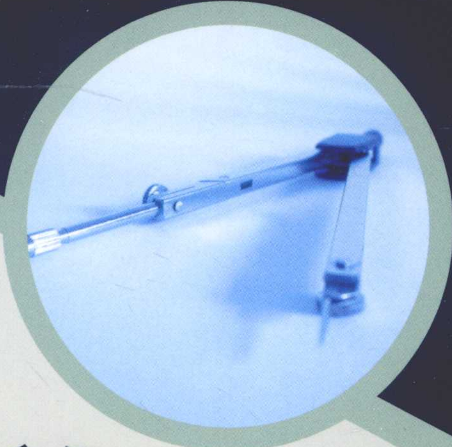

高等数学

基础理论与实验分析

主　编　李向荣　王　辉　金天坤
副主编　李会艳　孙贵玲　王爱苹　闫剑昆

GAODENG SHUXUE
JICHU LILUN YU SHIYAN FENXI

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高等数学

基础理论与实验分析

主　编　李向荣　王　辉　金天坤
副主编　李会艳　孙贵玲　王爱苹　闫剑昆

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

全书主要内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、常微分方程、无穷级数、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分等。本书结构严谨、逻辑清晰，注重应用，实用性强，可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础理论与实验分析 / 李向荣, 王辉, 金天坤主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2015.6
ISBN 978-7-5170-3258-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②王… ③金… Ⅲ. ①高等数学—研究 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第130692号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：陈　洁　封面设计：崔　蕾

书　　名	高等数学基础理论与实验分析
作　　者	主　编　李向荣　王　辉　金天坤
	副主编　李会艳　孙贵玲　王爱苹　闫剑昆
出版发行	中国水利水电出版社
	(北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038)
	网址：www.waterpub.com.cn
	E-mail：mchannel@263.net(万水)
	sales@waterpub.com.cn
	电话：(010)68367658(发行部)、82562819(万水)
经　　售	北京科水图书销售中心(零售)
	电话：(010)88383994、63202643、68545874
	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京厚诚则铭印刷科技有限公司
印　　刷	三河市佳星印装有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　25印张　640千字
版　　次	2015年9月第1版　2015年9月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	86.00元

前　　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，它既具有高度的抽象性，又具有广泛的应用性。作为数学的一门重要分支，高等数学的基本内容就是微积分学。微积分是继欧几里得几何之后人类智慧在数学领域的一个最伟大的创造，大约在300多年前，受天文学和力学等科学问题的推动和启发，牛顿和莱布尼茨分别独立地创立了微积分。伴随着人类科学研究的不断深入，微积分学不断地得到了创新和发展，日益枝繁叶茂、欣欣向荣，已经成为一门理论严密、体系完备的成熟学科，显示着强大的生命力。

本书全面、系统地分析和讨论了高等数学的基本理论与基本方法，全书共10章，主要内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、常微分方程、无穷级数、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分等。与此同时，本书针对每一章都引入了必要的数学实验。这样把高等数学的基础理论与实验巧妙地结合，可以使读者有效地掌握利用计算机完成通常情况下人类难以完成或是不可能完成的数学运算，从而更加深刻地理解高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，对读者研究与应用数学理论意义十分重大。

本书在编写上突出由浅入深、循序渐进的特点；整本书语言通俗易懂，概念阐述尽量简明精确，对重要概念、定理、推论均给出了详细的证明过程；注重专业理论素养和实际动手能力的协调；注重应用特色，重要的内容大多配以应用实例，从而加深读者对相应部分内容的理解和掌握；数学实验部分图文并茂，而且与相应的基础理论融为一体。总而言之，全书条理分明、结构完整，重点突出、难点分散。

全书由李向荣、王辉、金天坤担任主编，李会艳、孙贵玲、王爱苹、闫剑昆担任副主编，并由李向荣、王辉、金天坤负责统稿，具体分工如下：

第1章、第2章：李向荣（广西大学）；

第6章、第7章：王辉（商洛学院）；

第3章、第4章：金天坤（大庆师范学院）；

第5章：李会艳（大庆市第二十三中学）；

第8章：孙贵玲（黄河科技学院）；

第9章：王爱苹（黄河科技学院）；

第10章：闫剑昆（集宁师范学院）。

本书是编者在多年参与高等数学教学与研究的基础上，参考大量文献编写而成的。在编写本书的过程中得到了许多同行业专家学者的大力支持，在此特向所参考文献的作者和给予帮助的专家学者表示真挚的感谢。限于编者水平，加之时间仓促，书中难免会有不完善的地方，欢迎专家学者和广大读者朋友批评指正。

