计算方法丛书

椭圆边值问题的边界元分析

祝家麟 著

科学出版社

计算方法丛书

椭圆边值问题的边界元分析

祝家麟 著

科学出版社

1991

内 容 简 介

本书论述了求解椭圆型偏微分方程的边界元方法，系统地介绍了把边值问题归化为边界积分方程的各种途径，以及离散化求解边界积分方程的数值方法.书中还介绍了在Соболев 空间中利用边界积分方程的变分形式分析边界元近似解的收敛性和误差的方法，并且简要地讲述了必备的基础知识.

本书可供高校与数值计算有关的专业的师生参考，也可供从事数值计算的工程技术人员参考.

计算方法丛书

椭圆边值问题的边界元分析

祝家麟 著

责任编辑 张启男 林 鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年5月第一版 开本：850×1168 1/32

1991年5月第一次印刷 印张：8 7/8

印数：0001—1730 字数：228 000

ISBN 7-03-002223-8/O·418

定价： 9.90 元

序　言

工程、物理问题的数学模型一般有几种不同的形式，它可以直接表示成偏微分方程的形式，也可表现为区域上的变分形式，或者归结为边界上的某个积分方程的形式．这些不同的数学形式在理论上是等价的，但在实践中不等效，它们分别导致有限差分法、有限单元法和边界元方法等不同的数值方法．

我们称之为边界元的方法是在经典的积分方程法和有限元法的基础上发展起来的一种求偏微分方程的数值解的计算方法．由于它在几何上的广泛适应性，输入数据的简单性以及在数值上的准确性，这种方法已广泛地应用于各种工程技术问题以及不同学科领域里的数值计算，并且成为一种重要的工程计算方法．

把边值问题的解用积分形式来表示的这种思想的产生于 100 年前，例如 Helmholtz (1859)，Kirchhoff (1882)，Rayleigh (1887)，Fredholm (1905)．但把积分方程应用于数值计算，却是在这个世纪60年代开始的，例如 Friedman 和 Shaw (1962)，Jaswon (1963)，Symm (1963) 等，这与电子计算机的迅速发展和广泛使用密切相关，也与近代数学理论的迅速发展密切相关．这些工作使我们能够克服由于积分方程的奇异性所造成的在分析上和数值上的困难．

从 1978 年在英国 Southampton 召开第一届边界元方法国际会议到1988年 9 月又在同一地点召开第十届边界元方法国际会议的 10 年期间，边界元方法已经有了很大的发展．它不仅成功地应用于求解线性边值问题，而且在用于解决非线性、非定常问题上也有了重要的进展．但总的说来，由于边界元方法变异甚多，涉及面广泛，理论上的研究仍然落后于应用研究．虽然目前国内外已有了一些边界元法的专著，但都着重于方法和应用的介绍，缺少系统

地介绍边界元方法的数学分析的著作.

本书是作者在 1983 年所编写的四川省计算数学分会主办的暑期边界元法讲习班讲义的基础上补充修改而成的. 要在本书中全面地叙述边界元方法产生以来的丰硕成果是不可能的. 因而作者没有把兴趣放在介绍边界元法技术上与应用上的进展上去，而是立足于介绍边界元方法的数学基础，以便使本书为读者的深入研究起一个打基础和引导的作用.

把边值问题归化为边界积分方程的途径多种多样. 我们可以从同一边值问题得到几个不同形式的边界积分方程. 由于边界归化的方式不同,得到的边界积分方程会具有不同的特点,因而也使得求解这些方程的离散化方法有所不同. 此外，边界单元的构成也存在多种选择，收敛性和误差分析也有基于强制性变分形式或基于拟微分算子方程这两种不同的理论系统. 尽管这些不同的形式之间存在内在的联系,但毕竟存在差异. 因而,目前对边界元方法的研究角度,所走的途径,以及具体的技巧，无论是解析上的或数值方法上的差异都很大. 本书希望用一种统一的方式来描述这些不同的边界元形式，但也仅能做到从一条主线出发给其它的形式以适当的解释和引述. 目的是使读者掌握把椭圆边值问题转化为边界积分方程求解的基本思想,离散化求解的主要步骤,以及通过变分形式进行收敛性和误差分析的一般规律.

