科学版学习指导系列

数学物理方法学习指导

姚端正　编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学物理学习指导系列

数学物理方法学习指导

姚端正 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是数学物理方法课程的辅助材料.全书分复变函数、数学物理方程、特殊函数三篇,共十六章,每章都包括基本要求、内容提要、复习思考题、例题分析四部分.对相应的要点、内容进行概述,再提供一定数量的复习和思考题,最后对一些典型例题分类进行分析和详细解答.附有四份模拟试题及解答,供读者检验自己对知识的掌握情况.本书强调基本概念和方法的理解和掌握,适合于大学物理类本科生参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法学习指导/姚端正编著.—北京:科学出版社,2001
(大学物理学习指导系列)
ISBN 7-03-008883-2

Ⅰ.数… Ⅱ.姚… Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第72043号

责任编辑:吕 虹 张邦固/责任校对:白 颖
责任印制:安春生 /封面设计:槐寿明

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006年1月第四次印刷 印张:36 1/2
印数:11 001—13 000 字数:699 000

定价:33.00元

前　言

“数学物理方法”是一门公认的难度较大的课程，特别是对于解答“数学物理方法”中的某些习题，不少学生常常有一种“难于下手”的感觉．为了使“数学物理方法”变为一门易教、易学、易懂的课程，为了使学生能将数理方法的理论内容和方法技巧有机地结合起来用于解决数学物理问题，我们编写了这本《数学物理方法学习指导》．

本书既与武汉大学出版社出版的《数学物理方法》(姚端正，梁家宝编，1992年8月第一版，1997年7月第二版)一书相配套，又是一本独立的数学物理方法的学习指导书．全书共分三篇十六章，其内容不仅覆盖了教育部数学物理方法教学大纲的全部内容，而且还增加了拓宽知识面的例题．

本书每一章均按基本要求、内容提要、复习思考题、例题分析四部分来编写．基本要求部分指出了学习各章的目的和基本应掌握的内容；内容提要部分以清晰的思路、尽可能短的篇幅对各章的主要内容进行了归纳和总结，以便手边没有数理方法教材的读者，甚至是没有学过数理方法的读者阅后也能基本掌握本章的核心内容，达到事半功倍之效果；复习思考题部分，我们则根据自己多年教学中的体会就各章的重点、难点及学生易于混淆不清的地方提出问题，以帮助学生复习、掌握各章内容，深化对各章知识的理解；例题分析部分就各章内容选择了一定数量的、在解题方法上具有典型性、思路上具有启发性的题进行了分析和详解，结合采用一题多解或分析与提问相结合的方式，对读者学习数理方法和解题，力求达到具有启迪性的指导意义和举一反三的作用．书中有 * 标记的例题，多为近些年来美国著名大学的研究生试题，我们摘录在此并进行分析，以拓宽学生视野，提高学生分析问题和解决问题的能力．在书中，我们还就“复变函数”、“数学物理方程和特殊函数”所分别包缆的内容各出了两份模拟试题，以使学生检验掌握各部分知识的情况．

顺便提及，我们希望学生在阅读本书时不要简单地将自己置身于一个“接受器”的角色，而应充分发挥自身的主观能动性，积极地进行思考．特别是例题分析和模拟试题部分，一定要经过深思熟虑，先试解后，再去看分析和详解，因为只有这样才会有收益，否则是与我们编写此书的初衷相违背的．

衷心地希望本书不仅能成为广大学生(包括报考研究生的读者)学习“数学物理方法”的“良师益友”，而且也能对从事“数学物理方法”等课程教学的教师、从事自然科学工作的研究人员有所助益．

由于水平和时间的限制，不妥甚至错误之处在所难免，敬请读者批评指正．

最后,衷心地感谢与李中辅、梁家宝教授所作的有益讨论.