编者

2015年3月

目　　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函数的概念与性质

由于实践和各门科学自身发展的需要，到了 16 世纪，对物体运动的研究成为自然科学的中心问题．与之相适应，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个新的时代，即变量数学的时代．作为在运动中变化的量（变量）及它们之间的依赖关系的反映，数学中产生了变量和函数的概念．要完全了解函数的基本思想，就必须从集合的概念开始入手．

1.1.1　集合及其运算

1. 集合的基本概念

集合简称集，是数学的一个基本概念，在现代数学中起着非常重要的作用．

定义 1.1.1　当研究范围明确时，集合通常理解为具有某种性质的事物的全体，用大写拉丁字母 $A,B,C,S,\cdots$ 表示．集合中的每一个事物都被称为该集合的一个元素，用小写拉丁字母 $a,b,c,s,\cdots$ 表示．

某事物 a 与集合 E 具有下列两种关系：

(1) a 是 E 的元素，称为 a 属于 E，记作 $a \in E$.

(2) a 不是 E 的元素，称为 a 不属于 E，记作 $a \notin E$.

由有限个元素组成的集合，可将它的元素一一列举出来．这种表示法称为枚举法．例如，由元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，记作 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$.

对于一般的集合，通常采用性质描述法表示：设 E 是具有性质 P 的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$E=\{x \mid x\ \text{具有性质}\ P\}\text{或}\ E=\{x \mid P(x)\}.$$

数学中，常用 $\mathbf{N}$ 表示由全体自然数组成的集合，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

由全体整数组成的集合用 $\mathbf{Z}$ 表示，即

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\};$$

而全体正整数的集合则用 $\mathbf{Z}^+$ 表示，即

$$\mathbf{Z}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

由全体有理数所组成的集合用 $\mathbf{Q}$ 表示，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}^+,\text{且}\ p,q\ \text{互素}\right\};$$

由全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，由于数轴上的点与实数一一对应，$\mathbf{R}$ 也可看成数轴，如图 1-1-1 所示．在以后，常常将实数看成数轴上的点，或用点表示一个实数．

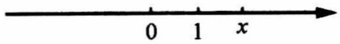

图 1-1-1

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x \in A$，则必有 $x \in B$，就称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

如果 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 同时成立，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

例如，设有集合 $A = \{-1, -2\}$，$B = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$，则 $A = B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$.

例如 $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

例如集合 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

我们规定空集是任意集 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$.

2. 集合的基本运算

集合的基本运算包括并、交、差，详述如下：

设 A 和 B 是两个集合，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的差，记为 $A \backslash B$，即

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

如果在某个过程中，我们所研究的对象同属于某一个集合 S，那么这个集合称为全集或基础集．在本书中我们一般用实数集 $\mathbf{R}$ 当全集．

一般地，设集合 A 是全集 S 的子集，那么 S 中不属于 A 的元素全体组成的集合称为 A 的余集，记为 $\overline{A}$，即

$$\overline{A} = S \backslash A$$

3. 邻域、开集、闭集、区间

对于实数 a 及正数 δ，数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为 a 的（以点 a 为中心、以 δ 为半径的）δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即 $U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$；而 $\{x \mid a - \delta < x \leqslant a\}$ 和 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant a + \delta\}$ 分别称为 a 的左 δ 邻域和右 δ 邻域，如图 1-1-2 所示．

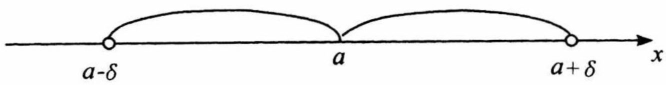

图 1-1-2

数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$. 当不强调 δ 的大小时，a 的 δ 邻域和 δ 去心邻域分别简称为 a 的邻域和去心邻域，并分别记作 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$. 左、右 δ 邻域也有类似的简称．

设 a 与 b 是两个不同的实数，且 $a < b$，数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$$

其中 a 与 b 称为开区间 (a, b) 的端点．

通过开区间的定义可知,邻域是一个以 a 为中心的开区间,即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中 a 与 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点 .