全书分为六章,第一章以二维 Laplace 方程为例,介绍了各种形式的边界归化，以及这些边界积分表达式之间的相互关系. 其中着重于利用 Green 公式(或广义 Green 公式)和基本解来推导边界积分方程的方式. 因为这种方式具有普遍意义，适用于所有的线性微分算子. 之所以选择二维问题为例，是由于二维问题的解在无穷远处可能具有的对数特性，使得它比三维问题在分析上更为复杂. 而且,通常的数学物理方程教材都是以三维问题为例,对于三维问题已有详尽的讨论.

第二章介绍在工程计算上实际运用的边界元技术，即采用配置法（collocation）把边界积分方程离散化为线性代数方程组求

解的技术．用数学公式介绍了离散化过程的基本步骤．

第三章介绍深入研究边界元方法所需的理论基础．核心内容包括三部分： 广义函数论，Соболев 空间理论和拟微分算子理论．对于如此丰富的内容我们只能从实用的观点予以陈述，只是对在一般教科书中难于找到的带权的Соболев空间的某些结论给出了必要的证明．这一章要求读者具有一般的实变函数论、泛函分析的基本知识．即使读者仅具备数学分析的知识，辅之以一定的参考书籍后也不难看懂．这一章为以下的分析和讨论提供理论上的依据．

第四章以 Laplace 算子，重调和算子，Navier 算子等常见的椭圆型边值问题为例，讨论它们的边界积分表达式及其相应的变分形式．我们在特定的 Соболев 空间中讨论了解的存在唯一性．特别突出了利用第一类 Fredholm 积分方程求解边值问题的方法．因为利用第二类 Fredholm 方程求解的方法是一个经典的方法，在积分方程论专著中已经涉及到了．

第五章利用有限元空间插值理论讨论了边界元空间的建立，这要涉及到边界的离散化，边界的几何近似以及边界函数的有限元插值．这一章得出的插值误差公式是一些最基本的结果，有普遍的适应性．

第六章以两个具体的问题为例，论述通过 Галеркин 方法求解边界积分方程的边界元误差估计以及介绍一些一般性的误差估计结果．这里考虑到了由于边界几何形状的近似产生的误差的影响．虽然各种边界元方法的误差分析依赖于具体的方程以及求解边界积分方程的具体方式．但从边界积分方程（或算子）的弱形式或变分形式为出发点来进行误差估计似乎仍是必经之道．

本书的主要内容曾在重庆建筑工程学院作为高年级本科生和计算数学研究生的教材使用过．也曾应邀在清华大学工程力学系和重庆大学应用数学系为研究生作过讲授．作者深感边界元法的研究发展迅猛，愈想包罗更多的内容则愈不能脱稿，只好将已讲授过的内容整理成书，以期抛砖引玉．由于作者水平有限，书中难

免有不少漏误之处．敬请读者批评指正．

在本书的撰写过程中，承蒙 Nedelec, Wendland, Kleinman, Hsiao 提供了大量的资料和他们的研究成果．在国内也得到计算数学界冯康，林群，李荣华，袁益让诸位专家以及清华大学杜庆华教授的关心和鼓励．重庆建筑工程学院领导也为作者提供了良好的工作条件，作者在此表示衷心的感谢．

边界元方法的研究工作以及本书的出版得到了重庆市科委应用基础研究小额经费资助，还得到了四川省科委应用基础专项经费以及国家教委优秀年轻教师基金资助项目（FEYUT, SEDC, CHINA）的资助，作者深切感受到这些支持的宝贵，谨此深表谢忱。

祝家麟

1988 年 7 月 15 日，重庆

目　录

第一章　边界积分方程

用边界元方法来求偏微分方程的数值解，首先需要把偏微分方程转化为边界积分方程，称之为边界归化．同一边值问题可以用不同的方式得到几个不同形式的边界积分方程．一般说来，这些积分方程是奇异的，或者是对数奇异的，或者是 Cauchy 主值型奇异的，也可能是 Hadamard 有限部分型奇异的，当然也可能得到非奇异边界积分方程．本章的目的是以最典型的偏微分方程的边值问题为例介绍边界归化的各种不同的形式．