编 者

2000 年仲夏于珞珈山

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇 数学物理方程

第三篇　特殊函数

第一篇　复变函数论

复变函数是自变量为复数的函数.在复变函数论中,许多基本概念与运算是数学分析中相应概念与运算在复数域中的推广,如极限、连续、导数、积分等.从形式上看,很多定义完全类似,但是实际含义不尽相同.在复变函数论中,主要研究解析函数.解析函数不仅对数学自身的发展起过重大的作用,而且在物理学和其它工程技术中也有着广泛的应用.

第一章　解析函数

一、基本要求

1. 熟练掌握复数的各种表示方法及六则运算.

2. 掌握复变函数及其极限、连续、可导的概念.

3. 掌握邻域、区域等概念,理解复变函数的几何意义.

4. 正确理解解析函数的定义,正确判断函数的解析性,牢固掌握并熟练运用C-R条件.

5. 掌握解析函数与调和函数的关系及有关复势的基本概念.

6. 掌握初等函数的定义、性质和解析性.

7. 理解多值函数有关支点、支割线、黎曼面和单值支的概念.

二、内容提要

(一) 复数及其运算

1. 复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数,其中

i 称为虚单位,$\mathrm{i}^2=-1$;

x 与 y 均为实数,分别称为复数 z 的实部与虚部,记为 $\mathrm{Re}z=x$, $\mathrm{Im}z=y$.

若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 则 $z_1=z_2$,必须且只需 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 两复数不能比较大小.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$,互称为**共轭复数**.

2. 复数的几何表示

建立了直角坐标系 xOy 之后,复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用

(1) 平面上的点 (x,y) 表示[图 1.1(a)]. 这个坐标平面称做**复平面**, x 轴称实轴, y 轴称虚轴.

(2) 复平面内从原点出发指向 (x,y) 点的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 表示[图 1.1(b)]. 其中向量的长度叫复数的模,记作 $|z|$;向量与实轴的夹角叫复数的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}z$. 若引