同时,数集 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 均称为半开区间,a 与 b 称为它们的端点 .

以上这四种区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 类似地,我们可以定义五类无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$
$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

其中部分区间在数轴上的表示如图 1-1-3 所示 .

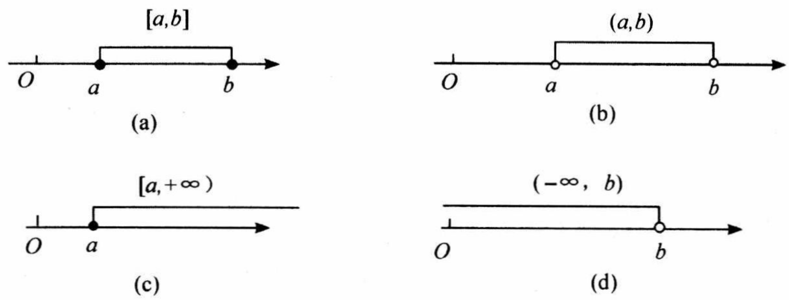

图 1-1-3

对 (a,b),$(-\infty,b)$,$(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 这四类区间做进一步的分析发现,它们中的任何一点 x_0 都至少存在一个邻域 $U(x_0)$,使得 $U(x_0)$ 整个被包含于 x_0 所在的区间 . 一般地,设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集,若对任意 $x_0\in E$ 都存在 $U(x_0)\subset E$,则称 E 是一个开集 . 因此,这四种区间都是开集,而且开区间和邻域 $U(a)$ 都是开集 .

又,设 F 是 $\mathbf{R}$ 的一个子集,若存在开集 E 使得 $F=\mathbf{R}\backslash E$,则称 F 是一个闭集 . 这就是说,闭集是开集的余集;反之,开集也是闭集的余集. 于是,闭区间 $[a,b]$,$(-\infty,b]$ 和 $[a,+\infty)$ 都是闭集 .

1.1.2　函数的基本概念

1. 函数的基本定义

为了引进函数概念,我们先来看如下几个实例:

例 1.1.1(自由落体运动)　设 $t=0$ 开始,一物体从某一高度自由下落,经过 t(s)后落下的距离为 s(m). 如果不计空气的阻力,则 s 与 t 之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

式中 $g = 9.8\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

设物体从开始到着地所需时间为 $T(\text{s})$，则变量 t 的变化范围为 $0 \leqslant t \leqslant T$. 当 t 在这个范围内每取一个值时，都可以从依存关系确定 s 的一个唯一确定的对应值．例如 $t = 1\text{s}$ 时，

$$s = \frac{1}{2}g \times 1^2 = 4.9(\text{m});$$

当 $t = 2s$ 时，

$$s = \frac{1}{2}g \times 2^2 = 19.6(\text{m}).$$

在该例中，变量之间的依存关系由一个确定的公式给出．应当指出，变量之间的依存关系并不一定由公式给出，下面两例则说明依存关系也可以由表格和图像给出．

例 1.1.2 如表 1-1-1 所示，记录了某河流在 40 年内的平均月流量 $q(10^8\text{m}^3)$ 和时间 t(月)之间的依存关系．

表 1-1-1

t/ 月	1	2	3	4	5	6
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72
t/ 月	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $q/10^8\text{m}^3$	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表 1-1-1 可见，当月份 t 每取一个值时，月流量 q 就由表可确定唯一的对应值．

例 1.1.3 如图 1-1-4 所示，是某气象站自动温度记录仪描出的某一天气温变化曲线，它给出了时间 t 和气温 t_1 之间的依存关系．

时间 t 的变化区间是 $0 \leqslant t \leqslant 24(\text{h})$，当 t 在这个范围内每取一个值时，由曲线可唯一确定温度 t_1(℃)的一个对应值．例如 $t = 14\text{h}, t_1 = 25$℃，这是一天的最高气温．

