实数的构造理论

王建午 曹之江 刘景麟 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书的中心内容是介绍实数的构造理论．全书包括绪论、正文和附录三部分．绪论部分结合微积分学的思想发展史介绍实数构造理论产生的背景；正文共分四章：第一章简要地介绍有关集合论以及代数系方面的基本概念，作为预备知识．第二章扼要介绍自然数公理以及由自然数公理出发构造有理数域．第三章介绍实数的康托尔构造．第四章介绍实数的戴德金构造；附录部分分别介绍了实数公理系统、实数的p进位无穷小数表示、连分数及代数数和超越数．各章节末尾都附有一定数量的习题．

本书可供综合大学及师范院校数学系师生作教学参考书．

实数的构造理论

王建午 曹之江 刘景麟 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

黄冈报印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5 字数 115,000

1981年1月第1版 1981年6月湖北第1次印刷

印数 1—12,500

书号 13012·0555 定价 0.48 元

序

根据1977年秋季在上海召开的理科数学教材会议的建议，需要为综合大学和师范院校数学专业的数学分析课程，编写一本关于实数理论方面的补充教材或参考用书．本书就是在这一建议下写的．

本书的中心内容是介绍实数的构造理论．全书包括绪论、正文和附录三个部分．绪论主要结合了微积分学的思想发展史，来介绍实数构造理论产生的背景；以使得读者对于这一理论的来龙去脉和它在分析学中的地位，有一个历史的概括性的了解．

正文共分四章．第一章为预备知识，简要地介绍了有关集合论以及代数系方面的基本概念，以作为全书行文的准备，并使得本书在逻辑上自成系统(这样也便于自学的读者，能够独立地去阅读全书)．第二章扼要地介绍了自然数公理以及由自然数出发构造有理数域．因为实数是从有理数出发构造出来的，因此本章的内容，也就为下两章讲述本书主题实数的构造准备了逻辑基础，此外它也为了使得读者可以预先熟悉一下数系扩张的方法．

第三章为本章的中心内容，介绍实数的康托尔(Cantor)构造．这是一种从完备性要求出发而作出的实数构造法．本书所以要选择康托尔构造作为重点，是因为这种用等价关系进行集合的分类而构造出新数域的方法，在近代数学中有普遍的意义．本章对康托尔的实数构造论，进行了系统而详尽的叙述，最后并证明了实数完备性定理的各种形式，这样就使本书与现有的数学分析教材从逻辑关系上衔接了起来．

第四章介绍了实数的另一种构造——戴德金(Dedekind)构

造，这是一种从实数的连续性(完备性的几何形式)要求出发而作出的构造法．这种实数的构造由于几何直观性强、定义简明而为更多人所熟悉．在菲赫金哥尔茨所著《微积分学教程》一卷一分册(中译本)的绪论部分，就给出了实数这种构造的一个比较详细而又清晰的阐述，可以作为戴德金实数的基本教材．有鉴于此，因此本书在介绍戴德金构造时，就采取了一种不同的方式，即在没有引入实数的运算而仅有实数的顺序的情况下，完成了关于实数的连续性和完备性的所有定理的证明．本书的这种叙述方式，也许在一定的程度上，减弱了戴德金分割(Dedekind cuts)的直观形象，但却有利于读者对于极限及实数的连续性本质的深入理解．我们认为，对于勤于思索的读者来说，这也许是更有裨益的．至于戴德金实数的运算，则通过建立它与康托尔实数之间的保序同构对应来实现，这样也就避免了戴德金实数构造论中最冗繁的部分．当然，我们也可以不依赖于康托尔实数，去建立戴德金实数的运算(见本章习题)．因此本章和第三章，都可以独立地进行阅读．

附录分别介绍了实数的公理系统、实数的 p 进位无穷小数表示、连分数及代数数和超越数，目的是使有兴趣的读者，除了阅读本书的基本部分以外，还可以进一步接触一些实数理论方面生动而富有启发性并且有较高技巧性的内容．

