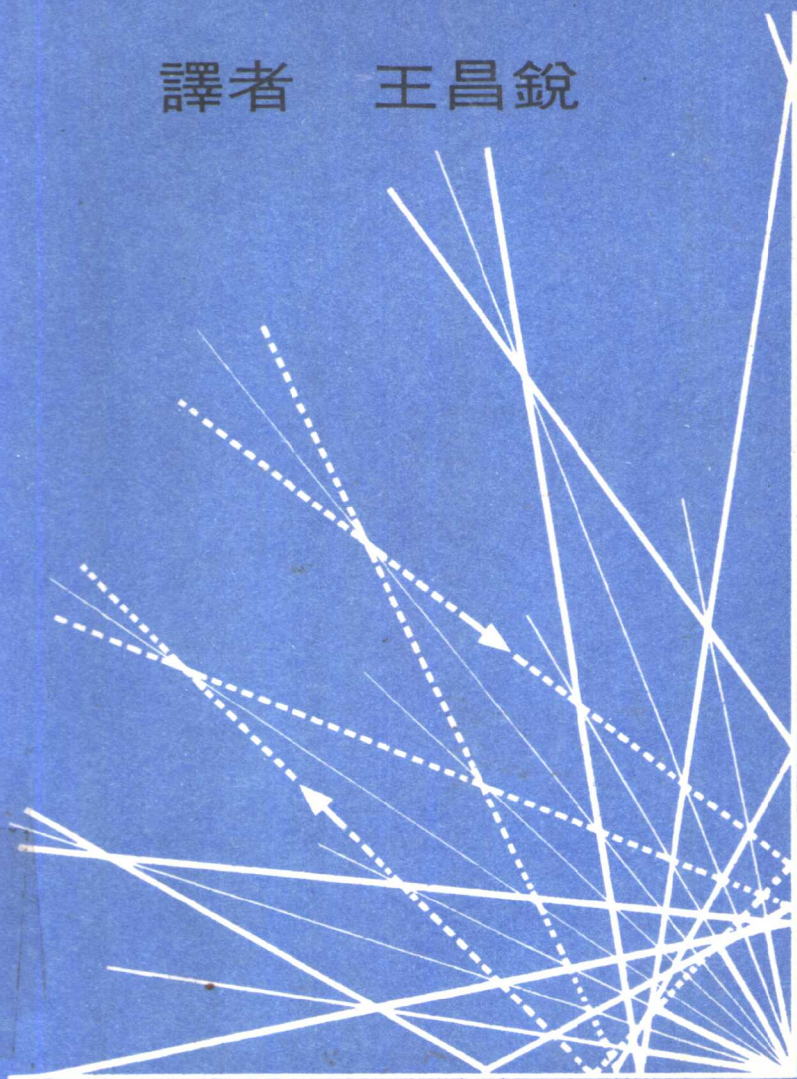


幾何移轉

譯者 王昌銳



徐氏基金會出版

幾何移轉

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

內政部登記證內版台業字第 1347 號

幾何移轉

中華民國五十九年 三 月二十日初版

**版權所有
不准翻印**

出版者 徐氏基金會出版部

台北郵政信箱 3261 號

香港郵政信箱 1284 號

發行人 林 碧 鏗

台北郵政信箱 3261 號

譯 者 王 昌 銳

台灣省立高雄工業專科學校教授

印刷者 長德印刷有限公司

台北市迪化街一段二四〇號

電話：513428•556361

定 價 新台幣 二十五元

港 幣 四 元

原訂為基價1.30

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越既往之累積，昔之認為絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允為社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會為促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大眾閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者；

主動地精選最新、最佳外文學科技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛舉，是禱。

徐氏基金會敬啓

Bmt 10/10

新數學文庫

本文庫係由當代數學專家卅餘人所編撰，全世界均有譯本，乃數學權威之寶典。其目的在確立中等學校學生及社會大眾之某些頗饒興味，而易領悟的重要數學觀念。本文庫內容，多不含於中學數學教科書中，且難易懸殊，有的部份，需要特別研究。

學習數學的最好方法，為多做習題。各書所附習題，有些頗為艱深，需要慎密思考。讀者應養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，自能得心應手，趣味盎然。