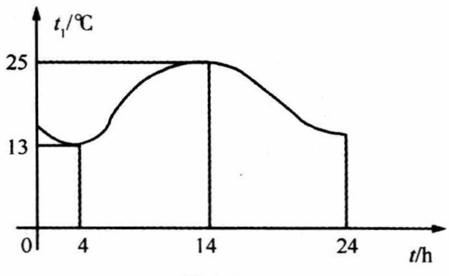

图 1-1-4

由以上各例可以看到，虽然它们所描述的问题中所考虑的量实际意义不同，但它们都表达了两个变量之间存在着依存关系，这种依存关系给出了一种确定的对应法则，依着这个法则，当一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量就按对应法则有一个确定值与之对应，两个变量之间的这种对应关系就是函数关系的实质．下面给出函数概念的定义．

定义 1.1.2 设数集 $D \subset \mathbf{R}, D \neq \varnothing$，如有 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射(对应规则) f，使得对于每个 $x \in D$，通过 f 可以确定唯一的数 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，如图 1-1-5 所示，则称 f 为定义在 D 上的一个函数，y 称为 f 在 x 点处的函数值，记作 $y = f(x)$.

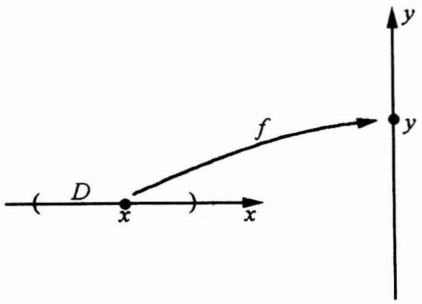

图 1-1-5

函数 f 可以表示为

$$f: D \to \mathbf{R}, x \mapsto y,$$

通常简单地表示为

$$y = f(x), x \in D,$$

x 称为自变量，y 称为因变量．y 与 x 的这种关系称为函数关系．D 称为函数 f 的定义域，记作 $D(f)$ 或 D_f．函数值的全体称为 f 的值域，记作 $R(f)$ 或 R_f，也可记作 $f(D)$，有时还用 Z 表示，所以

$$R(f) = f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

关于函数的定义域，我们需要说明的是，函数的定义域是函数概念的一部分，给定了函数，自然就给定它的定义域．但有两种情况需作补充说明．第一种情况是，在实际问题中，有关的函数的定义域由其自变量的实际允许变化范围确定；另一种情况是，在数学中常常不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用某个具体算式表示的函数，这时认为它的定义域就是由所有使得算式有意义的实数组成的集合，它称为该函数的自然定义域．例如，函数 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ 的自然定义域是 $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$，$y = \log_a(2 - x)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的自然定义域是 $(-\infty, 2)$．在给定了一个函数 f 的表达式后，如未说明其定义域 $D(f)$，则 $D(f)$ 就是 f 的自然定义域．

需要指出，严格地说，f 和 $f(x)$ 的含义是不同的，f 表示从自变量 x 到因变量 y 的映射或对应规则，而 $f(x)$ 则表示与自变量 x 对应的函数值，只是为了叙述的方便，常常用 $f(x)(x \in D)$ 来表示函数．为了减少记号，也常用 $y = y(x)(x \in D)$ 表示函数，这时右边的 y 表示对应规则，左边的 y 表示与 x 对应的函数值．

在数学中，通常用小写或大写的拉丁字母 $f, g, h, \cdots, F, G, H, \cdots$ 和小写或大写的希腊字母 $\varphi, \psi, \cdots \Phi, \Psi, \cdots$ 作为表示函数的记号．

读者还须注意的是，在函数的定义中，对于每个 $x \in D(f)$，对应的函数值 $y = f(x)$ 是唯一的（因此，也称为单值函数），而对于每个 $y \in \mathbf{R}(f)$，以之作为函数值的自变量 x 不一定唯一．例如，$y = x^2$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个函数，对于每个 $x \in \mathbf{R}$，对应的函数值是 x^2，它的值域是

$$Z = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y \mid y \geqslant 0\},$$

对于每个函数值 $y \in \mathbf{Z}, y \neq 0$，对应的自变量有两个，即 $x = \sqrt{y}$ 和 $x = -\sqrt{y}$．