本书各章节的末尾，都附有一定数量的习题，以便于读者进行自学．书的末尾附有参考书目．

本书是三人合力写成的，其中绪论、第一章、第二章和附录 4，由曹之江执笔，第三章由刘景麟执笔，第四章及附录 1、2、3，由王建午执笔，最后由刘景麟对全稿进行了统一修正．由于我们对本书内容教学实践不多，加上时间仓促，因此在书的编写体裁和内容安排上，不妥和错误之处，在所难免，特别是各章节习题部分，更是感觉不够完满，诚恳希望兄弟院校的同志们及广大读者，对我们提

出批评建议．我校陈杰教授，详细地阅读了本书全稿，提出了许多重要修改意见，使我们得以改正原稿中许多不当之处，在此表示深切地感谢．

编　者

1979 年 6 月于内蒙古大学

目　录

绪　论

数，是我们每天都要与之接触、须臾不能或离的对象．我们每一个人，从童稚之年开始，就学习与运用它．对于它，我们是如此之熟悉，以至于提起它，便犹如看见周围的山岳河川一样，感到亲近而明白．

但并不是每一个人，都考虑过一个问题：这些我们无时不在读、写、算的数，是从那里来的？也许我们有些人，并没有意识到，这些如山岳河川一样为我们所熟知的数，它们既非自然的天赋，更不是上帝的恩惠．

数，是人类文明的伟大创造．人类在争取生存、进行生产活动的长期实践中，创造了数．在几千年的历史中，人类对数的认识，经历了一个由表及里、由浅入深的过程．今天，我们所应用的数系，已经构造得如此完备和缜密，以致于在科学技术和社会生活的一切领域中，它都已成为一种基本的语言和必不可少的工具了．我们今天在得心应手地享用这份经过长期历史沿革的现成财富时，常常未曾想到前人在形成和发展数的过程中，所经历的曲折和艰辛．

数作为一种语言，同人类其他语言一样，是一种交际的工具．它也是人类在长期的生产和交换过程中逐渐形成的．要考查远古人类如何创造了数，当然无案可稽，因此今天我们也只好进行一些假想和猜测．人类的祖先在起初的时候，也许只会用物物逐一比较的办法，来分别多寡，以后则学会了将物与第三者（如人体上的手指、墙上的刻痕或悬挂的绳索等）来进行间接的比较，从而逐渐产生了不依附于具体对象的“个数”概念．以后随着生产和交换活

动的不断扩大，这种"个数"概念也就逐渐被赋予了某种记号或语音，这就产生了最早的数.

人类最初掌握的数，个数是很少的. 在近代尚残存的原始部落中，人们发现他们所掌握的数，均未超过二十，这大概与人的手指与足指的总数是二十有关. 某些原始部落能数的数，甚至不超过三. 随着人类社会的进步，数的语言也不断发展和完善，其中应当提一下的是进位记数法的产生. 所谓进位记数法，就是运用少量符号，通过它们不同个数的排列，去表示不同的数(例如现在通行的十进位法，就是用 0、1、2、…、9 这十个符号，通过它们的不同个数的排列，去表示所有的数). 进位记数法的产生，一方面使得记数的范围得到无限地扩大，另一方面，也使得复杂的算术运算，有了实施的可能(比如，没有十进位法，也就不可能有九九乘法表). 因此，进位记数法的出现，标志着人类掌握的数的语言，已从少量的文字个体，发展到了一个具有完善运算规则的数系. 人类第一个认识的这个数系，就是常说的"自然数系".