本文庫共二十冊陸續出版，以供讀者研習。除第十七冊係由葉哲志先生譯外，其餘各冊均由王昌銳教授承譯。（定價每冊港幣4元，新台幣25元）

1. 有理數及無理數 (Numbers: Rational and Irrational)
2. 微積分研究 (What is Calculus About ?)
3. 不等式論 (An Introduction to Inequalities)
4. 幾何不等式 (Geometric Inequalities)
5. 高中數學測驗 (第一冊) (The MAA Contest Problem Book 1)
6. 大數論 (The Lore of Large Numbers)
7. 無窮數之妙用 (Uses of Infinity)
8. 幾何移轉 (Geometric Transformations)
9. 連分數 (Continued Fractions)
10. 圖形及用途 (Graphs and their Uses)
11. 匈牙利數學問題詳解 (第一冊) (Hungarian Problem Book 1)
12. 匈牙利數學問題詳解 (第二冊) (Hungarian Problem Book 11)
13. 數學史話 (Episodes, from the early history of mathematics)
14. 群與圖 (Groups and their Graphs)
15. 特別數學 (Mathematics of Choice, or How to count Without Counting)
16. 由畢達哥拉司至愛因斯坦 (From Pythagoras to Einstein)
17. 高中數學測驗 (第二冊) (The MAA Contest Problem Book 11)
18. 拓撲學基本概念 (First Concepts of Topology)
19. 幾何研究 (Geometry Revisited)
20. 數目理論入門 (Invitation to Number Theory)

中譯序

幾何移轉，係於平面中，將各種平面幾何圖形，經過某方向內，某一距離之移動，或環繞某一定點，經過某一角度之旋轉；或以某直綫作鏡面，從事反射；使圖上所有之點，綫，及邊界，整個移轉至另一位置，而原圖之形狀，大小，並不改變之一種幾何作業。此種變位而不變形之幾何移轉，對幾何作圖，應用至廣，對幾何群理論方面，尤為重要。

本書，以直接而簡單之方法，介紹幾何移轉新觀念。於解釋討論之餘，復提出許多實際問題，激發讀者動機及思考，以期用此新觀念，解此類問題，以求即學即用。故於第一、二章，說明幾何移轉理論，提出問題，供讀者自行研解。而於第Ⅱ部份，幾以全書一半之篇幅，提供問題之逐一詳細解答，以供參證，頗適我國中等以上學校師生，對幾何理論與作圖之“教”與“學”參考。

本書原作者為雅格洛姆博士（Isaac Moisevitch Yaglom），俄人。英譯者為亞倫施爾茲博士，紐約人。均當世數學名家。本書之譯，係響應徐氏基金會廣譯新書盛舉。如能益我學子，則幸甚矣。譯稿勞吾妻蔣君英女士協助整校，深為感激，特誌。

中華民國五十八年十一月三日

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

英譯本序

本卷為雅格洛姆 (I.M. Yaglom) 所著“幾何移轉”之第 I 部份。其俄文原版，原分三個部份；第 I 及 II 部，共 280 頁，發行於 1955 年，第 III 部於 1956 年單獨發行，凡 611 頁。英譯本之第 I 及 II 部，將分卷各別發行；學校數學研究小組，不擬將第 III 部，列入新數學文庫出版計劃之中，然而，第 III 部，討論投影幾何，而非歐幾里德幾何，將為極有價值之額外著作，或許將於他處印行。

於此譯本中，許多須參閱第 III 部者，均已刪去，而雅格洛姆之“前言”，及“本書用途”，則於“原著者序”標題之下，以非常簡略之方式出現。

此書非平面幾何教材。相反的，著者且曾假定，讀者已熟悉此課目，大部份內容，須學過平面幾何之優秀中學生，始能閱讀。然而，應該努力；此書，同於其他數學書籍，對讀者有所要求。

書中討論平面幾何之基本移轉，即，用距離一保持移轉（移動，旋轉，反射），由是，簡單而直接的向讀者介紹某些重要的群理論概念。

47 個比較困難的問題，增補為相對短簡之基礎測驗。作者對此等問題之簡括說明，並不使讀者怯懦；例如，當按已予資料作圖時，即可基於某距離之相對長度，或基於某已知圖形之相對位置，求得已知問題之許多解答。將迫使自行發現已知問題，有一單解之條件。於本書之第二半，習題均已詳細解出，無解答之條件，亦予討論，其有一解，或數解者，亦包括之。

