非线性最优化问题

——对偶性理论及相关分析

FEIXIANXING ZUIYOUHUA WENTI
DUIOUXING LILUN JI XIANGGUAN FENXI

孙祥凯 / 著

西南交通大学出版社

FEIXIANXING
ZUIYOUHUA WENTI
DUIOUXING LILUN JI XIANGGUAN FENXI

非线性最优化问题

——对偶性理论及相关分析

孙祥凯／著

西南交通大学出版社
·成 都·

内容简介

本书为作者多年来部分研究成果的概括与总结，主要介绍了DC无限优化问题，复合优化问题以及带有复合函数的DC优化问题的若干对偶性理论. 同时也介绍了几类分式优化问题的 Farkas 型结果，序列最优性条件以及鲁棒对偶性理论. 全书共分 7 章. 其中第 1 章至第 3 章介绍了含有不等式约束的 DC 无限优化问题，无约束复合优化问题以及带有复合函数的DC优化问题的若干对偶性及其相关问题；第 4 章至第 7 章介绍了无约束分式优化问题和带有 DC 函数的约束分式优化问题的若干 Farkas 型结果，约束分式优化问题的序列最优性条件以及不确定分式优化问题的鲁棒对偶性.

本书不仅适用于运筹学专业以及经济管理类专业研究生阅读，而且对从事应用数学、经济管理、优化理论与应用以及决策分析与方法等方面研究的高校教师和科研机构人员也有一定的参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

非线性最优化问题：对偶性理论及相关分析 / 孙祥凯著. —成都：西南交通大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5643-4567-9

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①非线性－最优化算法－研究②对偶性－研究 Ⅳ. ①0224②0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 031884 号

非线性最优化问题

——对偶性理论及相关分析

孙祥凯 著

*

责任编辑 张宝华

封面设计 墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

四川省成都市二环路北一段 111 号西南交通大学创新大厦 21 楼

邮政编码：610031 发行部电话：028-87600564

http: //www.xnjdcbs.com

成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm × 230 mm 印张：10

字数：180 千字

2016 年 3 月第 1 版 2016 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5643-4567-9

定价：42.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

前 言

非线性最优化问题是当今最优化领域的重要组成部分，它的研究不仅具有十分重要的理论意义，而且在经济管理、工程设计、通信网络、数据分类、自动控制等实际领域也具有十分广泛的应用前景．一般来说，由于实际问题中涉及的非线性最优化模型本身的复杂性，我们很难直接求其最优解和最优值，而是只能借助数值方法求其近似值或近似解．目前非线性最优化问题的求解方法很多，其中对偶方法是一种行之有效，并且应用广泛的方法．对偶方法不是直接去解决原问题，而是解决其替代问题——对偶问题．由于对偶问题一般都是无约束问题，并且其结构比原始问题更简单、求解更简洁，因此对偶方法在求解非线性最优化问题中起着十分重要的作用．当前由于许多学者的杰出工作，非线性最优化问题的对偶性理论与方法及其应用研究已取得重要进展，并日益完善．

本书编写的目的是将作者近几年来在非线性最优化问题（包括 DC 无限优化问题，复合优化问题，带有复合函数的 DC 优化问题以及分式优化问题）的对偶性理论与方法及其相关问题方面所取得的一些最新进展，系统地向读者做一介绍．本书所介绍的相关理论不仅涉及凸分析、非光滑分析、集值分析、变分分析等多个学科的集成和综合应用，而且可以广泛应用于经济管理系统、网络通信系统以及国防系统等，并为决策分析提供技术保障和理论依据．

本书在撰写过程中，参考了大量国内外的期刊论文、书籍等资料，作者已尽可能地将其罗列在参考文献中．但因文献很多，而且篇幅有限，难免有所遗漏，因此特向未能写出的作者表示深深的歉意．