当然，今天我们用现代的眼光来考察问题，自然数系则还远不是完美无缺的. 由于自然数系是一个离散的、而不是稠密的数系(*)，因此作为量的表征，它只能限于去表示一个单位量的整倍，而无法去表示它的部分. 例如在一条线段上，自然数只能去表示那些较单位长是整倍的长度，而不能去表示它的一半、或若干份之一. 同时，作为一种运算手段而言，自然数系也表现出明显的缺陷. 在自然数系内部，只能施行加法和乘法，而不能自由地施行它们的逆运算，也就是说，方程 $x+a=b$ 和 $ax=b$ 在一般情况下，并不一定可解. 这种运算上的障碍，当然是极不方便的. 随着人类文明的发展，自然数系的缺陷，也就逐渐显露出来，这就促使人们

(*) 一个数系称为是稠密的，假如任意取这数系中两个数，必有第三个数介于其间.

将它加以扩充，以期得到一个稠密的、并且在加、减、乘、除四则运算下封闭的数系，这就是后来得到的有理数系.

人类认识数系的早期历史，由于年湮代远，已无从确切稽考了. 但是从有限的记载中，我们可以看到，在掌握了自然数以后，人们较早得到了分数. 所谓分数，就是把两个自然数相除所得之商(不论其能否整除)当作一个数，然后对其引进相应的运算法则，这样的数就形成了分数系. 容易证明，分数系是一个稠密的数系，它对于加、乘、除三种运算是封闭的. 为了使得减法运算在数系内部也通行无阻，人们后来又引入了负数和零，这样就把分数系扩展成了有理数系. 负数和零，虽然无从考究其产生的确切年代，但它们之被人们所普遍接受，则是较晚的事情. 在欧洲，负数虽然由阿拉伯较早传入，但是在十六、十七两个世纪内，绝大部分数学家并不承认它们是数，有人则称负数为"谬数".

有理数系，因为克服了自然数系的缺陷，相对来说，已是比较完美的数系. 由于有理数系具有稠密性，因此古希腊人曾设想它是同一条无限直线上的点相对应的、一个从小到大的量的连续排列的长河. 但是这种关于数的连续性的设想，这种算术与几何自然和谐的美妙图象，不久却被希腊人自己证明是完全错误的.

在纪元前五百年左右，古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras)学派发现了一个惊人的事实：一个正方形的对角线与其一边的长是不可公度的！换言之，若正方形的边长是一单位，则其对角线的长竟不是一个数(用现在的语言来讲，即$\sqrt{2}$不是一个有理数(*)). 这个不可公度性，与毕达哥拉斯学派的"万物皆为数"的哲理大相径庭，因此它的发现，引起了这个学派的人如此的惶恐与恼怒，以至

(*) 这事实可证明如次：用反证法. 设$\sqrt{2}=b/a$，其中a、b为互质的整数，则可得$b^2=2a^2$，由此推知b可为2整除. 令$b=2c$，代入上式可得$2c^2=a^2$，又可推知a可为2整除，这就与a、b为互质的假设矛盾.

据传发现这一事实的希勃索斯(Hippasus)，竟遭到沉舟身死的惩处.

毕达哥拉斯学派的发现，第一次向人们揭示了有理数系的缺陷，证明它不能同连续的无限直线等量齐观. 它告诉人们，有理数并没有铺满数轴，在数轴上存在着不能为有理数所表示的“孔隙”，而这种“孔隙”，经后来人证明，简直多得“不可胜数”.

这样，古希腊人把有理数视为是连续衔接的那种算术连续统的设想，就彻底地破灭了. 它的破灭，在以后两千多年时间内，对数学的发展，起到了深远的影响. 不可通约的本质是什么？长期以来众说纷纭，得不到正确的解释. 而两个不可通约量的比值，也一直被认为是不可理喻的数. 十五世纪利奥那多·达芬奇 (Leonardo da Vinci)把它们称为是“无理的数”，十七世纪伟大的天文学家开普勒(J. Kepler)在他的著作中，把它们称为“不可名状”的数. 这些“无理”而又“不可名状”的数，虽然后来在运算中亦被通用，但是它们究竟是不是实在的数，却一直是个困扰人的问题. 在十九世纪之前的漫长历史中，人们一直不把它们当作“真正的数”.