讀者應亦注意於本書所用標誌，可能有點不同於常用者。例如，兩直綫 l 及 m ，相交於一點 O ，其間之角，常書為 $\angle lOm$ ；或如 A 及 B 為兩點，則“直綫 AB ”，表示經過 A 及 B 之直綫，而“綫段 AB ”，表示由 A 至 B 之固定綫段。

註腳以前，常用符號 $\dagger$ ，取自本書俄文版，而本書却增加一符號 $\dagger$ 。

感謝 Yaglom 教授，對本書美版之籌印，所予極具價值之協助。彼曾閱讀譯文草稿，並提供許多建議。彼曾展示並澄清原本中之某些要點，且增加部份問題，特別是習題 4, 14, 24, 42, 43 及 44 之含於本書者，為原版所無。

而俄文版中之習題 22 及 23，又爲美版所乏。當雅氏原著第二部份譯本出現時，亦將發現美版習題號數，將不對應於俄文版者。因此，提醒讀者注意，所有本卷習題之與次卷習題相關者，一律沿用俄文版之習題號數。而當卷 2 之英文本問世時，將包含此等題號之任何更改表。

總之，願感謝學校數學研究小組諸先生之意見與協助。寇克司特教授 (Professor H.S.M. Coxeter) 曾對術語，給予特別匡助。特別感謝來克斯博士 (Dr. Anneli Lax)，出版計劃之技術編者，不可估計之協助，及其忍耐與才能，對其助理員司東 (Carolyn Stone) 及斯處子也 (Arlys Stritzel)，亦深感激。

亞倫 施爾茲

原著者序

本書，包含三部份，從事基本幾何研究。大量題材含於基本幾何之中，特別是十九世紀者。許多有關圓，三角形，多角形……等之美麗而不預期之定理，均曾證明，於基本幾何以內，完全離“科學”而誕生，如三角形之幾何，或四面體之幾何，各有其擴張的主要之點，其各自之問題，及其各自之問題解法。

目前使命，非使讀者，熟悉一連串新奇定理，以上所言，其本身似非證明，係以基本幾何之特別讀物出現。因多數基本幾何定理之越出中學課程限制者，徒為新奇而無特殊用途，遂處於數學發展主流以外，然而，主要定理之外，基本幾何包含兩種重要之一般觀念，以形成幾何之所有進一步發展，而其重要性之延伸，遠過此等寬廣限制以外，已知幾何演繹法及其原理基礎，在一方面；而幾何移轉，及其群一理論基礎，在另一方面。此等觀念，曾有其結果之各自發展，引致非歐幾里德幾何。此等觀念之一敘述，幾何之群一理論基礎，為本書之基礎任務……。

本書特質，適合廣泛讀者；於斯情況，常須犧牲某些讀者興趣，以適應其他人士。作者曾委屈準備充份讀者之興趣，而努力於求簡化與明晰，以代嚴格及邏輯之恰當性。由是，例如，於本書中，不作幾何移轉一般概念之定義，因定義名詞，直覺顯明，常使無經驗之讀者，產生困難。基於相同理由，乃需禁用指向角，並延至第二章，始介紹指向綫段，雖有缺點於基本教材之某些理論，及習題中之解答；嚴格說來，考慮欠週（如P. 50之證明）。似乎，於所有此等情況中，準備良好之讀者，能自行完成推理，而缺乏嚴格，並不影響準備欠週之讀者……。

同樣考慮，於名詞術語選擇中，亦居重要地位，作者基於其本身作學生之經驗，出現許多不熟悉之名詞，嚴重的增加書中困難，因此，彼企圖於此重點，實行高度經濟簡約。於某些情況，此遂引致避免某些名詞，以求方便，由是而犧牲準備良好讀者之利益……。

習題，提供讀者，瞭解其對理論性題材，處理能力如何之機會。不需依

次去解所有習題，但望每組習題，能作一個（多多益善）；本書結構，如此進行，讀者幸勿錯失本書之任一重要部份。於解一題（或試求其解）以後，應研究書末所示解答：

通常，習題擬製，並不與書中所云連繫，相反的，使用基本題材，應用基本幾何移轉，特別注意於較定理為重要之方法；由是，於某些處所，出現特別練習，因各種解題方法之比較，常極富教育意義也。

