普通高等教育"十二五"规划教材

经济数学

蒋秋浩　郑桂梅　主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

经济数学

主　编　蒋秋浩　郑桂梅
副主编　盛海林　茹原芳　李雪玲

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据2014年教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求》，参考研究生入学考试大纲，结合教学实践、教学改革编写而成.

全书共九章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微分学，二重积分，无穷级数，微分方程与差分方程等. 书中每章最后配有适量的习题，书末附有习题答案与提示、积分表及常用初等数学公式.

本书可作为高等本科院校经济管理类、医学类、农林类等相关专业学生的教材用书.

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 蒋秋浩，郑桂梅主编. 一北京：科学出版社，2016
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-047643-2

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①蒋…②郑… Ⅲ. ①经济数学－高等学校－教材
Ⅳ. ①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第049125号

责任编辑：李淑丽 孙翠琴 / 责任校对：李 影
责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
天津市新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年3月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2016年3月第一次印刷 印张：19
字数：450 000

定价：42.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

经济数学是高等学校经济和管理类本科学生必修的一门重要的基础课.编者在根据 2014 年教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求》,参考研究生入学考试大纲的基础上,并充分汲取相关本科院校在培养技术应用型人才方面的经验,最终结合自己多年的教学经验精心编写了本书.

本书共九章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数微分学,二重积分,无穷级数,微分方程与差分方程等.

本书的特点是突出重点、深入浅出、紧密结合教学实际;针对不同专业的学生,配有各种应用型例题,以增强学生的应用能力;讲述基本公式、概念、方程和定理的过程中,注意其几何图形直观的阐述;较广泛地用实例引入抽象概念的讲解,让学生理解起来更加容易;目的在于培养学生的实际动手能力,使学生更加适合用人单位的技能要求.建议一般不低于 160 学时,其中标 * 的部分,供教师根据教学的需要及可利用学时数进行选讲.

参加本书编写的有蒋秋浩、盛海林、郑桂梅、茹原芳、李雪玲等,在本书编写的过程中,数学教研室的同事给予了很多帮助和指导,提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢.

由于编写时间仓促,编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

2015 年 8 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

微积分是数学发展史上的里程碑，是大学数学基础课程的主要内容. 微积分的主要研究对象是函数，函数描述了客观世界中量与量之间的依赖关系. 极限既是用来刻画变量在变化过程中变化趋势的一个基本概念，又是研究高等数学的重要工具和思想方法. 连续是函数的一种重要性态，也是高等数学中的一个主要研究对象，用极限方法研究函数是高等数学区别于初等数学的一个显著标志. 本章将在中学函数知识的基础上，深入对函数概念的分析，介绍函数的极限及函数的连续性的基本知识.

第一节　函　　数

一、区间和邻域

区间是微积分中常用的实数集，它表示一个变量的变化范围. 下面介绍一些常用区间记号.

设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，但不包括端点 a 及端点 b.

集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，包括两个端点.

还有其他类似的区间：

集合 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 记为 $(a,b]$，称为左开右闭区间.

集合 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 记为 $[a,b)$，称为左闭右开区间.

上述两个区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 统称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段.

此外还有无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限区间表示如下：

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x|x\text{ 为任意实数}\}$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的问题时，就简单地称它为“区间”，且常用 I 来表示.

下面引入邻域的概念.

设 a 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$，则称数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 或 $\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$ 为点 a 的 **δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，并称点 a 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径. 如图 1-1 所示.

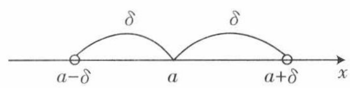

图 1-1

因为$|x-a|$表示点x与点a间的距离，所以$U(a,\delta)$表示与点a距离小于δ的一切点x的全体. 实际上，邻域就表示以点a为中心的开区间.

点a的δ邻域去掉中心点a后的集合，称为点a的δ去心邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$，并且$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$，其中$0<|x-a|$就表示$x\neq a$.

设a与δ是两个实数且$\delta>0$，则称数集$\{x|a<x<a+\delta\}$与$\{x|a-\delta<x<a\}$为别是点a的右δ邻域与点a的左δ邻域，分别记为$U_+(a,\delta)$，$U_-(a,\delta)$.