不可公度的发现，给数学的发展，带来了新的问题与困难. 既然不能克服它，那就只能回避它. 这大概是为什么从毕达哥拉斯以后的希腊数学，侧重于几何学的原故. 古希腊的几何学，采取了将几何与算术严格区分的办法，希腊数学家欧多克斯(Eudoxus)、欧几里得(Euclid)在他们的几何学里，都严格避免把数与几何量等同起来. 他们那种以直觉为基础的几何学，其几何关系的归纳与演绎，完全藉助于几何量本身来表述，而并不求助于数. 欧多克斯的比例论(见于欧几里得几何原本第五卷)，使几何学在逻辑上绕过了不可公度的障碍，这就在以后的漫长时期中，形成了几何与算术的显著分离.

但是这种几何与算术割裂、对不可公度讳莫如深的状况，是不

能长期继续下去的．这个问题，随着十七世纪以后，一门崭新数学——微积分的应运而生，显得更加突出了．

孕育于希腊时代的微积分的思想与方法，经过了漫长时期的酝酿，到了十七世纪，在工业革命的刺激下，终于通过牛顿(I. Newton)和莱伯尼兹(G. W. Leibniz)的首创脱颖而出了．以后又经过以欧拉(L. Euler)、拉格朗日(J. L. Lagrange)、达朗贝尔(J. L. D'Alembert)、拉普拉斯(P. S. Laplace)等为代表的一代数学家的发展和在各个应用领域的推广，取得了伟大的成功．然而，这个以磅礴气势向前发展的微积分学，其创建伊始，由于缺乏一个完备的数域作为其论域，因此只好将其演绎体系建立在以直观为基础的几何学与运动学的连续性上，这就形成了方法上有效但逻辑上不能自圆其说的矛盾局面．无怪有人认为，初期的微积分，与其说是一门立论严谨的学说，毋宁说是一种新颖的解题方法．

事实上，微积分方法的基础——无论是牛顿的"流数"，或者是莱伯尼兹的微分，在微积分创立后近两个世纪的时间内，一直遭到各种怀疑和非议．法国启蒙思想家伏尔泰(Voltaire)曾称微积分是一门"精确地计算和度量其存在无法想像的东西的艺术"．而牛顿的"流数"，则被英国主教贝克莱(B. Berkeley)讥笑为"逝去了量的鬼魂"．微积分学逻辑基础上的严重问题，虽然暴露了出来，但是并没有能够及早地得到解决．十七、十八两个世纪的数学家们，在数学的拓荒工作中，正取得前所未有的硕果，因而他们更热衷于向前走，没有感到需要回过头来，整理一下自己的基础．

到了十九世纪上半叶，分析学已经经历了近两个世纪非凡的历程，因此无论是在内容上或方法上，都已经是硕果累累．然而，在另一方面，却正如阿贝尔(N. H. Abel)在给友人的一封信中所抱怨的那样："在高等分析中，仅有极少数的定理是在逻辑上像样地叙述出来的．"数学分析已达到的巨大成就，与它那仍然是落后而

又混乱的逻辑基础,形成了极不相称的对照. 实际上,数学分析业已发展到了这样的阶段,它的那些新的、更加深刻的结果,凭着过去那样的、从几何与物理的直观出发来进行的粗略推证,已经是绝不能得到了. 那种十七、十八世纪流行的、使得现代人瞠目结舌的推理方法,已不能再适应数学分析继续前进的步伐. 这种情况,促使十九世纪的许多数学家,回过头去重整分析的逻辑基础.