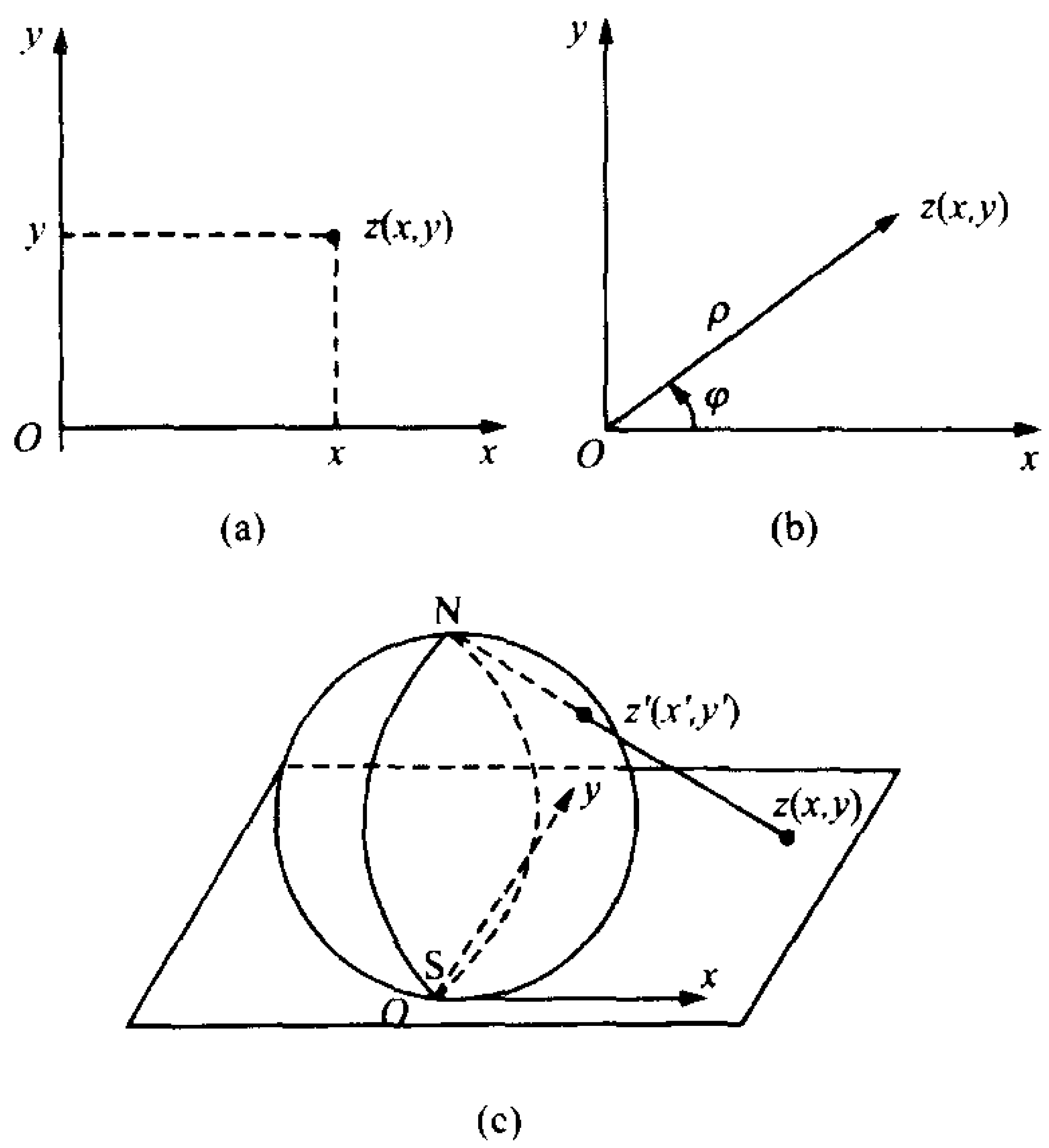

图 1.1

入极坐标变量(ρ,φ),则

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi \tag{1.1.1}$$

$$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.2}$$

$$\mathrm{Arg}z=\varphi=\arctan\frac{y}{x}=\arg z+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.1.3}$$

$\arg z$ 称为 z 的**辐角的主值**,通常规定 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

(3) 南极 S 与复平面相切于原点的球面上的点(x',y')表示[图 1.1(c)].其中(x',y')点为球的北极 N 与复平面上的任意一点(x,y)的连线与球面的交点,规定北极 N 为 $z=\infty$的代表点.这种表示复数的球面称为**复球面**.

3. 复数的数学表达式

(1) 代数式　$z=x+\mathrm{i}y$ (1.1.4)

(2) 三角式　$z=\rho\cos\varphi+\mathrm{i}\rho\sin\varphi$ (1.1.5)

(3) 指数式　$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (1.1.6)

4. 复数的运算规则

复数遵循实数的运算规律.因此

(1)
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2) \tag{1.1.7}$$

(2)
$$z_1 z_2 = \begin{cases} (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ |z_1||z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2)} \end{cases} \tag{1.1.8}$$

(3)
$$z_1/z_2 = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2)} \qquad (z_2 \neq 0) \end{cases} \tag{1.1.9}$$

(4)
$$z^n = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\mathrm{Arg}z} \tag{1.1.10}$$

(5)
$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z + 2k\pi}{m}}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.1.11}$$

当 k 取 $0,1,\cdots,m-1$ 时可得到 m 个不同的值.

设 a 为不等于∞的复数,则规定

$$\left\{\begin{array}{l} a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \\ a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \\ \dfrac{a}{\infty} = 0,\ \dfrac{\infty}{a} = \infty \end{array}\right\} \tag{1.1.12}$$

而$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}$不规定其意义.

常利用 $\arg z$ 和 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 的关系

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & -\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & -\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{1.1.13}$$

来确定 $\arg z$ 之值.

5. 常用的两个不等式

(1)
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.1.14}$$

(2)
$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1.1.15}$$

(二) 复变函数

1. 复变函数的概念

若 $W = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), z \in E$,则称 W 为 z 的**复变函数**,定义域

为 E.其中 $u(x,y)$和 $v(x,y)$是 x,y 的实变函数,E 为复平面的一点集(即复数的集合).$W=f(z)$有单值函数和多值函数之分,其 W 值构成的点集称为函数的值域.