本书的出版得到了国家自然科学基金青年基金项目(No:11301570)，重庆市基础与前沿研究计划一般项目(No: cstc2015jcyjA00002)，以及重庆市教委研究项目(No: KJ1500626)的资助，在此一并表示感谢．

时至而立之年，之所以能够撰写此专著，我要感谢我的导师李声杰教授，感谢李老师将我带入如此神圣有趣的最优化领域之中．从李老师身上，我不仅学到了扎实、宽广的专业知识和科学的研究技能，也学到了做人的道理．

在此特向李老师致以最衷心的感谢和深深的敬意. 同时还要感谢师母一直以来对我学习、工作和生活上无微不至的关心.

本书的撰写同样也得到了家人的理解和支持. 这里, 还要特别感谢我的妻子程莹女士和我的女儿. 正是你们的爱, 给予了我不断前行的动力.

由于时间仓促以及作者水平有限, 书中难免存在不妥之处, 敬请读者批评指正.

孙祥凯

2015 年 10 月 23 日于重庆

目 录

第 1 章 一类DC无限优化问题的 Fenchel-Lagrange 对偶性刻画

本章将借助共轭函数的上图性质，研究一类 DC 无限优化问题的 Fenchel-Lagrange 对偶性和 Farkas 型结果. 为此，首先引入一类更弱的上图类正则性条件，得到了其相关性质. 随后借助此正则性条件，刻画了该 DC 无限优化问题的 Fenchel-Lagrange 对偶性和 Farkas 型结果. 本章最后将所得结果应用于 DC 锥优化问题中.

1.1 引 言

设 T 为一非空（可能无限）指标集，C 为局部凸空间 X 的非空凸子集，$f, g, h_t : X \to \overline{R} := \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$，$t \in T$，均为真凸函数. 下面主要考虑DC无限优化问题：

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \inf \ \{f(x) - g(x)\}, \\ \text{s.t. } h_t(x) \leqslant 0, t \in T, x \in C. \end{cases}
$$

本章中假设可行集

$$
\mathcal{A} := \{x \in C : h_t(x) \leqslant 0, \ \forall\, t \in T\} \neq \varnothing .
$$

此处，优化问题(P)之所以称为DC无限优化问题，是因为指标T是无限的，并且目标函数为两个凸函数的差. 特别的，若局部凸空间 X 为有限维空间，则称(P)为 DC 半无限优化问题.

众所周知，目前无限优化或半无限优化问题的研究已十分深入，如文献[21, 45, 46, 48, 50-54, 60-63, 69, 77-81, 92-95, 113, 125, 134, 137, 151, 153-155, 177]等，然而作为无限优化问题的一类重要模型，DC 无限优化问题的研究在理论和应用方面都有十分重要的意义，目前已得到了许多有意义的结果，详见文献[1, 2, 45, 46, 62, 63, 70, 75, 89, 135, 156, 160, 163]. 特别的，DC 无限优化问题的对偶性及其相关问题的研究尤为深入，而且所得结果已成功地应用于数值计算等方面[2, 91, 169]. 然而据我们所知，目前只有很少文献研究 DC 无限优化问题(P)，特别的，几乎没有文献刻画 DC 无限优化问题(P)的 Fenchel-Lagrange

对偶性及其相关问题. Dinh 等[63]借助共轭函数的上图性质, 引入了一类闭性约束品性, 并用其刻画了 (P) 的局部极小解的必要 KKT 型最优性条件. 随后, Dinh 等[62]得到了此类闭性约束品性的各种刻画, 并研究了其与其他约束品性之间的关系. 特别的, 利用此类约束品性刻画了 DC 无限优化问题以及半无限优化问题的充分和必要最优性条件.

