

成人高等教育自学辅导丛书

微积分 自学指导

(财经类)

胡林 主编
翟连林 刘维翰 编著
谭 鼎 刘 军

水利电力出版社

成人高等教育自学辅导丛书

微积分自学指导

(财经类)

胡 林 主编

翟连林 刘维翰 编著

谭 燕 刘 军

水利电力出版社

内 容 提 要

本书是“成人高等教育自学辅导丛书”之一，是翟连林、刘维翰二同志以在北京电视台和上海电视台为电大经济类学员讲授的《微积分》课程讲稿为基础，并参照了部分函授大学、职工大学的有关教材编写而成的，具有自学、辅导、电教、函授多用的特色。

全书共分为函数，极限与连续，导数与微分，中值定理、导数的应用，不定积分，定积分，多元函数，微分方程简介等八章。书中在全面介绍微积分基本知识的同时，对经济学中所遇到的一些数学问题作了比较详细的讨论，可以帮助从事经济工作的读者提高运用数学解决实际问题的能力。

本书各章均配有练习题，书末附有参考答案；每章结尾有小结，并列举出一些综合例题，以帮助读者系统地掌握所学知识，分清主次，熟悉基本技能。

本书既可作为经济工作者的自学读本，又可作为电大、函大、职大、夜大师生及普通高等院校经济专业师生的参考材料。

成人高等教育自学辅导丛书

微积分自学指导

(财经类)

胡 林 主编

翟连林 刘维翰 编著
谭 燕 刘 军

★

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京顺义北方印刷厂印刷

★

787×1092毫米 32开本 25.5印张 570千字

1986年4月第一版 1986年4月北京第一次印刷

印数00001—18000册 定价4.20元

书号 7143·8038

前 言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，智力开发的重要性更加突出了。我们迫切需要有一支高水平的职工队伍，以加速实现技术现代化，管理现代化，提高经济效益。这就要求在普遍提高职工的政治、文化、技术、业务素质的同时，尽快从现有职工中培养造就大批的专业技术干部和管理干部，形成一支在数量上能基本满足要求，质量上能掌握现代科学技术和经济管理知识，专业配套的职工队伍。可以说，~~大力加强职工教育~~，培养各类人才，是摆在我们面前的一项~~重要而又紧迫~~的任务。

这套“~~成人自学辅导丛书~~”就是根据当前加强职工教育的~~形势需要~~组织编写的。

“丛书”以“~~面向实际，面向生产~~，为提高职工队伍素质，提高经济效益~~服务~~”作为编写指导思想；内容紧密结合成人高等教育~~理工类（或财经类）~~部分课程的教学大纲和电视大学及一些~~函授大学、职工大学、业余大学~~的教材；在布局、选材、体制和~~编写形式~~上尽量适应成人自学的特点。所以，非常适用于~~理工类~~电视大学、职工大学、业余大学学员作为学习~~参考书~~，~~函授大学~~作为函授教材；对于广大自学读者，则是帮助他们通过自学高等考试的一种自学读本。

为了切合读者的实际需要，提高学习效果，“丛书”中的每一册都包括基本概念、重点和难点解释、典型例题分

析、总结或提示以及思考与练习等几部分内容，并配有适量的作业测验题（附答案）和电大试题选解。

这套丛书共包括十一门课程，十三册：

高等数学自学指导（上、下册）

线性规划自学指导

线性代数自学指导

概率论与数理统计自学指导

常微分方程自学指导

逻辑代数与BASIC语言自学指导

复变函数自学指导

微积分自学指导（财经类）

普通物理自学指导（上、下册）

普通化学自学指导

物理化学自学指导

本书根据全国教育委员会颁布的电大教学大纲要求，参考通用教材及有关资料编写而成。书中全面系统地讲述了微积分基本知识，同时，对经济学中所遇到的一些数学问题作了比较详细的讨论，有助于提高读者运用数学解决知识实际问题的能力。全书分为函数，极限与连续，导数与微分，中值定理、导数的应用，不定积分，定积分，多元函数，微分方程简介等八章。各章配有习题，书末附有解答；章后有小结，并列举了一些综合例题。这对于读者系统地掌握所学知识，分清主次，抓住重点和熟悉基本技能，很有帮助。本书的编写得到了王湘浩教授的关怀和指导。张灿英同志详细审阅了书稿，马少华、魏立生二同志在书稿整理过程中作了大量工作。

参加这套书编写工作的都是有经验的高等学校教师、有

成人教育工作者，其中有些同志还讲授过电视大学的有关课程或担任过电大辅导课主讲教师。“丛书”融汇了他们多年的教学经验和心得体会，更鲜明地具有电视教育及自学、辅导、函授多用的特色。