2.有关区域的概念

在复变函数论中,区域的概念建立在如图 1.2 所示的如下一些点集的概念的基础上.

(1) 邻域　由不等式$|z-z_0|<\varepsilon(\varepsilon>0)$所确定的平面点集,称为点 z_0 的 ε **邻域**,记为 $N(z_0,\varepsilon)$.

(2) 内点　若 $z_0\in E$ 存在某个$N(z_0,\varepsilon)$全含于点集 E 内,则称 z_0 为点集 E 的**内点**.

(3) 区域　若点集 σ 全由内点组成,且其中的任意两点可用一条全属于 σ 的折线连接,则该点集 σ 称为**区域**.

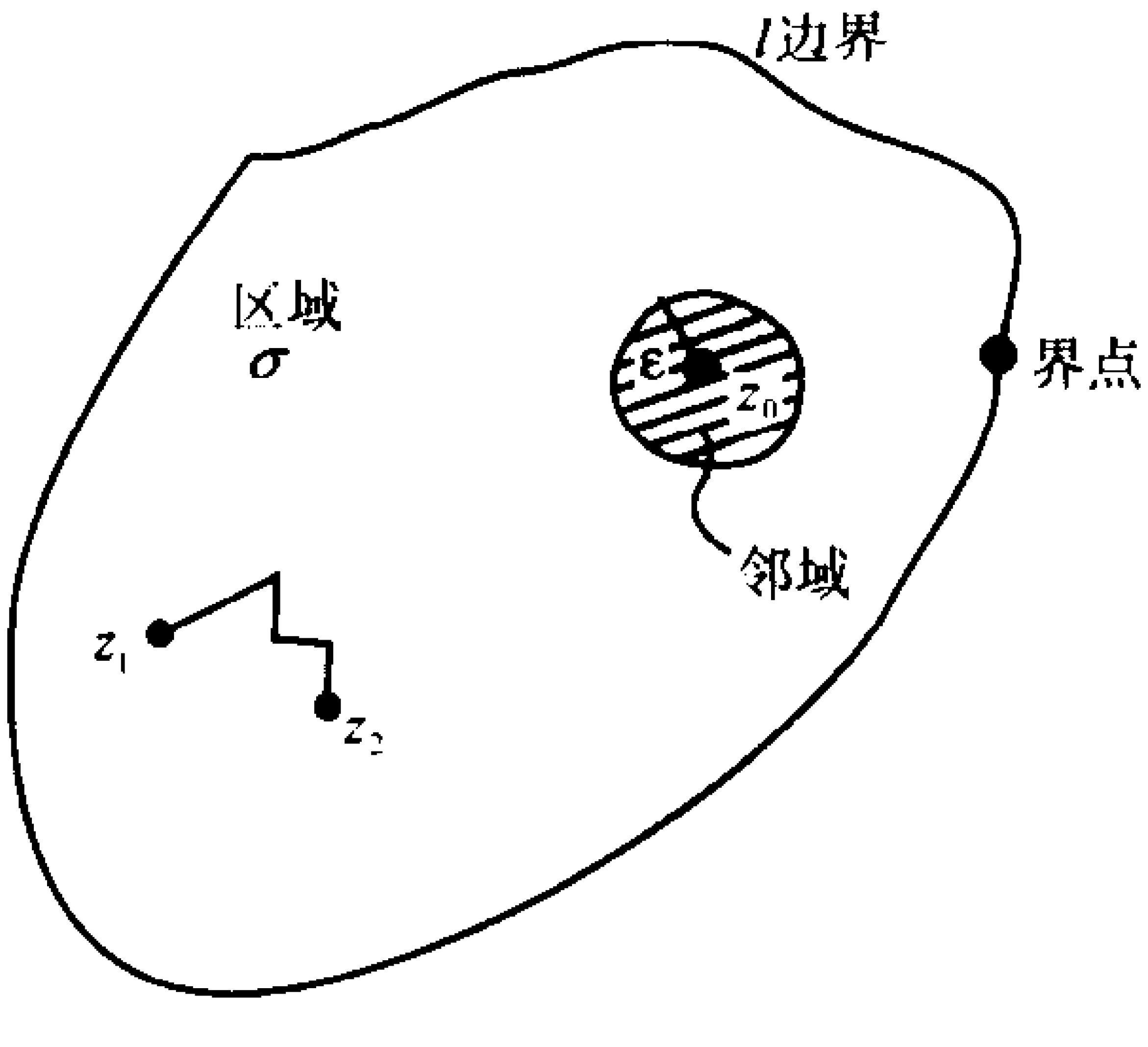

图 1.2

(4) 边界　若每一个 $N(z_0,\varepsilon)$内都既有属于区域 σ 的点,又有不属于区域 σ 的点,则称 z_0 为 σ 的**界点**.由区域 σ 的全部界点组成的点集 l,称区域 σ 的**边界**.常规定若沿着边界走时区域 σ 总在左边的走向为σ 的边界的正向.

(5) 闭区域　区域 σ 和它的边界 l 一起构成闭区域,记为 $\bar{\sigma}=\sigma+l$.

(6) 单连通区域　若区域 σ 内的简单闭曲线(即不自交的封闭曲线)的内部仍属于 σ,则称 σ 为**单连通区域**(图 1.3).

(7) 复连通区域　非单连通的区域为**复连通区域**(图 1.4).