二、函数的基本概念

在人们日常生活实践中，经常遇到表示不同事物的量，在某个问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；而在某个问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同的值的量，称之为变量. 例如，某个广场的面积是保持不变的，是常量，而每天来广场跳广场舞的大妈的人数是不同的，因而是变量. 在研究实际问题的过程中，常常发现有几个变量同时变化，它们之间具有某种确定的关系.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为t，下落的距离为s，如果取开始下落的时刻$t=0$，那么s和t之间的依赖关系由公式$s=\frac{1}{2}gt^2$（g为重力加速度）表示，若物体到达地面的时刻$t=T$，则在时间区间$[0,T]$上任取一个数值时，由上面的公式都可以确定出s的对应值.

上面例子所描述的变化过程有两个变量，当其中一个变量在一定变化范围内取定一个数值时，按照某一确定的法则，另一个变量有唯一确定的数值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系，在数学上就是函数的关系.

定义 1　设x和y是两个变量，D是一个给定的非空实数集，如果对于每个数$x\in D$，按照一定的对应法则f，变量y总有唯一确定的实数值与之对应，则称变量y是变量x的函数，并记为$y=f(x)$，$x\in D$，其中x称为自变量，y称为因变量，实数集D称为这个函数的定义域.

函数定义中，对于每个$x\in D$，按照某种对应法则f，总存在唯一确定的实数值y与之对应，这个实数值y称为函数f在x处的函数值，记为$f(x)$，即$y=f(x)$. 当x遍取实数集D的每个数值，对应的函数值的全体组成的数集$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域. 其中记号f和$f(x)$的含义是不同的，f表示自变量x和因变量y之间的对应法则，而$f(x)$表示与自变量x对应的函数值.

如果$x_0\in D$，则称函数在点x_0处有定义；如果$x_0\notin D$，则称函数在点x_0处无定义. 当$x=x_0$时，函数值为y_0，记为$y_0=f(x_0)$. 如果函数在某个区间I上每一点都有定义，就说这个函数在该区间I上有定义.

由函数定义可以看出，函数的定义域和对应法则是函数的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，则称这两个函数相同，否则就不同. 例如，函数$y=\sqrt{x^2}$与$y=|x|$，

它们的定义域均为实数集 **R**，且其对应法则相同，因此，它们是两个相同的函数，但对于函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域，但当 $x<0$ 时，两个函数的对应法则不同，所以它们是两个不同的函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，这时约定函数的定义域就是使得这个式子的运算有意义的所有实数值. 这种定义域又称为函数的自然定义域.

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $3-x>0$，即 $x<3$. 所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域为 $\{x\mid x<3\}$.

例 2　求函数 $y=\ln\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\dfrac{x}{x-2}>0$，即 $x>2$ 或 $x<0$. 所以函数 $y=\ln\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

函数的表示法多种多样，它反映了各种变量之间关系. 表示函数的方法主要有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）.

表格法可以直接从自变量查找对应的函数值，方便做统计数据、经济分析. 函数也可以由平面上的曲线表示，函数的主要特征在图上一目了然. 在用解析法表示函数时，有些函数在整个定义域范围内，可以用一个数学式子表示，但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示. 这类函数称为**分段函数**. 分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集. 求分段函数值时，应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1,\\ -x-1, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$，下面举几个分段函数的例子.

例 3　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

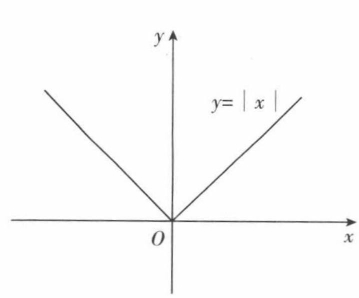

图 1-2

例 4　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0.1\}$，它的图形如图 1-3 所示.

