

《高等数学》同步练习册

(上册)

《高等数学》同步练习册编写组



A0967127

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》同步练习册.上册/谢惠扬等编著.

北京:高等教育出版社,2002.7

ISBN 7-04-010817-8

I. 高… II. 谢… III. 高等数学-高等学校-习题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028743 号

《高等数学》同步练习册(上册)

《高等数学》同步练习册 编写组

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
印 刷 北京民族印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 8.5
字 数 200 000

版 次 2002 年 7 月第 1 版
印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷
定 价 10.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步练习册,分为上下册。内容包括:一元函数微分学、一元函数积分学以及空间解析几何与向量代数;多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数和微分方程。

本书特点:

1. 本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序,针对书上每一个知识点,我们在每一节中配备了一定量的基本练习题和提高题,每一章最后配备一套测验题。在上、下册的最后还各配备了两套模拟期终考试题。旨在帮助同学们迅速而全面地掌握《高等数学》的内容。

2. 本书的形式为学生的作业本,一方面由于比较规范,便于任课教师批改;另一方面,减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留。

3. 本书不配备相应的答案或解答。旨在培养学生的独立思考能力和解决问题的能力。

本书是长期从事工科高等数学教师们对教学的一个重要环节——批改作业——的一个改革尝试,希望本书的出版,能对工科高等院校的学生和数学教师们具有切实的帮助。

本书适用于工科高等院校的本科生。

本套练习册第一章由北京林业大学谢惠扬编写,第二章由石油大学(北京)柴志明编写,第三章由北京林业大学徐凤琴编写,第四章由北京林业大学王小春编写,第五章由北京林业大学郎霞编写,第六章由石油大学(北京)谭立云编写,第七章由石油大学(北京)武清编写,第八章由华北电力大学何凤霞编写,第九章由华北电力大学吕蓬编写,第十章由华北电力大学邱启荣编写,第十一章由华北电力大学徐英凯编写,第十二章由华北电力大学彭武安编写。上册模拟试题由北京林业大学李霞编写,下册模拟试题由华北电力大学邱启荣编写,全书由谢惠扬统稿。

由于编者水平所限,错误在所难免,恳请同仁不吝指出,编者不胜感谢。

《高等数学》同步练习册编写组

2002年6月

目 录

第一章 函数与极限	(1)	第五节 函数的极植与最大值最小值	(41)	
第一节 映射与函数	(1)	第六节 函数图形的描绘	(45)
第二节 数列的极限	(3)	第七节 曲 率	(45)
第三节 函数的极限	(5)	第八节 方程的近似解	(46)
第四节 无穷小与无穷大	(6)	第三章测验题	(47)
第五节 极限运算法则	(7)	第四章 不定积分	(51)	
第六节 极限存在准则,两个重要极限	(8)	第一节 不定积分的概念与性质	(51)
第七节 无穷小的比较	(11)	第二节 换元积分法	(53)
第八节 函数的连续性与间断点	(13)	第三节 分部积分法	(57)
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	(15)	第四节 有理函数的积分	(59)
第十节 闭区间上连续函数的性质	(16)	第五节 积分表的使用	(61)
第一章测验题	(17)	第四章测验题	(63)
第二章 导数与微分	(21)	第五章 定积分	(65)		
第一节 导数概念	(21)	第一节 定积分的概念与性质	(65)
第二节 函数求导法则	(23)	第二节 微积分基本公式	(69)
第三节 高阶导数	(27)	第三节 定积分的换元法和分部积分法	(77)
第四节 隐函数的导数 由参数方程所确定的 函数的导数 相关变化率	(28)	第四节 广义积分	(87)
第五节 函数的微分	(30)	第五节 广义积分的审敛法, Γ -函数	(91)
第二章测验题	(31)	第五章测验题	(95)
第三章 微分中值定理与导数的应用	(33)	第六章 定积分应用	(99)		
第一节 微分中值定理	(33)	第二节 定积分在几何上的应用	(99)
第二节 洛必达法则	(35)	第三节 定积分在物理上的应用	(101)
第三节 泰勒公式	(37)	第六章测验题	(103)
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	(39)	第七章 空间解析几何与向量代数	(105)	
			第一节 向量及其线性运算	(105)

第二节 数量积 向量积	(107)	第六节 空间直线及其方程	(115)
第三节 曲面及其方程	(109)	第七章测验题	(117)
第四节 空间曲线及其方程	(111)	高等数学(上)期末模拟试卷(一)	(121)
第五节 平面及其方程	(113)	高等数学(上)期末模拟试卷(二)	(125)

第一章 函数与极限

重点：函数概念、初等函数、极限的概念、连续的概念极限运算、
初等函数的连续性。

难点：复合函数、极限概念。

第一节 映射与函数

1. 设 $A = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $B = [-7, 1)$, 写出 $A \cup B$,
 $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式。

2. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$, 证明

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$ 使 $g \circ f = I_X$,
 $f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即 $\forall x \in X$,
有 $I_X x = x$, $\forall y \in Y$, 有 $I_Y y = y$, 证明: f 是双射, 且 g 是
 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$, 证明:

(1) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(2) 当 f 是单射时, 有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

14. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

6. 函数 $y = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域是_____.

7. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则函数 $f(x+a) + f(x-a)$ ($0 < a < \frac{1}{2}$) 的定义域是_____.

8. 设函数 $f(x) = 2^x, g(x) = 5x + 1$, 则 $g[f(x) + x] =$ _____.

9. 下列各对函数中, 为相同函数的是().