在物理、力学问题中，常用椭圆型方程描述各种定常现象或平衡状态． Laplace 方程和 Poisson 方程是最典型的椭圆型方程． Laplace 方程是很多稳定分布的物理场的位势函数的支配方程，即使 Poisson 方程的定解问题也可以转化为 Laplace 方程相应的定解问题来求解，因此，本章着重讨论 Laplace 方程．我们将内、外边值问题结合起来考虑，同时利用各种边值问题的解的存在唯一性来推证边界积分方程的可解性，以避免直接引用 Fredholm 定理，这样可不必要求读者对于经典的积分方程理论有很多的了解．

本章以平面问题为例．假定 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中一有界开区域，它的边界 Γ 是一条光滑闭曲线．还假设所求的解和给定的函数都是足够光滑的，以使数学推证简单化．以后我们要扩大解的范围，放宽对已知函数的光滑性的要求．

§1. 预备知识

1.1　基本定解问题

考虑二维 Laplace 方程

$$\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} = 0, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$$

它的二阶连续可微解称为调和函数. 调和函数有许多重要性质，其中最基本的性质之一是极值原理. 我们不加证明地引述如下，其证明可见于一般的数学物理方程教科书.

定理 1.1 (极值原理)凡不等于常数的调和函数在区域 Ω 的任意内点上的值不可能达到它在 Ω 上的上确界或下确界的数值.

推论 1.1 在有限区域 Ω 内调和，在 $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ 连续的函数必在 Γ 上取得其最大值和最小值.

推论 1.2 设 u 和 v 都是区域 Ω 内的调和函数，且在 $\bar{\Omega}$ 上连续，如果在 Ω 的边界 Γ 上有 $u \leqslant v$，则在 Ω 内必有 $u \leqslant v$，只有当 $u \equiv v$ 时，在 Ω 内才会有等号成立的可能性.

为了确定 Laplace 方程在区域 Ω 内或在 $\bar{\Omega}$ 以外的解，还必须附加一些定解条件. 现在方程与时间无关，定解条件中只有边界条件. 一般给定三种类型的边界条件，相应的定解问题分别称为第一、第二和第三边值问题，即 Dirichlet 问题，Neumann 问题和 Robin 问题. 这里我们主要考虑前两类问题.

(1) 内边值问题

Dirichlet 内问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ u(\boldsymbol{x})|_\Gamma = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.1}$$

Neumann 内问题

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n}\right|_\Gamma = g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 u_0 和 g 是已知函数，$\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的单位外法向量. 上述问题的经典解是指一个在 Ω 内调和的函数 $u(x_1, x_2)$，它在 $\bar{\Omega}$ 上连续，并且当 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ 从 Ω 内以任意方式趋近于边界 Γ 时，它满足相应的边界条件.

利用调和函数的性质容易证明问题 (1.1) 在 Ω 内的解是唯一

的，而问题(1.2)的解在Ω内除去一个常数外是唯一的。条件$\int_{\Gamma} gdS = 0$是保证问题(1.2)的解的存在的充分必要条件。以上结论在数学物理方程中是熟知的。

(2) 外边值问题

在应用中，我们经常要遇到在无限区域$\Omega' = \mathbf{R}^2 \backslash \bar{\Omega}$中提出的边值问题。所谓 Dirichlet 外问题和 Neumann 外问题分别是，求函数$u(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}' = \Omega' + \Gamma$，满足

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ u(\boldsymbol{x})|_{\Gamma} = u_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \end{cases} \tag{1.4}$$

这里u_0和g仍是定义在边界Γ上的已知函数。

因为外边值问题是在无限区域Ω'内提出的，应当对解在无穷远处的性态作一定的限制。我们可以举例说明如果在无穷远处不加任何限制时，外边值问题的解不唯一。例如，考察以原点为中心的单位圆周为边界Γ的 Dirichlet 外问题，边界条件是$u|_{\Gamma} = 1$，易验证$u_1(\boldsymbol{x}) \equiv 1$，$u_2(\boldsymbol{x}) = \ln|\boldsymbol{x}| + 1$都是解。