有許多作圖問題，解時，並不有興趣於“極簡單”（於某種意義說）作圖——以代作者觀點，此等問題，主以邏輯為重，而不在乎實際從事作圖。

未提及三度定理；此限制並不嚴重影響本書之主要觀念。而立體幾何問題一節，可有其增加之利益，書中問題，均係示範，而非其本身之終止。

本書初稿，係作者於奧里可夫—柴也夫（Orekhovo-Zuevo）教學會……所撰，而與作者所從事之莫斯科大學，中等學校數學研究之幾何部份相關連。

雅格洛姆

致讀者

本書為數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中學生及社會人士，某些易懂而有趣之重要數學觀念。新數學文庫之多數書本，包含中學課程所不容納之課題，而難易相殊，即使同一書中，有些部份，即較其他部份，需要較高程度之專注。由是，讀者需有相當之技能學識，以瞭解大部此等書籍，且應作明智之努力。

如讀者以往，僅於教室作業中遭遇數學，則應記住於心，數學書籍不能快速閱讀。亦不應期望，乍覽之餘，即能瞭解書中之全部。而應很自然的超越複雜部份，稍後再回來讀。因後繼之評述，常能澄清一種理論也。相反的，包含完全熟悉題材之章節，則可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，為“做”數學，各書均含習題，有些且需縝密思考。奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，如此，數學對之，將變為意義倍增。

對著者與編者而言，此為新的嚐試。頗願對許多中學師生，協助此等書刊之籌印，表示由衷感謝，編者對本文庫諸書之反應意見，頗感興趣，希望讀者，書寄紐約大學，數學科學會轉，新數學文庫（NML）編輯委員會。

編 者

目 錄

致讀者	
中譯序	
英譯序	
原著者序	
引 言	幾何是什麼？
第一章	移位
1.	移動
2.	半轉及旋轉
第二章	對稱
1.	反射及滑動反射
2.	直接全等及相對全等圖，平面移轉分類。
習題解答	第一章，移位
	第二章，對稱

引言

幾何是什麼？

凱西里奧夫 (A.P. Kiselyov) 所著中學幾何教材 (蘇聯境內，具領導性之平面幾何教材) 第一頁，繼“點，綫，曲面，物體”定義，及說明“點，綫，曲面或物體之集中，於通常方式，置於空間，稱為幾何圖形”之後，隨以幾何之定義為：“幾何係研究幾何圖形性質之科學”。由是，而有於此引言中，所出現之問題，已於中學幾何教材答覆之印象，而不需關注其進一步情況。

但此問題簡單性質之印象錯誤，凱西里奧夫定義，不能謂為錯誤；然而，似欠完整，“性質”一詞，有一極普遍之特性，而無所有圖形性質，均於幾何中研究之意。由是，例如，於幾何中，一三角形是否繪於白紙，或黑板上，並無若何重要之處；三角形之顏色，非幾何研究主題也。誠然，於以上定義之意義中，可答覆幾何研究幾何圖形之性質，而顏色，係繪圖所用之紙的性質，而非圖本身之性質，然而，此答仍留下某種欠滿意之感覺；為求更深瞭解，可能願作幾何中，研究圖形性質之精確數學定義，而如斯之定義尚乏。此種不滿意之感覺，當於幾何中，企圖解釋，為何研究由繪於黑板上之三角形頂點，至三角形相對邊之距離，並非至如黑板邊緣之其他直綫距離時，發生。如此之解釋，頗難純基於以上定義提出。

於繼續說明以前，願略述因其定義之欠完備，學校教材不能厚非。或許凱西里奧夫定義，為幾何研究第一階段，所能唯一提供者。幾何歷史，足可謂為開始於4000年以前，而幾何之第一個科學定義之敘述，乃本書主要目標之一，僅於約80年（於1872）以前，由德國數學家克累 (F. Klein) 所提出，於數學家，明顯獲知，需有幾何重要事務之正確定義以前，需要洛巴克夫司基 (Lobachevsky) 所創之非歐幾里德幾何；於此之後，遂使預料其不能為幾種“幾何學”之幾何圖形直覺概念，變為明顯，而不能提供幾何科學廣大結構之充份基礎。