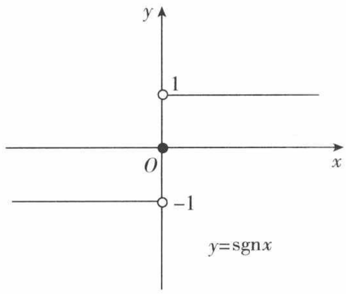

图 1-3

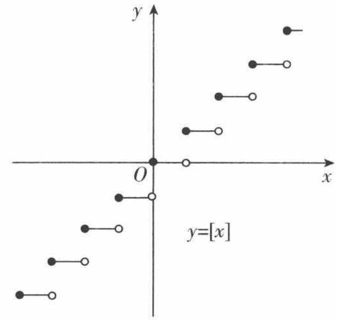

图 1-4

例 5　函数 $y=f(x)=[x]=n, n\leqslant x<n+1$，其中 n 为整数，记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如，$\left[\dfrac{3}{5}\right]=0, [\sqrt{3}]=1, [\pi]=3, [-1]=-1, [-4.6]=-5$.

显然，函数 $y=[x]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数，它的图形如图 1-4 所示，称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，函数 $y=[x]$ 称为取整函数.

三、函数的几种特性

1. 单调性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数，若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数，则称 I 是该函数的单调区间. 若沿着 x 轴的正方向看，单调增加函数的图形是一条上升的曲线；单调减少函数的图形是一条下降的曲线.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调增加函数，在 $(-\infty,0]$ 上为单调减少函数，但是，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调函数. 如图 1-5 所示. 又如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的. 如图 1-6 所示.

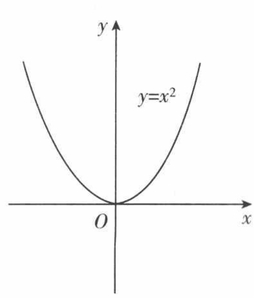

图 1-5

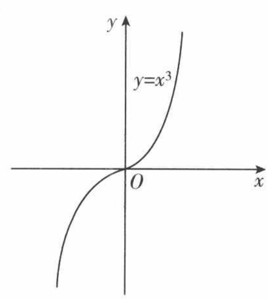

图 1-6

例 6　用定义证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则有

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= \frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1} \\ &= \left(1-\frac{1}{1+x_2}\right)-\left(1-\frac{1}{1+x_1}\right) \\ &= \frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2} \\ &= \frac{(1+x_2)-(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)} \\ &= \frac{x_2-x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}>0, \end{aligned}$$

即

$$f(x_1)<f(x_2),$$

故函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

2. 有界性

定义 3　设函数 $f(x)$的定义域为 D.

(1)如果存在一个常数 m,使得对于任意 $x\in I\subset D$,恒有 $f(x)\geqslant m$,则称函数 $f(x)$在 I 上有下界且 m 就是 $f(x)$的一个下界;

(2)如果存在一个常数 M,使得对于任意 $x\in I\subset D$,恒有 $f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 I 上有上界且 M 就是 $f(x)$的一个上界;

(3)如果存在两个常数 m 与 M,使得对于任意 $x\in I\subset D$,恒有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 I 上有界.

这个定义表明,函数 $f(x)$在 D 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界.

如果记 $\max\{|m|,|M|\}=K$,那么可得到一个等价定义:如果存在一个常数 $K>0$,使得对于任意 $x\in I\subset D$,恒有 $|f(x)|\leqslant K$,则称函数 $f(x)$在 I 上有界. 如果这样的 K 不存在,就称函数 $f(x)$在 I 上无界. 换句话说,如果对于任何正数 K,总存在一个 $x_1\in I$,使得 $|f(x_1)|>K$,则函数 $f(x)$在 I 上无界.

例如,$y=\cos x$,在区间$(-\infty,+\infty)$上就是有界函数. 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有$|\cos x|\leqslant 1$.

又如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(1,5)$内是有界的,但函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内就无界. 因为对于任意正数 M,总能找到一个数 $x_1=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$,使得 $f(x)=\dfrac{1}{x_1}=M+1>M$,从而 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界.

单调性和有界性是关于函数在所讨论区间上的概念,不能离开区间来谈函数的单调性和有界性.

3. 奇偶性

定义 4　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=$

$f(x)$成立，则称 $f(x)$为偶函数. 如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$成立，则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，如图 1-7 所示；奇函数的图形关于原点是对称的，如图 1-8 所示.