十九世纪分析学理论基础的重建,主要以波尔查诺(B. Bolzano)、柯西(A. Cauchy)、阿贝尔、狄里克雷(P. L. Dirichlet)、维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)等人的工作为标志. 柯西被公认为是近代分析学的主要奠基人. 他在十九世纪二十年代陆续发表的三个著作中,革新了微积分中长期沿袭下来的模糊的旧观念,重整了它的理论,把它纳入到一个新的严密的理论体系之中. 在关于微积分基础的混沌一片的争议中,柯西看出核心的问题是极限. 这是一个自纪元前三百余年亚里士多德(Aristotle)将齐诺(Zeno)悖论(*)公诸于世以来,一直为人们争议不休的问题. 柯西第一次使极限观念摆脱了与几何和运动直观的任何牵连,给出了只建立在数与函数概念上的清晰的定义(这个定义后来为维尔斯特拉斯进一步精确叙述),从而使一个模糊不清的动态观念,变成为一个

(*) 齐诺(纪元前 495—435,死于死刑)是古希腊哲学家,提出过四条悖论,记载于亚里士多德全集中. 他的悖论与同时代毕达哥拉斯学派关于不可公度数的发现,引起了古代哲学家们很大思想上的动荡与长期的争论,对于二千年来数学思想的发展,有着深远的影响,被认为是数学思想发展史中的三大危机之一. 其悖论简介如下:

(i) 阿其里斯(希腊马拉松选手)永远追不上乌龟: 因为当阿其里斯跑到乌龟所在点,乌龟已爬到新的地点了,当他又跑到乌龟所在点,乌龟又到了新的地点,这样过程永无完结,所以永远追不上乌龟.

(ii) 两分法: 飞着的箭永远射不到靶,因为箭必须经过中点,再经过下一半路途的中点,而这样的中点是无穷尽的. 所以箭永远不能射到靶.

(iii) 飞箭: 飞着的箭是静止的,因为箭的每一瞬都只经过一点,而点的长度为0,因而无论多少点加起来都是 0.

(iv) 竞走: 假若空间和时间是由点和瞬间组成的,则即可证明,时间不可能由瞬间组成.

严密叙述的静态观念，这不能不认为是变量数学史上的一次重大创新．在极限有了严格定义以后，柯西就定义了令人费解的“无穷小”．他把无穷小规定为极限为0的变量，这样就把无穷小归入到了函数的范畴，再也不是混在阿基米得(Archimedes)数域(*)里的一个桀骜不驯的冥灵了．

在极限和无穷小重新定义的基础上，柯西进而澄清了存在于连续、导数、微分、积分、无穷级数…等概念上的模糊，从根本上革新了旧的理论系统，实现了微积分学基础的一次革命．柯西所创立的分析体系，虽然在语言叙述上，为后来维尔斯特拉斯进一步精确化，但其基本观念，为整个数学界所承认，并成为近代分析教程的基础内容．分析基础的这一革新，不仅为数学分析的进一步发展，奠定了稳固的基础，而且对整个近代数学的发展，产生了深远的影响．

当然，从现代的眼光来考虑，柯西等人所作的工作，尚有不严密与不完善之处．应该说，柯西等人构造了分析学逻辑体系的主要轮廓，而后来的人则最后完成了它．在柯西的工作中，最不足之处，是他对于数学分析立论的基础——实数，没有给出一个严格的定义．微积分是建立在极限运算基础上的变量数学，而极限运算，需要一个封闭的论域，正如算术四则运算，需要有一个封闭的数域一样．于是事情又回到了两千多年来未得解决的数域的连续性问题上来了．

无理数是什么？柯西对这个问题，作了一个表面的回答．他定义无理数就是有理数序列的极限．然而按照柯西的极限定义，所谓有理数序列有极限，意即预先存在一个确定的数，使它与序列中各数的差值，当序列趋于无穷时，可以任意小．但是，这个预先存在的“数”，又从何而来呢？这就产生了概念自身的循环．在柯

(*) 阿基米得数域是指满足如下条件的数域：对于域内任意两正数 $a<b$，必存在自然数 n，使 $na>b$．

西看来，有理数序列的极限，似乎是先验地存在的，这种想法，说明柯西尽管在许多地方见解超人，但仍然未能完全摆脱掉两千多年来以几何直觉为立论基础的传统观念的影响.