本章还将研究 (P) 的特例, 即函数 $g\equiv 0$. 此时 (P) 退化为带有不等式约束的凸无限优化问题:

$$(\mathrm{P}_0)\quad \begin{cases}\inf f(x),\\ \text{s.t. } h_t(x)\leqslant 0,\ t\in T,\ x\in C.\end{cases}$$

值得注意的是, 上述凸无限优化问题在运输问题、博弈论问题、工程设计、最优控制以及鲁棒优化等方面都有广泛的实际应用. 不仅如此, 在理论方面, 许多学者通过对凸无限优化问题的目标函数或约束条件附加各种限制条件, 进行了各种深入的刻画研究, 并得到了许多十分有意义的结果. 如文献[60, 62, 63, 71, 72, 78-81].

据我们所知, 大多数文献在研究 DC 无限优化问题或凸无限优化问题时, 都要求相关目标函数 f, g 或约束函数 h_t 为下半连续, 以及约束集 C 为闭集. 如文献[62, 63, 163]要求目标函数 f, g 和约束函数 h_t 均为下半连续, 约束集 C 为闭集. 文献[23, 37, 70-72, 79]要求目标函数 f 和约束函数 h_t 为连续函数或下半连续函数, 并且约束集 C 为闭集. 也只有很少文献在刻画 DC 无限优化问题或凸无限优化问题时, 未涉及函数的连续性假设. 如文献[71]中, 方东辉等在目标函数 f 和约束函数 h_t 均不是下半连续, 并且约束集 C 不是闭集的情形下, 通过引入一类新的约束品性, 刻画了凸无限优化问题的 Lagrange 对偶性以及 Farkas 型结果. 利用类似的方法, 方东辉等[72]还刻画了凸无限优化问题的全 Lagrange 对偶性以及最优性条件.

由于刻画 DC 无限优化问题的 Fenchel-Lagrange 对偶性及其相关问题的文献几乎没有, 本章将借助共轭函数的上图性质引入一些新的正则性条件, 并用其等价刻画 DC 无限优化问题的 Fenchel-Lagrange 对偶性（包括弱对偶性、强对偶性、稳定弱对偶性以及稳定强对偶性）. 同时, 还将借助此正则性条件刻画 DC 无限优化问题的 Farkas 型结果以及稳定 Farkas 型结果. 值得注意的是, 此处所引入的正则性条件不同于文献[23, 29-31, 36, 38, 40, 101]中借助次微分所引入的正则性条件. 不仅如此, 本章的研究对目标函数、约束函数以及约束集 C 不赋予任何拓扑假设, 即不要求目标函数 f, g 或约束函数 h_t 必须为下半连续, 也不要求约束集 C 必须为闭集.

1.2　预备知识

本章中，如无特殊说明，始终假设 X 为实的局部凸空间，其对偶空间为 X^*，并赋予弱星拓扑 $w(X^*,X)$．符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 代表空间 X 与 X^* 之间元素的内积．设 D 为 X 的子集，$\operatorname{int} D$，$\operatorname{cl} D$，$\operatorname{co} D$，$\operatorname{cone} D$ 分别代表 D 的内部、闭包、凸包以及凸锥包．特别的，如果 $W \subseteq X^*$，则 $\operatorname{cl} W$ 代表 W 的弱星闭包．若 D 为空集，则令 $\operatorname{cone} D = \{0\}$．$D$ 的对偶锥定义为

$$D^* = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \geqslant 0,\ \forall x \in D\right\}.$$

D 的指示函数 $\delta_D : X \to \overline{R}$ 定义为

$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x \in D, \\ +\infty, & 否则. \end{cases}$$

D 的支撑函数 $\sigma_D : X^* \to \overline{R}$ 定义为

$$\sigma_D(x^*) = \sup_{x\in D} \langle x^*, x\rangle.$$

对于任意的 $t \in T$ 以及 $\lambda_t \in \mathbf{R}$，设 R^T 为 $\lambda = (\lambda_t)_{t\in T}$ 的乘积空间．假设 $R^{(T)}$ 是有限多个 $t \in T$，$\lambda_t \neq 0$ 的 $\lambda \in R^T$ 所组成的集合，$R^{(T)}$ 中的非负锥定义为

$$R_+^{(T)} := \left\{\lambda \in R^{(T)} : \lambda_t \geqslant 0,\ \forall t \in T\right\}.$$