从定义可以看到，确定一个函数有两个要素：定义域和对应规则（即映射）．如果有两个函数 f 和 g，即

$$y = f(x), x \in D_1$$

和

$$y = g(x), x \in D_2,$$

则 f 和 g 相同的充分必要条件是:它们的定义域 D_1 和 D_2 相同,且对应于同一自变量 x 的函数值 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等;即

$$f = g \Leftrightarrow D(f) = D(g) \text{ 且 } f(x) = g(x), \forall x \in D(f).$$

所以,$y = f(x)(x \in D)$和 $s = f(t)(t \in D)$是两个相同的函数.

又如,$f(x) = 2\lg x, g(x) = \lg x^2$,其中"lg"表示以 10 为底的常用对数"$\lg_{10}$",$D(f) = (0, +\infty)$,而

$$D(g) = \mathbf{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

故 $f \neq g$. 如仅限于在$(0, +\infty)$上讨论,则 $2\lg = \lg x^2$,即在$(0, +\infty)$上 $f(x) = g(x)$.

有时由于变量之间的函数关系较为复杂,需用几个式子来表示,这时不能把它们理解为几个函数,而应理解为由几个式子表示的一个函数,这样的函数称为分段函数. 例如,1g 冰由 -10℃上升到 10℃,它所吸收的热量 Q 与温度 t 之间存在着函数关系. 由于冰的比热容为 0.5×4.18J/(g·K),水的比热容为 1×4.18J/(g·K),1g 0℃ 的冰变成 0℃ 的水的溶解热为 80×4.18J,所以 Q 与 t 的函数关系为

$$Q = \begin{cases} 0.5 \times 4.18(t + 10), -10 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1 \times 4.18(t + 85), 0 < t \leqslant 10 \end{cases},$$

这一函数就是一个分段函数.

在坐标平面上,函数可以用一个图形表示.

设有函数 $y = f(x), x \in [a, b]$,对于每个 $x \in [a, b]$,可以确定 y 的一个值 $f(x)$,从而确定 xy 平面上的一个点 $P(x, f(x))$,当 x 遍历$[a, b]$中所有的值时,点 P 的轨迹

$$C = \{P(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in [a, b]$的图形,如图 1-1-6 所示.

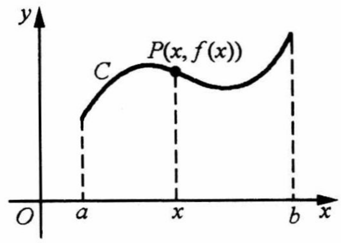

图 1-1-6

对于一般的函数 $y = f(x)(x \in D, D$ 不一定是一个区间),其图形为

$$C = \{P(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

一般地说,一个函数确定一个图形,反之,如果图形上不同的点的横坐标也不同(即任意两点的连线不平行于 y 轴)则这个图形也就确定一个函数.

例 1.1.4 求函数 $y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin\dfrac{2x - 1}{7}$ 的定义域.

解:这一问题其实是求两个函数之和的定义域,首先分别求出每个函数的定义域,再求出其公共部分即可. 要使$\sqrt{x^2 - x - 6}$ 有意义,只需 $x^2 - x - 6 \geqslant 0$,即$(x - 3)(x + 2) \geqslant 0$,解得 $x \geqslant 3$ 或者 $x \leqslant -2$.

而要使 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 有意义,只需 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right| \leqslant 1$,解得 $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

这两个函数的定义域的公共部分为 $-3 \leqslant x \leqslant -2$ 与 $3 \leqslant x \leqslant 4$,所以,所求函数的定义域为 $[-3,-2] \cup [3,4]$.

例 1.1.5　判断函数 $f(x) = |\cos x|$ 与 $g(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 是否表示同一函数并说明理由.

解:由于 $f(x) = |\cos x|$ 和 $g(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$,且对应法则相同,所以 $f(x) = |\cos x|$ 与 $g(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ 表示同一函数.

2. *函数的表示法*

一般地,函数有如下三种表示法:

(1) 解析法. 函数的对应法则用一个公式或解析式子表示. 如例 1.1.1 中的 $s = \dfrac{1}{2}gt^2$,解析法的优点是便于作理论研究与数值计算,但不直观.