現且轉至正確，澄清，幾何所研究者，為何種幾何圖形性質，已知幾何並不研究所有圖形性質，但僅其中之某些圖形而已；於已精確說明該等屬於

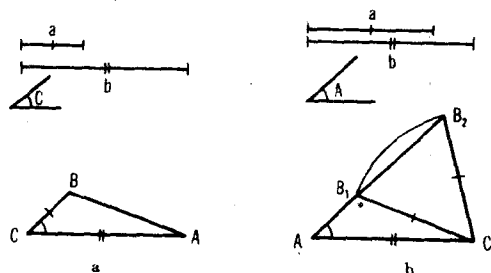


圖 1

幾何之性質以前，僅能謂幾何學，研究圖形之“幾何性質”。以此加諸凱西里奧夫之定義，非謂其自身完成定義；問題乃變為“幾何性質”為何？而僅能答以，其為“幾何中研究之那些性質”。由是，已進至於圓中；定“幾何”之義為“研究圖形幾何性質之科學”，而幾何性質，即係幾何中研究的那些個性質，為求打破此圓，應不用“幾何學”一詞，以定“幾何性質”之義。

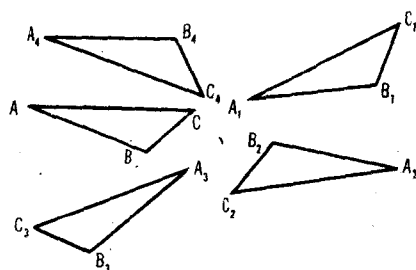


圖 2

欲研究何為圖形“幾何性質”之問題，且回味以下有名的定理：已知兩邊 a, b ，及其所含之角 C ，欲作一三角形之問題，僅有一解。（圖 1.a）。[相對於此，已知邊 a, b ，及兩已知邊之一的相對角 A ，作一三角形，能有兩解。]於第二思考，末語似乎不確；實無恰一之三角形，具已知邊 a, b ，及所含角 C ，但有無窮多也（圖 2）。如是，問題非止一解，而有無窮解也。而此定則，所謂恰有一解之意義為何？

由兩邊 a, b ，及所含角 C ，僅能作“一”三角形之定則，顯然意為所有具已知邊 a, b ，及所含角 C 之三角形，為彼此全等。因此，如謂由兩邊及其

所含角，能作無窮多個三角形，但為全部互相全等，當更正確。由是，於幾何中，當謂存在唯一具已知邊 a, b ，及所含之角 C 時，則諸三角形之僅相殊於其位置者，均不考慮其為相殊，且因已定幾何學之義，為研究圖形“幾何性質”之科學，則當然，顯僅確具相同幾何性質之圖形，將為，彼此莫由區別。由是，全等圖形，將確具相同之幾何性質；反之，圖形之非全等者，應有相殊之幾何性質，否則，莫由區別。

由是，而獲致圖形幾何性質之所需定義：“圖形之幾何性質，係所有全等圖形，所共有之一切性質”。現能提出，“為何由三角形頂角之一，至黑板邊緣之距離，不在幾何中研究”問題之精確答案：此距離非一幾何性質，因其能不同於全等三角形也。反之，三角形之高度，為一幾何性質，因對應之高度，對全等圖形，常相同也。

現已非常接近幾何之定義。已知，幾何學研究圖形之“幾何性質”。即對全等圖形，為相同之該類性質。尚待答覆之僅有問題為：“全等圖形為何？”

此最後問題，可能使讀者失望，而產生吾人從無成就之印象；曾簡單的將一問題，變為另一問題，恰如其困難者然。然而，此實非其情況；當兩圖形全等時，問題並不全然困難，而凱西里奧夫教材，提出其完全滿意之答案。依凱氏所云：“二幾何圖形，如其一圖，於空間移動，能使之與第二圖形重合，以使兩圖之所有部份重合，乃謂為全等”。換言之，全等圖形，係能由一移動，使之重合者；因此，圖形之幾何性質，即所有全等圖形，共具之性質，而為移動圖形，並不改變之該等性質。