设 $u \in R^T$ 以及 $\lambda \in R^{(T)}$，定义 $\operatorname{supp} \lambda := \{t \in T : \lambda_t \neq 0\}$．则

$$\langle \lambda, u\rangle := \sum_{t\in T} \lambda_t u_t = \sum_{t\in \operatorname{supp}\lambda} \lambda_t u_t .$$

设 $f : X \to \overline{R}$ 为广义实值函数，函数 f 的有效域和上图分别定义为

$$dom\, f := \left\{x \in X : f(x) < +\infty\right\}$$

和

$$\operatorname{epi} f := \left\{(x,r) \in X \times \mathbf{R} : f(x) \leqslant r\right\}.$$

若 f 的有效域非空，则称 f 为真函数．f 的共轭函数 $f^* : X^* \to \overline{R}$ 定义为

$$f^*(x^*) := \sup_{x\in X} \left\{\langle x^*, x\rangle - f(x)\right\}.$$

显然，f^* 为真凸下半连续函数，并且对于任意的 $\alpha > 0$，

$$\alpha\ \mathrm{epi}\ f^* = \mathrm{epi}\ (\alpha f)^* .$$

又函数 f 的下半连续包 $\mathrm{cl} f : X \to \overline{R}$ 定义为

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl} f) = \mathrm{cl}\ (\mathrm{epi} f) .$$

则由文献[175]中的定理 2.3.1 可知

$$f^* = (\mathrm{cl} f)^* .$$

从而，若 $\mathrm{cl} f : X \to \overline{R}$ 为真凸函数，则由文献[175]中的定理 2.3.1 可知

$$f^{**} = \mathrm{cl} f . \tag{1.1}$$

下面向量函数的概念可以看作实值概念的推广. 设 Y 为另一局部凸空间，其拓扑对偶空间为 Y^*，并赋予弱星拓扑 $w(Y^*, Y)$. 设 $S \subseteq Y$ 为非空凸锥，并定义 Y 中的偏序，即对于任意的 $y_1, y_2 \in Y$，有

$$y_1 \leqslant_S y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in S .$$

对于偏序 $\leqslant_S$，引入 $+\infty \notin Y$ 并令 $Y^{\bullet} = Y \cup \{+\infty\}$. 对于 $Y^{\bullet}$，以及任意的 $y \in Y$ 和 $t \geqslant 0$ 定义如下运算：

$$y + (+\infty) = (+\infty) + y = +\infty \quad 和 \quad t(+\infty) = +\infty .$$

设 $h : X \to Y^{\bullet}$ 为广义向量值函数，其有效域与 S-上图分别定义为

$$dom\ h = \{x \in X : h(x) \in Y\}$$

和

$$\mathrm{epi}_S\ h = \{(x, y) \in X \times Y : y \in h(x) + S\} .$$

若 $dom\ h \neq \varnothing$，则称 h 为真函数. 若对于任意的 $x, y \in X$ 以及 $\mu \in [0,1]$，

$$h(\mu x + (1-\mu) y) \leqslant_S \mu h(x) + (1-\mu) h(y) ,$$

则称 h 为 S-凸函数. 更进一步，设 $\lambda \in S^*$，函数 $(\lambda h) : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 定义为

$$(\lambda h)(x) = \begin{cases} \langle \lambda, h(x) \rangle, & 若\ x \in dom\ h, \\ +\infty, & 否则. \end{cases}$$

显然，h 为 S-凸函数当且仅当对于任意的 $\lambda \in S^*$，$(\lambda h)(\cdot): X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 为凸函数.

下面给出本章将用到的一个非常重要的结论.