因此，必须在不依赖于极限的基础上，去独立地定义无理数，建立一个对于极限运算是完备的封闭数域，这对于奠定一门独立的分析学的严密基础，是绝对不可缺少的. 数学分析须要彻底地从几何直觉中解脱出来，建立起自己独立的体系. 直观，常常是我们思考问题的导引，但是，正如波尔查诺、维尔斯特拉斯所举出的连续不可微函数的例子对人们作出的启示那样，它并不总是可靠的.

变量数学独立建造自己完备数域的历史任务，终于在十九世纪后半叶，由维尔斯特拉斯、梅莱(C. Méray)、戴德金 (R. Dedekind)、康托尔(G. Cantor)等人加以完成了. 这个完备的数域，就是实数域. 实数域的构造成功，使得两千多年来存在于算术与几何之间的鸿沟，得以完全填平，无理数不再是"无理的数"了，古希腊人的算术连续统的设想，经过两千多年时间以后，终于在严格的科学意义下得以实现. 新生的微积分学，经过了一段曲折的道路，现在彻底驱散了笼罩的疑云，步入了一个崭新的历史阶段.

本书的第三、四章，对于完备的实数域，将系统地介绍两种独立的、然而是等价的构造法，即康托尔和戴德金的构造法.

应当指出，实数域的构造成功，并没有终止人们对于数系的认识. 本世纪六十年代，美国数理逻辑学家罗宾逊(A. Robinson)提出了一种非标准数的理论，这个理论应用了近代数理逻辑的成果，用严密的推理，将实数域扩充成一个更广的非阿基米得数域. 人们有趣地发现，被柯西从数域中排除出去的无穷小，经过否定之否定，现在又回到数域中来，并占据了合法的席位，就如今天的无理数占据着实数域中合法的席位一样. 关于非标准数的理论，由于涉足较远，已超出本书范围，有兴趣的读者可参阅有关的书刊[14].

第一章 预备知识

§1 集合及其运算

集合是由一些我们能够辨认的对象所组成的(*). 所谓"能够辨认",是指我们有一定的准则或办法,据此可以对任一对象,判断其属于或不属于这个集合. 任何对象,要就属于这个集合,要就不属于这个集合,二者必居其一且仅居其一. 属于集合的对象,就称为该集合的元素. 例如:

1) 能被2整除的自然数的全体,组成一个数的集合. 每个正偶数都是这个集合中的一个元素,而其它的数都不属于这个集合.

2) 坐标x、y满足不等式$x<y$的点(x, y)的全体,组成坐标平面上的一个点的集合,而在直线$x=y$上方的每一个点, 都是这集合中的元素.

3) 区间$[0, 1]$上的连续函数的全体,组成一个函数的集合,定义在$[0, 1]$上的每一个连续函数,就是这集合的一个元素.

习惯上,常以A、B、C、…等表示集合,而以a、b、c、…或α、β、γ、…等表示集合的元素. 若a为集合A的一个元素,则称a属于A,记为$a \in A$. 否则,就称a不属于A,记为$a \overline{\in} A$.

一个集合, 我们可以用穷举其元素于一花括弧内的办法去表示它,如$A=\{a, b, c, \cdots\}$. 在更多的场合,我们常通过列出这集合

(*) 从逻辑学观点看,整个数学就是集合论和它的推论. 近一个世纪来, 集合论得到了很大的发展, 建立了各种公理系统. 由于本书的主旨是讨论实数的构造,因此我们将避免涉及集合论的一些较深入的问题. 本章将对集合论的一些基本概念,进行描述性的介绍,以满足以后章节行文的需要.