(A) $f(x) = x\sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x^3-x^2}$

(B) $f(x) = x, g(x) = \arcsin \sin x$

(C) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2\ln x$

(D) $f(x) = 1 - \cos 2x, g(x) = 2\sin^2 x$

10. $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 0$) 的反函数为_____.

11. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上是单调增函数, 则

$f(-\pi)$ 与 $f(\log_{\frac{1}{2}} 8)$ 的大小关系是_____.

12. 函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ 的奇偶性为_____.

13. 函数 $f(x) = \tan(4\pi x + 3)$ 的最小正周期是_____.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = \ln x$, 求 $f[g(x)]$.

16. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元。厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元。

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数。
- (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数。
- (3) 某一商行订购了 1 000 台, 厂方可获利润多少。

第二节 数列的极限

1. 回答下列各问题。

- (1) 如果在 n 无限增大过程中, 数列 a_n 的各项越来越接近常数 A , 那么 a_n 是否一定收敛于 A ? ()
- (2) 设在常数 A 的无论多么小的 ϵ 邻域内密集着数列 a_n 的无穷多个点, 那么 a_n 是否一定收敛于 A ? ()
- (3) 有界数列是否一定收敛? ()
无界数列是否一定发散? ()
- (4) 单调数列是否一定收敛? ()
摆动数列是否一定发散? ()

2. 设 $a_n = \frac{3n+2}{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$.

- (1) $|a_1 - 3| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|a_{10} - 3| = \underline{\hspace{2cm}}$, $|a_{100} - 3| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 求 $N = \underline{\hspace{2cm}}$, 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - 3| < 10^{-4}$ 成立.
- (3) 求 $N = \underline{\hspace{2cm}}$, 使当 $n > N$ 时, 不等式 $|a_n - 3| < \epsilon$ 成立.

3. 根据数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 并举例说明反过来未必成立.

第三节 函数的极限

1. 下列说法正确的是().

- A. 函数在 x_0 点处无定义, 则在这一点必无极限
- B. 函数在 x_0 点处有定义, 则在这一点必有极限
- C. 若函数在 x_0 处有定义且有极限, 则其极限值必为该点函数值
- D. 在确定函数在 x_0 处的极限时, 对函数在 x_0 点是否有定义不作要求

2. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = 2x - 1 \rightarrow 3$, 问 $\delta = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 则当 $|x - 2| < \delta$ 时, 有 $|y - 3| < 10^{-3}$; 问 $\delta = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 则当 $|x - 2| < \delta$ 时, 有 $|y - 3| < \epsilon$.

3. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x}{x+1} \rightarrow 1$. 问 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 使当 $|x| > X$ 时, $|y - 1| < 10^{-3}$; 问 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 使当 $|x| > X$ 时, $|y - 1| < \epsilon$.

4. 根据函数极限定义证明: $\lim_{x \rightarrow 3} 3x + 1 = 10$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ -x+3, & 1 \leq x < \infty \end{cases}$, 试分别讨论 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$ 时的极限, 并画出函数的图形.

6. 设 $f(x) = \frac{1+2^{-\frac{1}{x}}}{1-2^{-\frac{1}{x}}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

第四节 无穷小与无穷大

5. 根据定义证明: $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 当 $x \rightarrow 2$ 时为无穷小.

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x)$ 均为无穷小量, 下列变量中, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 可能不是无穷小量的是().

- A. $\alpha(x) + \beta(x)$ B. $\alpha(x) - \beta(x)$
 C. $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ D. $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ($\beta(x) \neq 0$)

2. 下列命题正确的是().

- A. 无穷小量是一个很小的数
 B. 无穷大量是一个很大的数
 C. 无穷大量必是无界变量
 D. 无界变量必是无穷大量

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 是 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0$ 的().

- A. 无关条件 B. 充要条件
 C. 充分条件 D. 必要条件

4. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是().

- A. $\frac{|x|}{x} - 1$ ($x \rightarrow 0$) B. $\frac{1}{(x-1)^3}$ ($x \rightarrow 1$)
 C. e^x ($x \rightarrow 0+0$) D. e^x ($x \rightarrow 0-0$)

6. 根据定义证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1+3x}{x}$ 为无穷大.

第五节 极限运算法则

1. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3x-1)^3}{x^4(x+2)}$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

4. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \sin \frac{3}{x^2} + x \cdot \arctan \frac{1}{x} \right)$.

5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$.

6. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{1-x} \right)$.

7. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{3-x}}{x^2-1}$.

8. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+17}-n}{\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n^2-1}}$.

9. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$.

10. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b 的值.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2}$.

第六节 极限存在准则, 两个重要极限

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{3x} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$;

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{x+2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{x+2}$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \sin \frac{2}{x}} - 1 \right).$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{2}{x} + \frac{\sin 3x}{x} \right).$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\cos \frac{2}{x} - 1 \right).$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}.$$

4. 证明: 数列 $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3 + \sqrt{3}}, \dots, x_n = \sqrt{3 + x_{n-1}}, \dots$ 的极限存在, 并求其极限值.

5. 用极限存在准则证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

第七节 无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列函数哪一个是其它三个的高阶无穷小 ().

A. $x + x^2$ B. $1 - \cos x$ C. $\sin x$ D. $\ln(1 + x)$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $(\sqrt{1+x^2} - 1)$ 等价的无穷小量是 ().

A. x B. x^2 C. $2x^2$ D. $\frac{1}{2}x^2$

3. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x} - 1}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2\sin x)}{x}.$$

4. 利用等价无穷小的性质求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)^3}{x(1 - \cos x)}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right).$$