引理 1.2.1[175] 设 I 为指标集，$\{f_i : i \in I\}$ 为一类函数集合，则

（i）$\operatorname{epi}\left(\sup\limits_{i\in I} f_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I} \operatorname{epi} f_i$；

（ii）$\left(\inf\limits_{i\in I} f_i\right)^* = \sup\limits_{i\in I} f_i^*$.

相应的，

$$\operatorname{epi}\left(\inf_{i\in I} f_i\right)^* = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi} f_i^* .$$

本小节最后，回顾如下概念. 设 $p \in X^*$，则 p 可以看作 X 上的函数，即对于任意的 $x \in X$，$p(x) := \langle p, x \rangle$. 因此，对于 $\alpha \in \mathbf{R}$ 以及函数 $h: X \to \overline{R}$，有

$$(h+p+\alpha)^*(x^*) = h^*(x^*-p)-\alpha, \ \forall\, x^* \in X^*, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{epi}(h+p+\alpha)^* = \operatorname{epi} h^* + (p, -\alpha). \tag{1.3}$$

1.3 Fenchel-Lagrange 强对偶性及相关问题刻画

本节将首先建立 (P) 的 Fenchel-Lagrange 对偶问题，随后得到其对偶性的完备刻画. 借助所得的对偶性理论，也得到了 (P) 的 Farkas 型结果的完备刻画.

下面首先建立其 Fenchel-Lagrange 对偶问题. 事实上，由于(P)可以改写为

$$(\mathrm{P}) \quad \inf_{x\in X} \left\{ f(x) - g(x) + \delta_A(x) \right\}.$$

因此，为得到(P)的对偶问题，可借助 Martinez-Legaz 和 Volle[135]的方法（亦见文献[23, 34, 35]）. 显然，若约束函数 g 为下半连续，则通常的凸性方法可以利用，此时问题 (P) 可以改写为

$$(\mathrm{P}) \quad \inf_{x^*\in dom\, g^*} \inf_{x\in X} \left\{ f(x) + \delta_A(x) + g^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \right\}.$$

又知对于任意的 $x^* \in dom\, g^*$，

$$(\mathrm{P}^{x^*}) \quad \inf_{x\in X} \left\{ f(x) + \delta_A(x) + g^*(x^*) - \langle x^*, x \rangle \right\}$$

为凸优化问题, 所以其相应的 Fenchel-Lagrange 对偶问题为

$$\sup_{\substack{\lambda\in R_+^{(T)},u^*\in dom f^*,\\ v_t^*\in dom\, h_t^*,t\in\operatorname{supp}\lambda}}\left\{g^*(x^*)-f^*(u^*)-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t h_t^*(v_t^*)-\delta_C^*\left(x^*-u^*-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t v_t^*\right)\right\},$$

从而 (P) 的 Fenchel-Lagrange 对偶问题为

$$\text{(D)}\quad \inf_{x^*\in dom\, g^*}\sup_{\substack{\lambda\in R_+^{(T)},u^*\in dom f^*,\\ v_t^*\in dom\, h_t^*,t\in\operatorname{supp}\lambda}}\left\{g^*(x^*)-f^*(u^*)-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t h_t^*(v_t^*)-\delta_C^*\left(x^*-u^*-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t v_t^*\right)\right\}. \tag{1.4}$$

类似于文献[175], 本章中假设

$$(+\infty)-(+\infty)=(-\infty)-(-\infty)=(+\infty)+(-\infty)=(-\infty)+(+\infty)=+\infty,$$

$$0\cdot(+\infty)=+\infty \quad 和 \quad 0\cdot(-\infty)=0\,.$$

下面将完备刻画 (P) 与 (D) 之间的弱对偶与强对偶. 此处符号 val(P)代表问题(P)的最优值. 后面几章中将始终用此符号代表最优化问题的最优值.

定义 1.3.1 (i) 如果 $val(\text{P})\geqslant val(\text{D})$, 则称问题(P)与(D)之间的弱对偶成立.