在编写过程中，我们得到各课程的有关教授和专家的关怀和指导，有些同志直接参予审阅、整理等工作，在此一并表示深切的谢意。

组织编写这类面向成人读者，自学、辅导、电教、函授多用的大专读本还是第一次，欢迎读者对“丛书”的内容、布局、结构、形式等提出宝贵意见，以帮助我们改进工作，提高“丛书”质量。

胡 林

1985年7月

序

这是一本难得的好教材，它对没有机会进大学或者在电大、函大、职大、夜大学习而缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学员特别适合。本书的编者一直从事数学基础课教学，具有丰富的教学经验，这套书充分反映了编者们这些宝贵的经验。

一般教材需要经过教师在课堂上的再创造才能很好的发挥作用，而本书则体现出教师讲课时的这种创造，使读者感到好象是在课堂上亲聆教师的讲授。

经验告诉我们，学生感到困难、深入不下去的主要原因是缺乏自学能力，不善于给自己提出问题，本书在这一方面也下了很大功夫。编者在展开教材内容的同时，引导读者去提出问题、探讨问题、解决问题，提供了一条怎样深入学习的途径。

本书也是很好的教学参考书，它不仅在内容上涉及面广，而且更重要的是提供了一种可取的教学方法，这对于教师，特别是刚从事教学工作的青年教师具有很好的借鉴作用。

由于本书切合学员的学习实际，虽然增加了一定的篇幅，但不显得繁琐，相反，在日益蓬勃发展的成人教育事业中，本书必将发挥积极作用，为广大读者所欢迎。特代为作序。

王湘浩

1985年4月 长春

* 王湘浩教授系中国科学院学部委员。

目 录

前 言

序

第一章 函数	1
第一节 集合	1
第二节 实数	16
第三节 函数	28
第四节 函数的简单性质	44
第五节 反函数、复合函数	50
第六节 初等函数	57
第七节 小结	67
第二章 极限与连续	85
第一节 数列极限	85
第二节 函数极限	108
第三节 无穷小与无穷大	132
第四节 函数的连续性	141
第五节 小结	159
第三章 导数与微分	176
第一节 导数概念	176
第二节 求导例题选讲	191
第三节 求导法则	200
第四节 导数在经济学中的应用	225
第五节 高阶导数	239
第六节 微分	242
第七节 小结	257
第四章 中值定理、导数的应用	271

第一节	中值定理	271
第二节	罗彼塔法则	283
第三节	函数的增减性	298
第四节	函数的极值	303
第五节	函数的最值	311
第六节	曲线的凹向与拐点	319
第七节	曲线的渐近线	323
第八节	函数图形的作法	328
第九节	小结	333
第五章	不定积分	354
第一节	原函数与不定积分概念	354
第二节	不定积分基本公式和性质	360
第三节	换元积分法	369
第四节	分部积分法	394
第五节	有理函数积分举例	403
第六节	经济应用问题举例	412
第七节	小结	416
第六章	定积分	430
第一节	定积分的概念	430
第二节	定积分的性质	440
第三节	微积分学基本定理	446
第四节	定积分的计算法	455
第五节	广义积分	476
第六节	定积分的应用	488
第七节	小结	527
第七章	多元函数	549
第一节	空间解析几何简介	549
第二节	多元函数的概念	565
第三节	极限与连续	576

第四节	偏导数	587
第五节	全微分	603
第六节	复合函数微分法	612
第七节	隐函数微分法	622
第八节	二元函数的极值	632
第九节	最小二乘法	650
第十节	二重积分	657
第十一节	小结	702
第八章	微分方程简介	726
第一节	微分方程的基本概念	726
第二节	一阶微分方程	732
第三节	微分方程经济应用举例	762
第四节	可降阶的二阶微分方程	766
第五节	二阶常系数线性微分方程	771
第六节	小结	791

第一章 函 数

函数是微积分研究的对象，在这一章中，我们将在集合概念的基础上，建立函数的概念，并讨论函数的简单性质、函数的运算和初等函数。

第一节 集 合

1.1 集合的概念

看下面的例子：

- (1) 1, 3, 5, 7, 9;
- (2) 与一定点的距离为定长的所有的点;
- (3) 房间里的一套家具;
- (4) 河里的一群鸭;
- (5) 地上的一堆稻谷。

它们分别由一些数、一些点、一套家具、一群鸭、一堆稻谷所组成。在这里，很容易看出，一“些”、一“套”、一“群”、一“堆”，虽然意义有所不同，但它们都是被当作“整体”看待的，这些“整体”就是我们所说的集合。

如果进一步观察，不难看到，以上所说的每一个“整体”都是由一些个体(即对象)组成的，而且每一个整体中的对象都具有某种共同属性。比如，在一套家具中，家具就是其中每一个对象的共同属性；在一些数中，小于10的正奇数就是其中每个对象的共同属性，由此可见，所谓集合，就是由一些对象组成的整体，而每一个对象称作集合的元素。

