反之，较大误差的长方形较矮，面积较小，即出现的频率较小。

(2) 同时所有长方形基本上对称于纵轴，说明绝对值相等的正、负误差出现的个数接近。

(3) 大于一定数值的误差区间的长方形不存在，即出现的频率为 0。

因此，直方图非常直观地描述了如前所述的偶然误差分布特性。之前已经提及，在 $n\to\infty$ 的情况下，误差出现的频率都已趋于完全稳定。若将误差区间的间隔无限缩小，不难想象出来，图 1-1 及图 1-2 就会成为两条光滑的曲线，如图 1-3 所示，此类曲线称为误差的概率分布曲线或误差分布曲线，曲线所对应的函数则被称为概率密度函数。

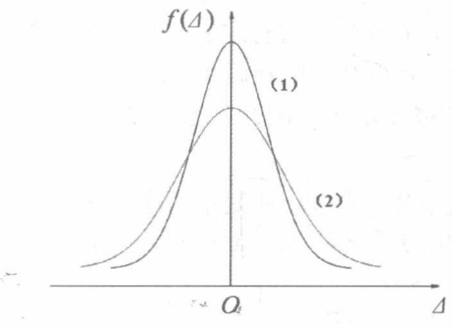

图 1-3　误差分布曲线

由于图 1-1、图 1-2 描述的是偶然误差的频率分布，通常称为经验分布。随着 n 的逐渐增大，经验分布的极限称为理论分布，而偶然误差的频率分布最终都是以正态分布为极限的，因此正态分布称为其理论分布。根据概率论的中心极限定理，大多数测量误差都服从正态分布，这就为偶然误差的理论研究提供了可操作的数学模型，不仅可以带来研究上的便利，同时也比较符合实际情况。

根据正态分布的特点，可以进一步采用概率术语进行归纳，将偶然误差的几个特性做以下几点概括。

(1) 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，

其出现的概率为零。

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

(3) 绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。

(4) 偶然误差的数学期望为零。根据式(1-3)有

$$E(\varDelta)=E(E(\boldsymbol{L})-\boldsymbol{L})=E(\boldsymbol{L})-E(\boldsymbol{L})=0 \tag{1-4}$$

由于数学期望的含义就是概率均值，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\varDelta]}{n}=0$$

在本书中，采用[]表示一系列数值的代数和，与代数中的$\sum_{i=1}^{n}$符号同义。

对于观测而言，不论其观测条件如何，也不论是对同一个量或是对不同的量进行观测，只要是在相同的观测条件下进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述 4 个特性。

在直方图的描述过程中，长方条的面积即为误差出现在该区间内的频率。若将这个问题提升至理论层次进行阐述，以理论分布(图 1-3)取代经验分布，则纵坐标值就是$\varDelta$的概率密度函数$f(\varDelta)$，而长方条的面积为误差出现在该区间内的概率$P(\varDelta)$，即

$$P(\varDelta)=f(\varDelta)\mathrm{d}\varDelta \tag{1-5}$$

根据数理统计知识，服从正态分布的随机变量$\boldsymbol{X}$的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty<x<+\infty \tag{1-6}$$

式中，μ为$\boldsymbol{X}$的数学期望；σ为$\boldsymbol{X}$的标准差，在测量工作中则称为中误差。当x服从参数为(μ,σ^2)的正态分布(也称高斯分布)时，记为$x\sim N(\mu,\sigma^2)$。

正态分布中的μ、σ两个参数有着决定曲线位置和形状的至关重要的作用。若σ固定不变，μ变化，则曲线形状不变，在x轴上进行左右平移，即参数μ决定了曲线的中心位置，称为位置参数；若μ固定不变，σ变化，则σ越小，函数$f(x)$的最大值则越大，即曲线越发陡峭，意味着x落在μ附近的概率增大，因此参数σ是反映随机变量$\boldsymbol{X}$取值的分散程度的参数。

顾及式(1-4)，对于误差概率分布曲线，曲线是以横坐标为O处的纵轴为对称轴，可以得出位置参数$\mu=0$，就可以写出随机变量$\varDelta$的概率密度式为

$$f(\varDelta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\varDelta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-7}$$

当参数σ确定后，即可画出所对应的误差分布曲线。当σ不同时，曲线的位置不变，但其形状将会做相应的改变，也就意味着不同的σ对应着不同形状的分布曲线，σ越大，$f(\varDelta)$越小，曲线越平缓；σ越小，$f(\varDelta)$越大，曲线越陡峭，如图 1-3 中两条不同的曲线所示。因此，偶然误差$\varDelta$是服从$N(0,\sigma^2)$分布的随机变量。

正态分布曲线都具有两个拐点(图 1-4)，对于变量$\boldsymbol{X}$，设$E(\boldsymbol{X})=\mu$为$\boldsymbol{X}$的数学期望，则正态分布曲线的拐点在横轴上的坐标为

$$x_{拐}=E(\boldsymbol{X})\pm\sigma=\mu\pm\sigma \tag{1-8}$$

对于偶然误差$\boldsymbol{\varDelta}$而言，其数学期望$E(\varDelta)=\mu=0$，那么拐点在横轴上的坐标即为

$$\Delta_{拐} = \pm\sigma \tag{1-9}$$

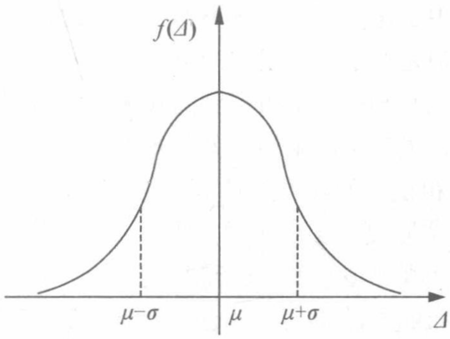

图 1-4 正态分布曲线

1.3 衡量精度的指标

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。首先给出精度的概念，在相同的观测条件下，对相同的观测对象进行多次观测，其观测结果之间的符合程度称为精度，表现为误差的密集及分散的程度。