(2) 表格法. 如例 1.1.2 中的依存关系表. 表格法的优点是便于直观查找,但不便于作理论研究,也不直观.

(3) 图示法. 如例 1.1.3 中的图 1-1-4. 图示法的优点是直观,但不便于作理论研究.

在实际应用中,往往是三种方法配合使用,对于用解析法表示的函数,我们常作出它的图形.

例 1.1.6　制作一个容积为定数 V 的圆柱形无盖水箱,其底面单位面积造价为 a,侧面单位面积造价为底面单位面积造价的 2 倍,试用解析法将总造价表示成底半径 r 的函数.

解:设圆桶用料的总造价为 P,则

$$P = a\pi r^2 + 2a \cdot 2\pi rh.$$

因为圆桶体积 $\pi r^2 h = V$ 是定数,由 $\pi r^2 h = V$ 解出 $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,则

$$P = a\pi r^2 + 2a \cdot 2\pi rh = a\pi r^2 + 4a\pi r\frac{V}{\pi r^2} = \pi a r^2 + \frac{4aV}{r},$$

其中,$r > 0$.

例 1.1.7　函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数,该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,函数图形如图 1-1-7 所示.

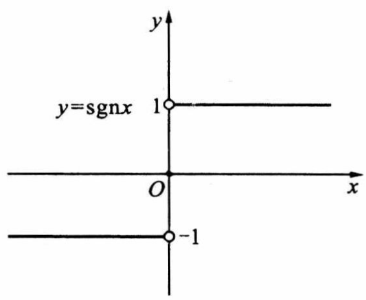

图 1-1-7

例 1.1.8 确定分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2,-1\leqslant x\leqslant 1\\2x,1<x\leqslant 3\end{cases}$$

的定义域并作出函数图像.

解:易知函数的定义域为$[-1,3]$,其图像如图 1-1-8 所示.

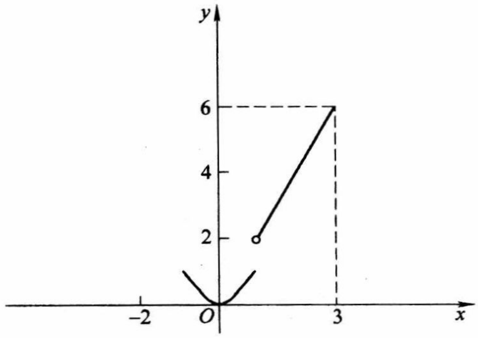

图 1-1-8

例 1.1.9 函数 $y=[x]$称为取整函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数,值域为$\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$. 该函数的图形如图 1-1-9 所示,为阶梯曲线,在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

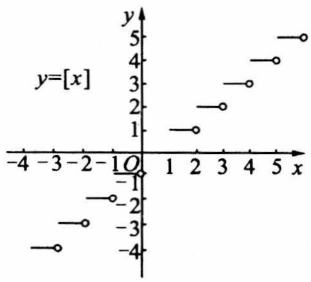

图 1-1-9

3. 函数的运算

函数可以作四则运算,详述如下:

设有函数

$$y=f(x),x\in D_1$$

和

$$y=g(x),x\in D_2,$$

且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则定义函数 f,g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 fg、商$\dfrac{f}{g}$ 为如下的函数:

(1)$(f+g)(x)=f(x)+g(x),x\in D.$

(2)$(f-g)(x)=f(x)-g(x),x\in D.$

(3)$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D.$

(4)$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},x\in\{x\,|\,x\in D,g(x)\neq 0\}.$

在实际应用中，常常不用抽象的函数记号，而直接依次表示为

(1) $y = f(x) + g(x), x \in D$.

(2) $y = f(x) - g(x), x \in D$.

(3) $y = f(x) \cdot g(x), x \in D$.

(4) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in \{x \mid x \in D, g(x) \neq 0\}$.