(ii) 若 $val(\text{P})=val(\text{D})$, 并且对于任意的 $x^*\in dom\, g^*$ 满足 $val(\text{D}^{x^*})=val(\text{D})$, 对偶问题 (D^{x^*}) 存在最优解, 则称问题(P)与(D)之间的强对偶成立.

注 1.3.1 (i) 显然, 问题(P)与(D)之间的强对偶成立当且仅当 $val(\text{P})=val(\text{D})$, 并且对于任意的 $x^*\in dom\, g^*$, 存在 $\lambda\in R_+^{(T)}$, $u^*\in dom\, f^*$, $v_t^*\in dom\, h_t^*$ 以及 $t\in\operatorname{supp}\lambda$, 使得

$$g^*(x^*)-f^*(u^*)-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t h_t^*(v_t^*)-\delta_C^*\left(x^*-u^*-\sum_{t\in\operatorname{supp}\lambda}\lambda_t v_t^*\right)\geqslant val(D)\,. \tag{1.5}$$

(ii) 若函数 g 为下半连续, 则 $val(\text{P})\geqslant val(\text{D})$, 即问题(P)与(D)之间的弱对偶成立. 然而, 在通常意义下, 问题(P)与(D)之间的弱对偶不一定成立. 详见例 1.3.1.

例 1.3.1 设 $X=\mathbf{R}$, $C=(-\infty,0]$ 和 $T=[0,+\infty)$, 函数 $f,g,h_t:\mathbf{R}\to\overline{R}$ 定义为

$$f=\delta_{\{0\}},\ h_t=t$$

和

$$g(x)=\begin{cases}1, & 若\ x=0,\\ 0, & 若\ x<0,\\ +\infty, & 否则.\end{cases}$$

显然，函数 g 不是下半连续的，f, g, h_t 为真凸函数，并且 $val(\mathrm{P}) = -1$.

另一方面，易得 $g^* = \delta_{[0,+\infty)}$，$f^* = 0$，$h_t^* = \delta_{\{t\}}$，$\delta_C^* = \delta_{[0,+\infty)}$，所以 $val(\mathrm{D}) = 0$，从而

$$val(\mathrm{P}) < val(\mathrm{D}) .$$

因此问题(P)与(D)之间的弱对偶不成立.

为刻画问题(P)与(D)之间的弱对偶与强对偶，需要引入一些新的正则性条件，故引入刻画集

$$K := \bigcap_{x^* \in dom\, g^*} \left(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{cone}\left(\bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} h_t^* \right) + \operatorname{epi} \delta_C^* - (x^*, g^*(x^*)) \right).$$

假设 $\operatorname{cl} g$ 为真函数. 令 $\bar{f} := f - \operatorname{cl} g$，则 $\bar{f}$ 为真函数，因此有如下结论.

引理 1.3.1　下述等式成立：

$$K = \operatorname{epi} \bar{f}^* + \operatorname{cone}\left(\bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} h_t^* \right) + \operatorname{epi} \delta_C^* . \tag{1.6}$$

证明　因为 $\operatorname{cl} g$ 为真凸下半连续函数，所以由式(1.1)可得 $\operatorname{cl} g = g^{**}$. 从而由引理 1.2.1 (ii)可得

$$\begin{aligned} \bar{f}^* &= (\inf\, (f - x^* + g^*(x^*)))^* \\ &= \sup\, (f - x^* + g^*(x^*))^*. \end{aligned}$$

因此由式(1.3)以及引理 1.2.1(i)可知，上式蕴含

$$\begin{aligned} \operatorname{epi} \bar{f}^* &= \bigcap_{x^* \in dom\, g^*} \operatorname{epi}\, (f - x^* + g^*(x^*))^* \\ &= \bigcap_{x^* \in dom\, g^*} (\operatorname{epi} f^* - (x^*, g^*(x^*))). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\operatorname{epi} \bar{f}^* + \operatorname{cone}\left(\bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} h_t^* \right) + \operatorname{epi} \delta_C^* \\ &= \bigcap_{x^* \in dom\, g^*} \left(\operatorname{epi} f^* + \operatorname{cone}\left(\bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} h_t^* \right) + \operatorname{epi} \delta_C^* - (x^*, g^*(x^*)) \right) \\ &= K. \end{aligned}$$

证毕.