通常，我们用大写字母 A 、 B 、 C 、…等表示集合，用小写字母 a 、 b 、 c 、…等表示集合的元素。

显然，一个集合必然是由一些确定的元素构成的。我们所要确定的是每一个元素的所属问题。如果元素 a 属于集合 A ，就记作

$$a \in A.$$

读作“ a 是集合 A 的元素”，或“ a 属于集合 A ”，亦或“ a 在 A 中”；如果元素 b 不属于集合 A ，就记作

$$b \notin A \text{ 或 } b \in \bar{A}$$

读作“ b 不是集合 A 的元素”，或“ b 不属于集合 A ”，亦或“ b 不在 A 中”。

例如，设 P 为一个10以内的质数集合。所谓质数（或称素数），是大于1的正整数，且只能被它本身和1所整除。因此，集合 P 只含有2、3、5、7四个元素，记作

$$2 \in P, 3 \in P, 5 \in P, 7 \in P.$$

而对于不属于集合 P 的数4、6，则记作

$$4 \notin P, 6 \notin P.$$

1.2 集合的特性

一个给定的集合具有些什么特性呢？

首先，集合具有确定性。

任意给定一个集合 A ，那么对任一元素 a ，一定能确定 a 是否属于 A ，即

$$a \in A \text{ 或 } a \notin A.$$

例如，“某些人”便不能构成一个集合，因为我们无法确定张某、李某是否在这些人之中。而“年龄为25岁的人”便构成一个集合，因为我们可以明确判定张某、李某是否属于这个集合，这只要调查一下他是否有25岁就行了。又如，

“几个有理数”便不能构成一个集合，因为对任一个有理数，不能确定它是否是所指的几个有理数中的一个，而能被3整除的数构成一个集合，因为任意一个数，能确定它是否被3整除。

由此可知，所谓集合具有确定性，是指对所考虑的一些对象的整体，任意一个对象都能判断是否属于这个整体。

其次，集合具有互异性。

集合里的元素必须是互不相同的。这就是说，在一个集合里，元素不能重复出现，例如，方程 $(x-1)^2=0$ 的实数解的集合只有1个元素“1”。

第三，集合具有无序性。

在一个集合里的元素，通常不考虑元素之间的顺序，两个集合只要它们的元素相同，我们就认为是同一个集合。例如， $\{a, b, c, d\}$ 与 $\{d, c, a, b\}$ 就表示同一个集合。

在特殊情况下，比如象数列一类的集合里的元素，由于数列本身的要求，必须按顺序排列。例如，下一节将介绍的自然数集合可表示为

$$\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

而不能表示为

$$\{3, 1, 4, 2, \dots\}.$$

这里强调元素的排列，目的在于体现集合中省略号所表示的那些元素的规律，而不是集合本身所要求的。

1.3 集合的表示法

常用的集合表示法有：列举法、构造式法和图示法。

1. 列举法

把元素列出，并用一个大括号 $\{ \}$ 把它们括起来，这样表示一个集合的方法，称为列举法。

如1.1中集合 P 是一个10以内的质数集合，可以表示为

$$P = \{2, 3, 5, 7\}.$$

当一个集合含有重复元素时，它们只算作一个元素，如集合

$$M = \{a, b, a, b, c\},$$

只含有三个元素 a 、 b 、 c ，因此表示为

$$M = \{a, b, c\}.$$

用列举法表示集合，还要注意把集合内的元素全部列出来，不能遗漏任何一个。正因为如此，当一个集合含有许多元素时，用列举法就很麻烦了，甚至是不可能的，如用列举法表示全国广播电视大学经济类的学生这样一个集合，便需要把十几万各学生的姓名列出来，这是很麻烦的事，实际上几乎是不可能的。

2. 构造式法

设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则， A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为

$$A = \{a | P(a)\}.$$

比如，集合

$$A = \{2, 3, 5, 7\},$$

我们也可以定义 A 的元素为质数，且不大于10，用构造式表示为

$$A = \{x | x \text{ 为质数且 } x \leq 10\}.$$

同样， $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

用构造式表示为

$$B = \{x | x \text{ 为整数, } 1 \leq x \leq 10\}.$$

又如，

$$C = \{x | x \text{ 为全国广播电视大学学生}\},$$

$D = \{\text{我国万里长城所经过的省、自治区和直辖市}\}$
 $= \{\text{河北, 北京, 山西, 内蒙古, 陕西, 宁夏, 甘肃}\},$
 $S = \{x \mid x=a \text{ 或 } x=b\},$
 $M = \{\text{第三象限内函数值为正值的三角函数}\}$
 $= \{\text{正切函数、余切函数}\}.$