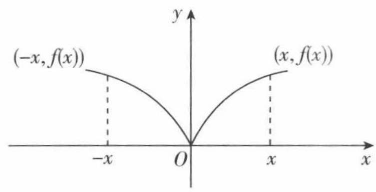

图 1-7

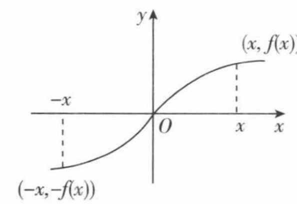

图 1-8

例如，函数 $f(x)=\cos x$，$f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$都是偶函数，因为 $\cos(-x)=\cos x$，$(-x)^2=x^2$. 又如，函数 $f(x)=\sin x$，$f(x)=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$都是奇函数，因为 $\sin(-x)=\sin x$，$(-x)^3=-x^3$. 而函数 $f(x)=x+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上既不是奇函数，也不是偶函数. 因 $f(-1)=0$，$f(1)=2$，既无 $f(-1)=-f(1)$，也无 $f(-1)=f(1)$.

例 7　证明函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数.

证　因为

$$\begin{aligned}
f(-x)&=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\
&=\lg\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\
&=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\
&=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})\\
&=-f(x).
\end{aligned}$$

所以，函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数.

例 8　证明定义在关于原点对称的区间上任何函数 $f(x)$都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证　令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

因为

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x),$$

所以 $\varphi(x)$是偶函数，$\psi(x)$是奇函数，而

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\varphi(x)+\psi(x),$$

故函数 $f(x)$都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

4. 周期性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任何 $x\in D$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$ 且 $(x\pm T)\in D$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常情况下，我们说的周期是指最小正周期. 但并非每个周期函数都存在最小正周期.

例如，函数 $\sin x,\cos x$ 是周期函数，最小正周期都是 2π；函数 $\tan x,\cot x$ 是周期函数，最小正周期是 π，但是，函数 $f(x)=C$（C 为常数），存在 $T>0$，使得 $f(x\pm T)=f(x)$，但这样的周期 T 无最小正值.

例 9　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易验证狄利克雷函数是一个周期函数，任何有理数都是它的周期，因为不存在最小的有理数，所以它没有最小正周期.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y=x+5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x=y-5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数.

下面给出反函数的具体定义.

定义 6　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y\in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好唯一确定出一个 $x\in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记为 $x=g(y)$，我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数，习惯上将 $x=g(y)$ 记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$. 由反函数的定义知，在定义区间上单调的函数必有反函数.

例如，函数 $y=\sin x,x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y,y\in[-1,1]$，故 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$.

若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图形是关于 $y=x$ 对称.

一般地，要求 $y=f(x)$ 的反函数，只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，当该表达式也是一个函数时，再将其中的字母 x,y 进行交换即可.

例 10　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，解得 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$，及

$$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1},$$

故 $e^y+e^{-y}=2x$，于是 $x=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$，故所求反函数为

$$y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad x\geqslant 0.$$

判断函数的反函数是否存在,可以用以下定理.

定理　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 W 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在,且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是单调增加或单调减少的.

值得注意的是,由于对于 y 的某些值,满足 $y=f(x)$ 的 x 有时不止一个,所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数.但是,当对 x 的取值范围加以限制时,也有可能存在反函数.例如,函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数,但在 $(-\infty,0)$ 及 $[0,+\infty)$ 内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x}$,$0<x<+\infty$ 及 $y=\sqrt{x}$,$0\leqslant x<+\infty$.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 11　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$,则由反函数的定义,得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3y, & -\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3},\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4.\end{cases}$$

将 x,y 互换,得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3},\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

2. 复合函数

设函数 $y=\sin x^2$,用 u 表示 x^2,那么函数 $y=\sin x^2$ 就可表示成 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$.这说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.具有上述关系的函数,可以给出下面的定义.

定义 7　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,$u\in D$,u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)(u\in I)$,其中 $I\in D$,就称 y 是 x 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与函数 $y=f(u)$ 的定义域有交集时,才能构成复合函数,否则复合就没有意义.