注 1.3.2　由引理 1.3.1 以及文献[71]中等式(3.5)可知

$$K \subseteq \operatorname{epi}(\bar{f}+\delta_A)^*,$$

因此若函数 g 是下半连续的，则

$$K \subseteq \operatorname{epi}(f-g+\delta_A)^*. \tag{1.7}$$

然而，式(1.7)的反包含关系不一定成立．特别的，若函数 g 不是下半连续的，式(1.7)也不一定成立．

下例说明了式(1.7)的反包含关系不一定成立．

例 1.3.2　设 $X=\mathbf{R}^2$，$C=(-\infty,0]\times(-\infty,0]$ 以及 $T=[0,+\infty)$．令

$$E:=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : x^2+(y-1)^2=1\right\},$$

函数 $f,g,h_t:\mathbf{R}^2\to\bar{R}$ 分别定义为 $f=0$，$g=\delta_E$ 和 $h_t(x)=(tx,tx)$，则

$$\mathcal{A}=(-\infty,0]\times(-\infty,0],\quad f-g+\delta_A=\delta_{\{(0,0)\}},$$

因此 $(f-g+\delta_A)^*=0$．从而

$$\operatorname{epi}(f-g+\delta_A)^*=\mathbf{R}^2\times[0,+\infty).$$

又易得 $h_t^*=\delta_{\{(t,t)\}}$，$\delta_C^*=\delta_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}$ 以及对于任意的 $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in\mathbf{R}^2$，

$$\bar{f}^*(x^*)=\sqrt{(x_1^*)^2+(x_2^*)^2}+x_2^*.$$

从而

$$\operatorname{epi}\bar{f}^*=\left\{(x_1^*,x_2^*,r)\in\mathbf{R}^3 : r\geqslant\sqrt{(x_1^*)^2+(x_2^*)^2}+x_2^*\right\},$$

$$\operatorname{epi}\delta_C^*=[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty),$$

$$\operatorname{epi}h_t^*=\{t\}\times\{t\}\times[0,+\infty)$$

和

$$\operatorname{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi}h_t^*\right)=[0,+\infty)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty).$$

显然

$$\operatorname{epi}(f-g+\delta_A)^* \not\subseteq \operatorname{epi}\overline{f}^* + \operatorname{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} h_t^*\right) + \operatorname{epi}\delta_C^* = K .$$

下例说明了若函数 g 不是下半连续的，式(1.7)也不一定成立.

例 1.3.3　设 $X=\mathbf{R}$，$C=(-\infty,0]$ 和 $T=[0,+\infty)$. 函数 $f,g,h_t:\mathbf{R}\to\overline{R}$ 定义为

$$f=\delta_{(-\infty,0]}, \quad h_t=t$$

和

$$g(x)=\begin{cases}1, & 若\ x=0,\\ 0, & 若 x<0,\\ +\infty, & 否则.\end{cases}$$

显然，函数 g 不是下半连续的，f, g,h_t 为真凸函数，并且 $\mathcal{A}=(-\infty,0]$，$\operatorname{cl} g=\delta_{(-\infty,0]}$ 和 $\overline{f}=f-\operatorname{cl} g=\delta_{(-\infty,0]}$，因此 $\overline{f}^*=\delta_{[0,+\infty)}$，$h_t^*=\delta_{\{t\}}$，$\delta_C^*=\delta_{[0,+\infty)}$. 从而

$$\operatorname{epi}\overline{f}^*=\operatorname{epi}\delta_C^*=[0,+\infty)\times[0,+\infty),$$

$$\operatorname{epi} h_t^*=\{t\}\times[0,+\infty),$$

以及

$$\operatorname{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} h_t^*\right)=[0,+\infty)\times[0,+\infty).$$