为了能够更深刻地理解和阐述精度的含义，现深入分析上节中的两个实例。

观察表 1-1 及表 1-2 内的数据，可以发现表 1-1 中数值小的误差要相对多一些。经过合并计算，误差出现于−0.60″～+0.60″区间内的频率为 0.665，绝对值大于 0.6″的误差为 1−0.665=0.335，即相对应地各占总数的 66.5%、33.5%。同样对表 1-2 进行合并计算，误差出现于−0.60″～+0.60″区间内的频率为 0.492，绝对值大于 0.6″的误差频率为 1−0.492=0.508，即各占总数的 49.2%、50.8%。

不难看出，表 1-1 中数值小的误差要相对多一些的含义就是其误差更集中在零的附近，即更接近其理论均值。也就意味着误差分布密集，离散程度小，表明该组观测值精度相对较高。再观察表 1-2，误差分布较表 1-1 相对离散，表明该组观测值较表 1-1 精度相对较低。

继续利用直方图分析上节的两个实例，将二者的直方图(图 1-1 和图 1-2)进行对比后不难看出，图 1-1 中图形陡峭，在纵轴附近的峰值较高，说明在此观测条件下，小误差出现的频率较大；图 1-2 中图形相对平缓，在纵轴附近的峰值相对偏低，说明在另一种观测条件下，误差较为分散。

那么从误差分布曲线中能分析出什么？我们知道，误差分布曲线是以直方图为统计基础的，可以想象，观测值数目 $n \to \infty$ 的情况下，误差出现的频率趋于完全稳定，误差区间的间隔也无限缩小，直方图就相应地变成了光滑曲线。

因此，上述的直方图反映精度大小的性质同样反映在误差分布曲线的形态上，即图 1-3 中的误差分布曲线(1)高而陡峭，而曲线(2)则低而平缓。说明相对于第二种观测条件，第一种观测条件下的观测数据质量相对较好，精度高，离散程度小。

综上所述，表示观测值误差分布的密集或离散程度的指标称为精度。在相同的观测条件

下进行一组观测，得到的一组观测值的质量可以用精度进行衡量，离散度越小，图形越陡峭，精度越高，观测质量越好。由于是在同一观测条件下，因此它们对应着同一种误差分布，虽然观测值的误差大小不等，但是对于这一组中的每一个观测值，精度都是相同的，把它们称为同精度观测值；反之，不同观测条件下所得到的观测值称为不等精度观测值。

比较观测值的精度高低，虽然可以采用误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法，但是这些方法都存在粗糙、间隔不好选取、比较相近的两个误差分属于不同区间(如0.20 和 0.21)的缺点，这对于实际测量工作来说太烦琐且耗时，操作起来也比较困难，所以要寻找简单、有效的方法来反映观测值精度，就需要找到能够衡量精度的数字特征。这些数字特征可以直观地反映误差分布的离散度大小，也就是能够简单明了地比较观测精度的高低，称这些数字特征为衡量精度的指标。下面介绍几种常用的精度指标。

1.3.1　方差和中误差

在数理统计中，衡量随机变量 $\boldsymbol{X}$ 的离散程度是用 $E[|\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})|]$ 来度量的，但如果依据此式进行离散程度运算，则会因为式中有绝对值的存在而产生困难。因此在测量的数据处理中，通常用 $E\{[\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})]^2\}$ 来度量随机变量与其均值的偏离程度，称其为方差，即

$$D(\boldsymbol{X})=\sigma^2=E\{[\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X})]^2\}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\boldsymbol{X}-E(\boldsymbol{X}))^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{1-10}$$

式中，σ^2 为误差分布的方差；$f(x)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布密度函数。

这里所研究的对象是偶然误差 Δ，它也是随机变量，且服从正态分布，其概率密度为(1-7)式，即

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

由方差定义式(1-10)，并考虑 $E(\boldsymbol{\Delta})=0$，则得偶然误差 $\boldsymbol{\Delta}$ 的方差表达式为

$$\sigma^2=D(\boldsymbol{\Delta})=E(\boldsymbol{\Delta}^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\Delta}^2 f(\boldsymbol{\Delta})\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta} \tag{1-11}$$

方差为真误差平方 $\boldsymbol{\Delta}^2$ 的数学期望。式(1-11)可以写成

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{\Delta}_i^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\boldsymbol{\Delta\Delta}]}{n} \tag{1-12}$$

中误差就是方差开方所得，即

$$\sigma=\sqrt{E(\boldsymbol{\Delta}^2)} \tag{1-13}$$

或者写成

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\boldsymbol{\Delta\Delta}]}{n}} \tag{1-14}$$

可以看出，上述方差和中误差的定义式，都是在理想情况下定义的，方差 σ^2 和中误差 σ 分别为 $\frac{[\boldsymbol{\Delta\Delta}]}{n}$ 和 $\sqrt{\frac{[\boldsymbol{\Delta\Delta}]}{n}}$ 的极限值，即当 n 充分大时的理论数值。但在实际计算中，n 总是一个有限值，这意味着，由有限个真误差只能求得方差和中误差的估值。

通常，用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表征方差 σ^2 和中误差 σ 的估值，即