例如,$y=e^{\cos x}$ 是由 $y=e^u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成,$y=(1+\lg x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+\lg x$ 复合而成的,但函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=3+x^2$ 不能构成复合函数,因为对于任意的 x,$u=3+x^2$ 的值不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内,从而复合出的函数 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是没有意义的.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成,也可以推广到有限个函数复合的情形,例如,$y=\tan u$,$u=v^2$,$v=x-1$,则复合函数是 $y=\tan(x-1)^2$,其中 u,v 是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数.

例 12　写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=a^{a^{x}}$；　　(2) $y=\cos^2 x^2$；

(3) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$；　　(4) $y=\lg(3+\sqrt{x^3-1})$.

解　(1) $y=a^u, u=a^x$.

(2) $y=u^2, u=\cos w, w=x^2$.

(3) $y=\ln u, u=\sqrt[5]{v}, v=\dfrac{w}{w-1}, w=e^t, t=2x$.

(4) $y=\lg u, u=3+w, w=\sqrt{v}, v=t-1, t=x^3$.

例 13　设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x>1, \\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1, \end{cases}$ $g(x)=e^x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解　因为 $f(x), g(x)$ 符合复合条件，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases} e^x, & x>0, \\ e^{-x}, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases} e^x, & x>1, \\ e^{\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

求分段函数的复合函数时，特别要注意不同范围内的自变量，中间变量及函数之间的依赖关系.

五、初等函数

在初等数学中已经学习过下面几类函数.

(1) 幂函数：$y=x^\alpha$（$\alpha\in\mathbf{R}$ 是常数）.

(2) 指数函数：$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

(3) 对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）.

(4) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

以上五类函数统称为基本初等函数.

具体讨论如下：

1) 幂函数 $y=x^a$（a 为任何实数）

当 a 为不同实数时，幂函数的定义域及性质也随之变化，因而情况比较复杂. 但不论 a 为何值，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且图形都经过 $(1,1)$ 点.

当 a 是正整数或零时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，如 $y=x, y=x^2$ 等（图 1-9）.

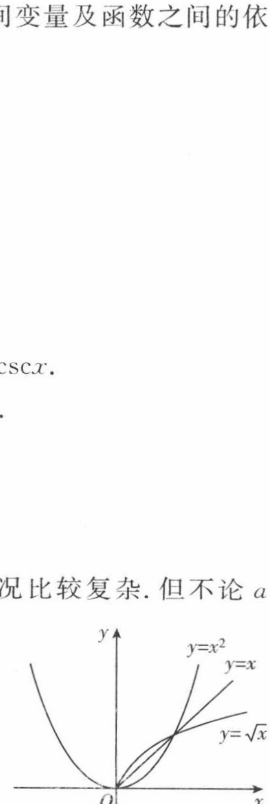

图 1-9

当 a 是负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，如 $y=\dfrac{1}{x}$ 等（图 1-10）.

当 a 是有理数 $\dfrac{q}{p}$ 时，若 $\dfrac{q}{p}>0$，p 为偶数，则定义域为 $[0,+\infty)$. 例如，$y=\sqrt{x}$（图 1-9）. 若 p 为奇数，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，例如，$y=x^{\frac{2}{3}}$（图 1-11）；若 $\dfrac{q}{p}<0$ 时，则还需要去掉 $x=0$ 的点.

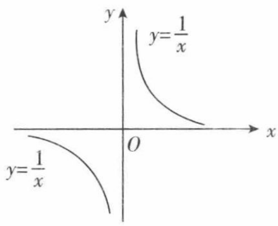

图 1-10

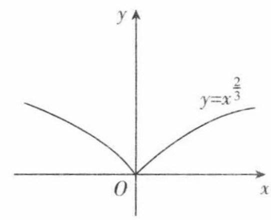

图 1-11

此外，当 a 为偶数时，x^a 为偶函数；当 a 为奇数时，x^a 为奇函数. 在 $[0,+\infty)$ 上，当 $a>0$ 时，$y=x^a$ 是严格单调增加的；当 $a<0$ 时，$y=x^a$ 是严格单调减少的.