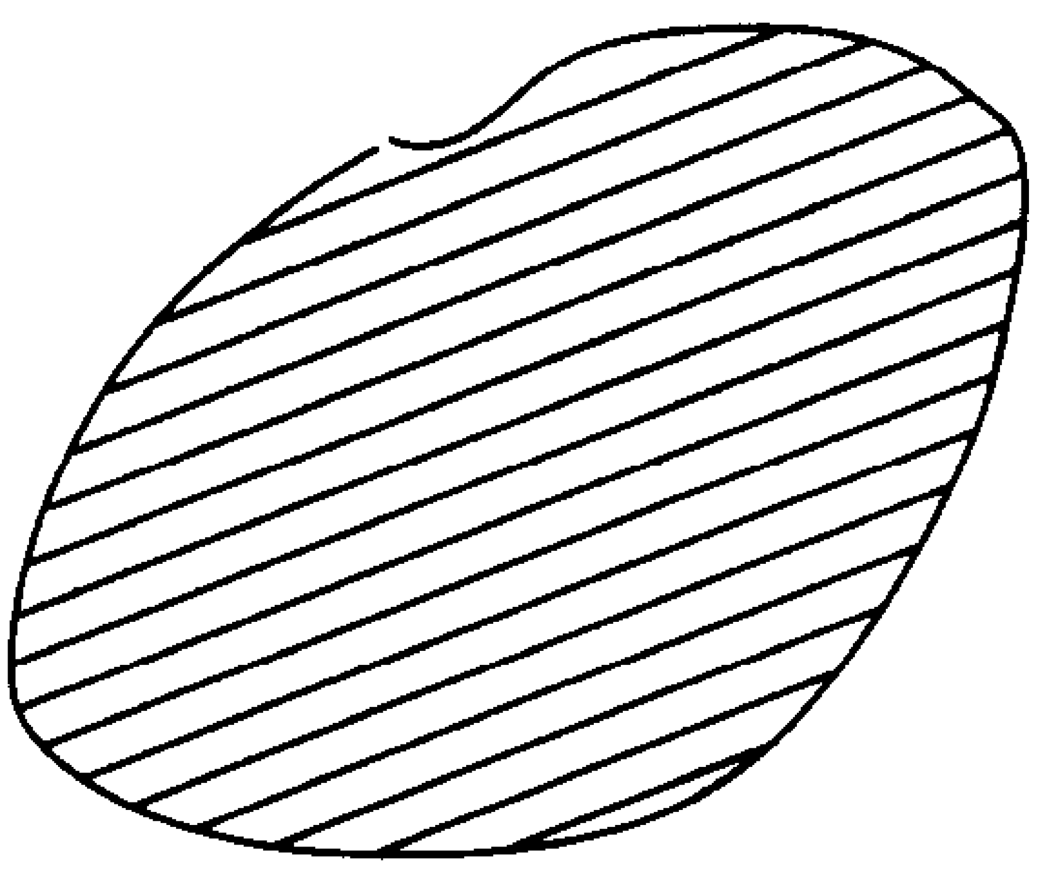
图 1.3