那么，在无穷远处究竟应当加以怎样的限制才能保证解的唯一性呢？对二维和三维问题这个限制是不同的。我们不妨限定解在无穷远处趋向于零(函数$u(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x} \to \infty$时趋向于零，是指对于一个以原点为圆心，半径充分大的圆以外的一切点$\boldsymbol{x}$，都有$|u(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$，$\varepsilon$是充分小的正数)。具体地说，假定当$|\boldsymbol{x}|$充分大时，$u(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{-1})$，在这个假定下，如果外边值问题的解能够确定，那么即使原来的解在无穷远处有另外的要求，也可以归结到假定的这种情况下来。这是因为，我们可以作一个在无穷远处具有所要求的性质(这种要求应当是合理的)的调和函数，把所要求的解减去这个特殊的解所得到的解在无穷远处就会趋向于零了。对于解在无穷远处的性态的限制，可以看作是无穷远边界条

件。

不过我们会发现，在二维情形。如果假定外边值问题的解在无穷远处趋向于零，又不强加一些限制性的条件，这样的解一般说来是不存在的。

对二维 Dirichlet 外问题 (1.3)，只需要求它的解在无穷远处有界就能保证解的唯一性。事实上，设问题有两个解 u_1 和 u_2，则差 $u \equiv u_1 - u_2$ 满足零边值，并在无穷远处有界：$|u| < C$，C 是常数。在 Ω 中找一个固定点 x_0，以 x_0 为圆心，R_0 为半径作圆，使这个圆包含于 Ω 内，再以 x_0 为圆心，以相当大的 R 为半径作圆 B_R 包含 $\bar{\Omega}$ 于其内。现在构造一个在 $B_R \cap \Omega'$ 中的调和函数

$$v(\boldsymbol{x}) = C \ln \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|}{R_0} \Big/ \ln \frac{R}{R_0}, \quad \boldsymbol{x} \in B_R \cap \Omega'$$

当 $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ 时 $v(\boldsymbol{x}) > 0$；当 $\boldsymbol{x} \in \partial B_R$ (以后，$\partial \boldsymbol{B}$ 表示某个区域 B 的边界)时，$v(\boldsymbol{x}) = C$，因此无论在区域 $B_R \cap \Omega'$ 的边界 ∂B_R 或 Γ 上均有 $u(\boldsymbol{x}) \leqslant v(\boldsymbol{x})$。根据推论 1.2，在区域 $B_R \cap \Omega'$ 内有

$$u(\boldsymbol{x}) \leqslant v(\boldsymbol{x})$$

令 $R \to \infty$，有 $v(\boldsymbol{x}) \to 0$，故得 $u(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$，$\boldsymbol{x} \in \Omega'$。同样作函数 $-v(\boldsymbol{x})$，则有 $u(\boldsymbol{x}) \geqslant -v(\boldsymbol{x})$ 在 $B_R \cap \Omega'$ 内成立，令 $R \to \infty$，可得 $u(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，$\boldsymbol{x} \in \Omega'$。从而在 Ω' 内

$$u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$$

由此证明了二维 Dirichlet 外问题的解在有界函数类中是唯一的。

从上面的讨论可以看出，极值原理对无限区域仍然成立。可以推知，在边界上处处等于常数 C 的二维 Dirichlet 外问题的解必定也是常数 C。

对二维 Neumann 外问题，寻求在无穷远处趋于零的解是可能的，只要条件 $\int_\Gamma g dS = 0$ 得到满足。事实上，这个条件是二维 Neumann 内、外问题可解的充分必要条件。如果不计任意常数项，Neumann 问题的解是唯一确定的。在二维情况下，Neumann 外问题同内问题相比非常类似，但对三维或更高维的问题，内，外问

题有很大的差别，对外问题不需要 $\int_\Gamma g dS = 0$ 这个条件，且在无穷远处趋于零的解是唯一确定的. 我们将在后面联系到边界积分方程再作讨论.

1.2 Green 公式

把一个区域上的积分转化为区域边界上的积分从根本上说是基于 Green 公式的应用，它是线，面积分中 Остроградский-Gauss 公式的推论. 对于在 $\bar{\Omega}$ 上连续且在 Ω 内有连续偏导数的任一向量函数 $\boldsymbol{W}$（记为 $\boldsymbol{W} \in (C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}))^2$，下式成立

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{W} d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{1.5}$$

其中 $d\boldsymbol{x} = dx_1 dx_2$，$dS$ 表示 Γ 上的长度元素，$\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的单位外法线向量.