为了更清楚地比较列举法和构造式法表示的集合, 请看表1-1列出的一些例子。

表 1-1

列 举 法	构 造 式 法
$\{1, 4, 9, 16, 25\}$	$\{x \mid x = n^2, n \text{ 为整数, 且 } 1 \leq n \leq 5\}$
$\{2, 3\}$	$\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$
$\{2, 6, 12, 20, 30, 42\}$	$\{x \mid x = n(n+1), n \text{ 为整数且 } 1 \leq n < 7\}$
$\{ \text{张、王、李、陈} \}$	$\{x \mid x \text{ 为整数, 且 } 1 \leq x \leq 10000\}$
$\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$	$\{(x,y) \mid x \text{ 为整数, 且 } 1 \leq x \leq 4, y = x + 1\}$

从表1-1中的一些例子可以看出: 一个集合究竟用哪种方法表示, 这要看具体问题而定, 有的集合既可用列举法, 又可用构造式法, 但有的集合只适用一种表示法, 如集合 $\{\text{张、王、李、陈}\}$, 适用列举法, 用构造式法就困难了, 而含有1至10000的自然数集合, 用列举法就显得太麻烦了. 当然, 有时我们可用另一种方法来表示元素有某种规律的一些集合. 例如,

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10000\},$$

$$A_2 = \{1, 3, 5, \dots\},$$

$$A_3 = \{a, a^2, a^3, \dots\}.$$

在这种表达式中, 省略的元素能够由已写出的元素和上

下文的关系判断出来。

还必须指出：一个集合的构造式表示法并不是唯一的，这是由于一个集合的元素，往往可以用多种不同的定义来确定。例如，集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的元素可以定义为不大于 4 的自然数，也可定义为小于 6 且能整除 12 的正数。记 a 整除 b 为 $a | b$ ，如 2 整除 4，记为 $2 | 4$ 。这样集合 A 可以表示为：

$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$A = \{x | x \text{ 为整数, 且 } 1 \leq x \leq 4\},$$

$$A = \{n | n \text{ 为整数, } n | 12, \text{ 且 } 1 \leq n < 6\}.$$

同样，

$$B = \{2, 3\},$$

$$B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\},$$

$$B = \{x | x \text{ 为最小的两个质数}\}.$$

一个集合的元素数目，称为该集合的基数（或势），显然，一个集合的基数是一个非负的整数。如果这个集合的元素个数是有限的，称此集合为有限集合。即含有有限个元素的集合称为有限集合。含有无限个元素的集合称为无限集合。如表 1-1 所列的集合都是有限集合。本书中常出现的下列数集，都是无限集合。

N ：正整数集合或自然数集合，即

$$\{1, 2, 3, \dots\}.$$

Z ：整数集合，即

$$\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

F ：有理数集合（有理数是一个可以表达成 p/q 形式的数， P 和 q 是互质的整数，且 q 不等于 0）。

R ：实数集合（它不但包括全体有理数，而且还包括全体无理数）。

3. 图示法 (文氏图)

文氏图 是用一个简单的平面区域代表一个集合。如图 1-1, 集合内的元素以区域内的点表示。

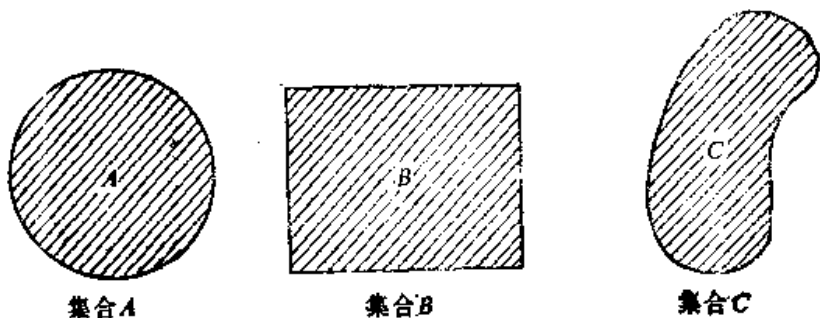


图 1-1

这三种集合的表示法中列举法和图示法有直观性强的特点, 但用得最多的还是构造式法。

例 1 用列举法表示下列集合:

- (1) A 是方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$ 的解的集合;
- (2) B 是大于 10 小于等于 100 的整数集合;
- (3) C 是能被 3 整除的非负整数的集合。

解: (1) $A = \{1\}$;

(2) $B = \{11, 12, 13, \dots, 99, 100\}$;

(3) $C = \{0, 3, 6, \dots, 3n, \dots\}$ 。

例 2 用构造式法表示下列集合:

(1) B 是所有大于 3 且小于或等于 10 的实数构成的集合;

(2) C 是 xoy 平面上圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外一切点的集合。

解: (1) $B = \{x \mid 3 < x \leq 10, x \in \mathbb{R}\}$;

(2) $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4, x, y \in \mathbb{R}\}$ 。

1.4 空集和全集