1.1.3　函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在某一实数集 D_1 上有定义(即 D_1 是 $f(x)$ 的定义域 D 的子集)，若存在常数 M(或 m) 使得不等式

$$f(x) \leqslant M(\text{或 } f(x) \geqslant m)$$

对所有 $x \in D_1$ 都成立，则称函数 $y = f(x)$ 在 D_1 上有上界(或有下界)，同时称 M 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个上界(或 m 为 $f(x)$ 在 D_1 上的一个下界). 若 $f(x)$ 在 D_1 既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 D_1 上有界，或 $f(x)$ 在 D_1 上是有界函数，否则，则称函数 $f(x)$ 在 D_1 上无界，或称在 D_1 上函数 $f(x)$ 是无界函数.

如三角函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的，因为对所有实数 x，有 $|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$. 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 无界(没有上界)，在区间 $[-1,1]$ 上有界. 函数 $y = -\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上无界(没有下界)，但在区间 $(1,3)$ 有界.

由上述讨论可知，函数 $f(x)$ 在 D_1 上有界当且仅当存在一个常数 $K > 0$，使得

$$|f(x)| \leqslant K, x \in D_1.$$

例 1.1.10　证明函数 $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的.

证明：因为 $(1 - |x|)^2 \geqslant 0$，展开可得

$$|1 + x^2| \geqslant 2|x|,$$

即

$$\frac{|x|}{|x^2+1|} \leqslant \frac{1}{2},$$

又对于一切 x 都有

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| = \frac{|x|}{|x^2+1|} \leqslant \frac{1}{2},$$

所以函数 $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $I \subset D_f$，对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2，如果当 $x_1 < x_2$ 时，不等式

$$f(x_1) < f(x_2)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增函数，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调递增区间，如图 1-1-10 所示，单调递增函数的图形是随着自变量 x 的增大，对应的函数值增大，是沿 x 轴正向上

升的；如果当 $x_1 < x_2$ 时，不等式

$$f(x_1) > f(x_2)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减函数，区间 I 称为 $f(x)$ 的单调减区间，如图 1-1-11 所示，单调递减函数的图形是随着自变量 x 的增大，对应的函数值减小，是沿 x 轴正向下降的．

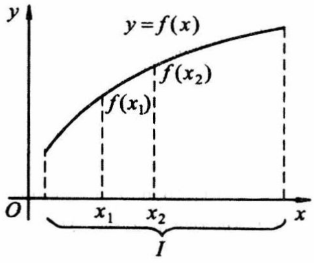

图 1-1-10

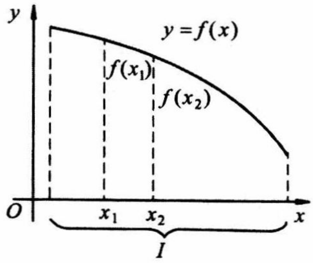

图 1-1-11

单调增函数和单调减函数统称为单调函数，单调递增区间和单调减区间统称为单调区间．函数的这种性质就是单调性．

例 1.1.11　确定下列函数的单调性．

(1) $y = x^3$.

(2) $y = x^2$.

解：(1) 容易验证 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的．因为，对于任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $x_1^3 < x_2^3$，如图 1-1-12 所示．

(2) $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数，如图 1-1-13 所示．

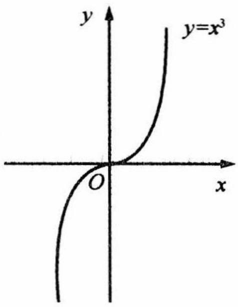

图 1-1-12

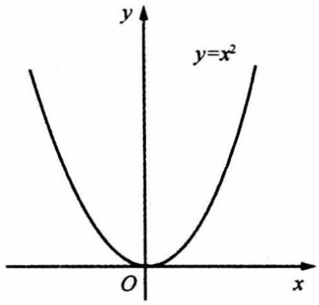

图 1-1-13

例 1.1.12　证明函数 $y = \dfrac{x}{x+1}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是单调递增的．

证明：令 x_1, x_2 为 $(-1, +\infty)$ 上任意两点，且 $x_1 < x_2$. 那么

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x}{x_1+1} - \frac{x}{x_2+1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)},$$

由于 x_1, x_2 为 $(-1, +\infty)$ 上任意两点，所以 $x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$，且 $x_1 < x_2$，所以

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0,$$