设函数 $u(\boldsymbol{x})$，$v(\boldsymbol{x})$ 以及它们的所有一阶偏导数在闭区域 $\bar{\Omega}$ 上连续，并且它们在 Ω 内有连续的所有二阶偏导数（记为 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$）. 在公式 (1.5) 中令 $\boldsymbol{W} = v\nabla u$，就得到 Green 第一公式

$$\int_\Omega v \Delta u d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} dS \tag{1.6}$$

式中 ∇ 称为 Hamilton 算子，$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$，且

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla u$$

在上式中交换 u 和 v 的位置，并把所得的式子与 (1.6) 式相减，得到 Green 第二公式

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \tag{1.7}$$

假若上面所考虑的函数 u 或者 v 在 $\mathbf{R}^2$ 上有紧支集（在平面上一有界闭区域以外函数值为零）. 则上述 Green 公式对无限区域 Ω' 也是成立的.

在三维以上的空间的 Green 公式同样可表示成(1.6)和(1.7)式。

1.3 基本解

把物理现象所对应的微分方程转化为积分方程或者把物理量满足的规律直接表述为积分方程的形式，基本解起着重要作用。我们在此简要地介绍基本解的概念及其物理意义，为此首先要粗略地引入与基本解密切相关的 δ 函数。

在物理学、力学中的集中量，如点电荷、单位脉冲、集中质量等很难用经典概念下的函数来表述。为了描述这些集中作用的物理量，采用了 δ 函数作为它们的密度函数。这样的函数首先由Dirac引入量子力学中，因而又称为 Dirac-δ 函数。

从工程或物理学的观点来看，所谓 δ 函数是定义在 $\mathbb{R}^d$ (d 表示空间的维数)中并且有以下性质的函数

$$\text{(i)}\quad \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\begin{cases}0 & \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\\ \infty & \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\end{cases} \tag{1.8}$$

$$\text{(ii)}\quad \int_{\mathbb{R}^d}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}=1 \tag{1.9}$$

例如单位质量集中在区域 Ω 中的一点 $\boldsymbol{y}$，则 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 可以作为区域 Ω 内质量的分布函数，显然

$$\int_{\Omega}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})dx=\begin{cases}1 & \boldsymbol{y}\in\Omega\\ 0 & \boldsymbol{y}\bar{\in}\Omega\end{cases} \tag{1.10}$$

δ 函数一个重要特性是对任何一个连续函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，都有

$$\int_{\Omega}\varphi(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{y}\in\Omega \tag{1.11}$$

可以把积分区域扩大到整个空间 $\mathbb{R}^d$，故 δ 函数也可定义为使得下式成立的“函数”

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{y}) \tag{1.12}$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是无穷可微且有紧支集的函数(记为 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$)。

δ 函数是偶函数，即

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \tag{1.13}$$

我们留待以后再来证明这个事实.

由静电学知识,如果 $\rho(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$) 表示电荷在三维空间中的分布密度,那么沿闭曲面 Γ,电场的通量

$$\int_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=4\pi\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

其中 Ω 为闭曲面 Γ 所包的体积, $d\boldsymbol{x}$ 是体积元素, $\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的单位外法线向量, dS 是面积元素, $\boldsymbol{E}$ 是电场强度. 设函数 $u(\boldsymbol{x})$ 表示电位,则

$$\boldsymbol{E}=-\nabla u$$

由于 $\dfrac{\partial u}{\partial n}=\boldsymbol{n}\cdot\nabla u$, 因此有

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}dS=4\pi\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

利用 Остроградский-Gauss 公式得

$$-\int_\Omega \Delta u(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=4\pi\int_\Omega \rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

由于闭曲面 Γ 可以任意选取,就得到

$$-\Delta u=4\pi\rho$$

现在在空间某点 $\boldsymbol{x}$ 放一带有单位电量的点电荷, 我们以 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 来表示这个单位点电荷的分布密度,那么,由 $\boldsymbol{x}$ 点处的单位点电荷在空间的 $\boldsymbol{y}$ 点所产生的电位应满足 Poisson 方程

$$-\Delta u=4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1.14}$$

根据静电学中的定律知道,由单位点电荷产生的电场强度是

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}$$

它的各个分量与函数 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ 关于三个坐标变量的偏导数只差一个负号,因而这个电位应当是

$$u=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{1.15}$$