由是，最後臻於以下之幾何學定義：“幾何學，係研究圖形經過移動，而不改變之幾何圖形性質的科學”。現在，將止於此定義；雖尚有餘地，以作進一步發展，但以後將有更多要說的話。吹毛求疵之士，可能並不滿意於此定義，而仍要求解釋，“移動之意義為何”。此可於下列方式回答：“一移動為一平面（或空間）之幾何移動，將各點 A ，帶往一新點 A' ，以致任兩點 A 與 B 間之距離，等於其所携往之點 A' 及 B' 間距離”。[移動，為移轉或嚴格之移動。平面中兩點 A 與 B 間之距離，等於

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

其中 x_1, y_1 及 x_2, y_2 ，分別為點 A 與 B 之坐標值，於某（不問為何）矩形卡氏坐標系表示（圖 3）；由是，距離概念，化為簡單之代數公式，而不需澄清後果為何。

相似的，空間兩點 A 與 B 間距離，等於

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

其中 x_1, y_1, z_1 ，及 x_2, y_2, z_2 ，為空間點 A 與 B 之卡氏坐標值] 然而

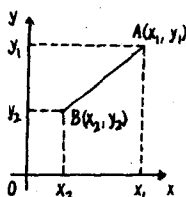


圖 3

此定義仍屬抽象；現知幾何中，“移轉”一詞之基本作用為如何了，願接受之於直覺，而後仔細研究其性質，如是之研究，為本書首卷之主要目的。於本卷之末，一完整之平面可能移轉，將予列舉，而能目為其新而且簡之定義。（詳見 68—70 頁）

益言之，且謂移轉之研究，不僅於精確幾何概念時重要，但亦有其實作之重要性。幾何中移轉之基本作用，在解釋其許多幾何問題解法之應用，特別是作圖問題。同時，移轉之研究，提供某種普通方法，而能應用於許多幾何問題之解答，且有時，容許結合，一連串其解需用其他方法，而需各別考慮之練習題。例如，考慮以下三種有名的作圖問題：

- (a) 作一三角形，已知平面中三點，為等邊三角形之外頂尖，該等邊三角形，係由所望三角形諸邊，向外作出。
- (b) 作一三角形，已知平面中三點，係由所望三角形邊上向外作出之方形中心。
- (c) 作一七角形 (heptagon) (七邊之多邊形)。已知七點，為其邊之中點。

此等問題，用通常學校書本之方法，即能解決；但其似為三個各別問題，彼此無關（且寧為複雜之問題）。由是第一問題，可證明圖 4a 之三直線 A_1M_1 ， A_2M_2 ，及 A_3M_3 ，均相遇於一點 O ，且於該處，相互交相等之角（此使人由點 M_1 ， M_2 及 M_3 ，求一點 O ，因 $\angle M_1OM_2 = \angle M_2OM_3 = \angle M_3OM_1 = 120^\circ$ ）。則可證明

$$OA_1 + OA_2 = OM_3, \quad OA_2 + OA_3 = OM_1, \quad OA_3 + OA_1 = OM_2.$$

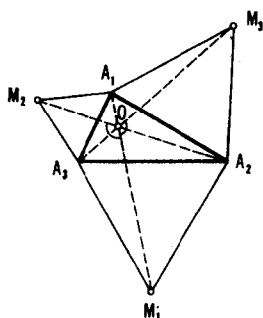


圖4 a

[此使人求點 A_1 , A_2 , 及 A_3 , 因 $OA_1 = \frac{1}{2}(OM_2 + OM_3 - OM_1)$] .

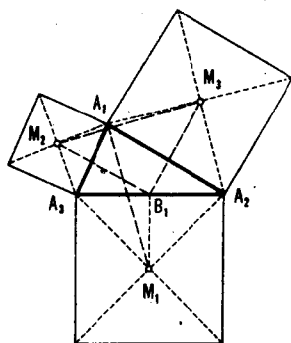


圖4 b

第二問題，見圖4b，可證明

$$M_2B_1 \perp M_3B_1 \text{ 及 } M_2B_1 = M_3B_1 ,$$

解之。其中 B_1 為三角形 $A_1A_2A_3$ 之邊 A_1A_2 中點，或（第二解）證

$$A_1M_1 = M_1M_2 \text{ 及 } A_1M_1 \perp M_1M_2 ,$$

解之。