2）指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$. 无论 a 取何值，函数图形均经过 $(0,1)$ 点. $a>1$ 时，a^x 是严格单调增加函数；$0<a<1$ 时，a^x 是严格单调减少函数（图 1-12）.

指数函数的常用运算性质：$(a>0,b>0)$

(1) $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$； (2) $a^m \div a^n=a^{m-n}$；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$； (4) $(ab)^m=a^m b^m$.

3）对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数，定义域为 $(0,+\infty)$，当 a 取任何不为 1 的正常数时，函数均经过 $(1,0)$ 点. 当 $a>1$ 时，函数严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少（图 1-13）.

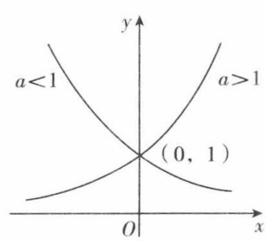

图 1-12

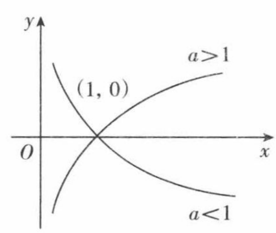

图 1-13

对数函数的常用运算性质：$(a>0,a\neq 1)$.

(1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$； (2) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$；

(3) $\log_a x^k=k\log_a x\ (x>0)$； (4) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$；

(5) $a\ \log_a x=x$； (6) $\log_a 1=0$.

4）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，由 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，它们都是有界函数，图

形在直线 $y=\pm1$ 之间. 曲线 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调上升,曲线 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调下降(图 1-14).

$y=\tan x$ 的定义域为除去 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的全体实数,是以 π 为周期的周期函数. 由于 $\tan(-x)=-\tan x$,故为奇函数(图 1-15).

$y=\cot x$ 的定义域为除去 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的全体实数,是以 π 为周期的周期函数,且为奇函数(图 1-16).

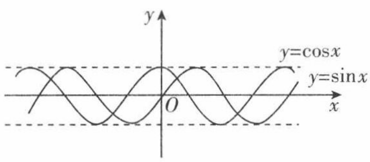

图 1-14

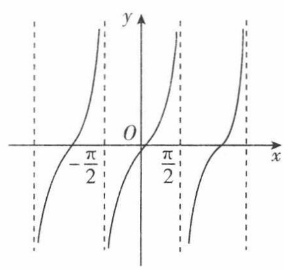

图 1-15

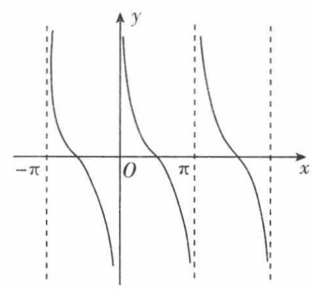

图 1-16

$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,其定义域为除去 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数(图 1-17).

$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,其定义域为除去 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的全体实数,是以 2π 为周期的周期函数(图 1-18).

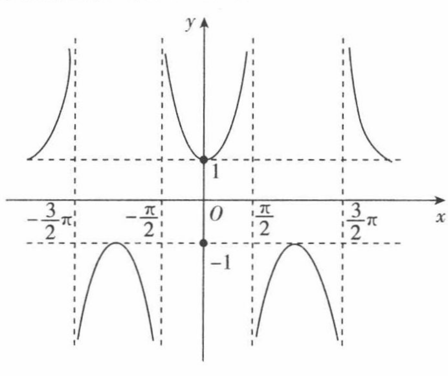

图 1-17

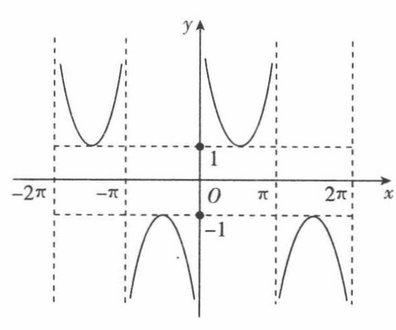

图 1-18

5) 反三角函数 $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$

$y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数,其定义域是 $[-1,1]$,值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,并在定义域上(严格)单调增加(图 1-19).

$y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,其定义域是 $[-1,1]$,值域是 $[0,\pi]$,并在定义域上(严格)单调减少(图 1-20).