从而由引理 1.3.1 可知

$$K=\operatorname{epi}\overline{f}^*+\operatorname{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\operatorname{epi} h_t^*\right)+\operatorname{epi}\delta_C^*=[0,+\infty)\times[0,+\infty).$$

另外，易得

$$(f-g+\delta_A)(x)=\begin{cases}-1, & 若\ x=0,\\ 0, & 若\ x<0,\\ +\infty, & 否则,\end{cases}$$

因此

$$(f-g+\delta_A)^*(x^*)=\begin{cases}1, & 若\ x^*\geqslant 0,\\ +\infty, & 否则.\end{cases}$$

故

$$\operatorname{epi}(f-g+\delta_A)^*=[0,+\infty)\times[1,+\infty).$$

显然

$$K \not\subseteq \text{epi}\,(f-g+\delta_A)^*.$$

考虑到 K 与 $\text{epi}\,(f-g+\delta_A)^*$ 之间的可能包含关系，引入如下的正则性条件.

定义 1.3.2 (i) 若

$$\text{epi}\,(f-g+\delta_A)^* \bigcap (\{0\}\times\mathbf{R}) = K \bigcap (\{0\}\times\mathbf{R}),$$

则称 $(f,g,\delta_C,h_t:t\in T)$ 满足正则性条件(FRC).

（ii）若

$$\text{epi}\,(f-g+\delta_A)^* \bigcap (\{0\}\times\mathbf{R}) \supseteq K \bigcap (\{0\}\times\mathbf{R}),$$

则称 $(f,g,\delta_C,h_t:t\in T)$ 满足半正则性条件(SFRC).

引理 1.3.2 设 $\alpha\in\mathbf{R}$，则

（i）$(0,\alpha)\in \text{epi}\,(f-g+\delta_A)^*$ 当且仅当 $val(\text{P})\geqslant -\alpha$；

（ii）$(0,\alpha)\in K$ 当且仅当 $val(\text{D})\geqslant -\alpha$，并且对于任意的 $x^*\in dom\,g^*$，存在 $\lambda\in R_+^{(T)}$，$u^*\in dom\,f^*$，$v_t^*\in dom\,h_t^*$ 以及 $t\in\text{supp}\,\lambda$，使得

$$g^*(x^*)-f^*(u^*)-\sum_{t\in\text{supp}\,\lambda}\lambda_t h_t^*(v_t^*)-\delta_C^*\left(x^*-u^*-\sum_{t\in\text{supp}\,\lambda}\lambda_t v_t^*\right)\geqslant -\alpha. \tag{1.8}$$

证明 (i) 因为

$$val(\text{P})=\inf_{x\in X}\left\{f(x)+\delta_A(x)-g(x)\right\}=-(f-g+\delta_A)^*(0),$$

所以结论成立.

(ii) $(\Rightarrow)$ 设 $(0,\alpha)\in K$，则对于任意的 $x^*\in dom\,g^*$，

$$(0,\alpha)\in \text{epi}\,f^*+\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\text{epi}\,h_t^*\right)+\text{epi}\,\delta_C^*-(x^*,g^*(x^*)),$$

故

$$(x^*,g^*(x^*)+\alpha)\in \text{epi}\,f^*+\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T}\text{epi}\,h_t^*\right)+\text{epi}\,\delta_C^*.$$

因此存在 $\lambda\in R_+^{(T)}$，$(u^*,\alpha_1)\in\text{epi}\,f^*$，$(w^*,\alpha_2)\in\text{epi}\,\delta_C^*$ 和 $(v_t^*,\beta_t)\in\text{epi}\,h_t^*$，$t\in\text{supp}\,\lambda$，使得