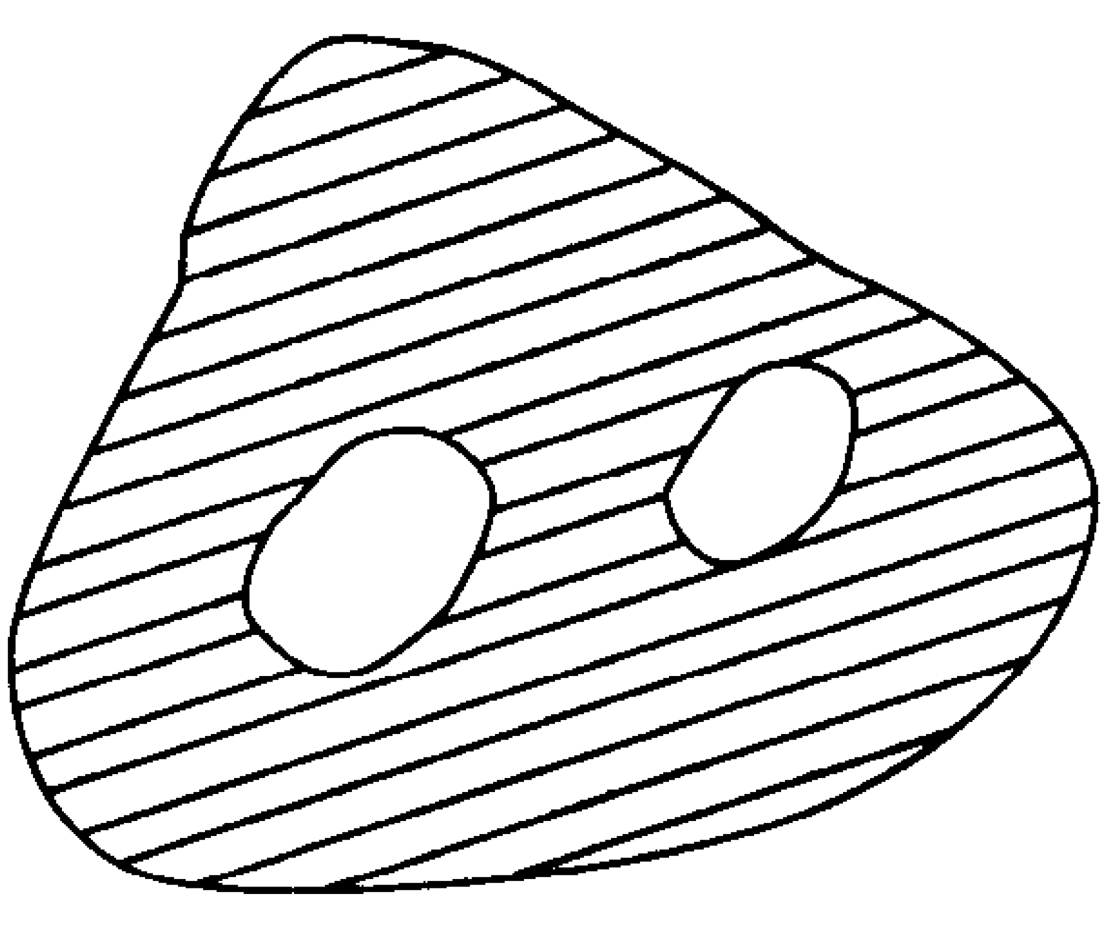
图 1.4

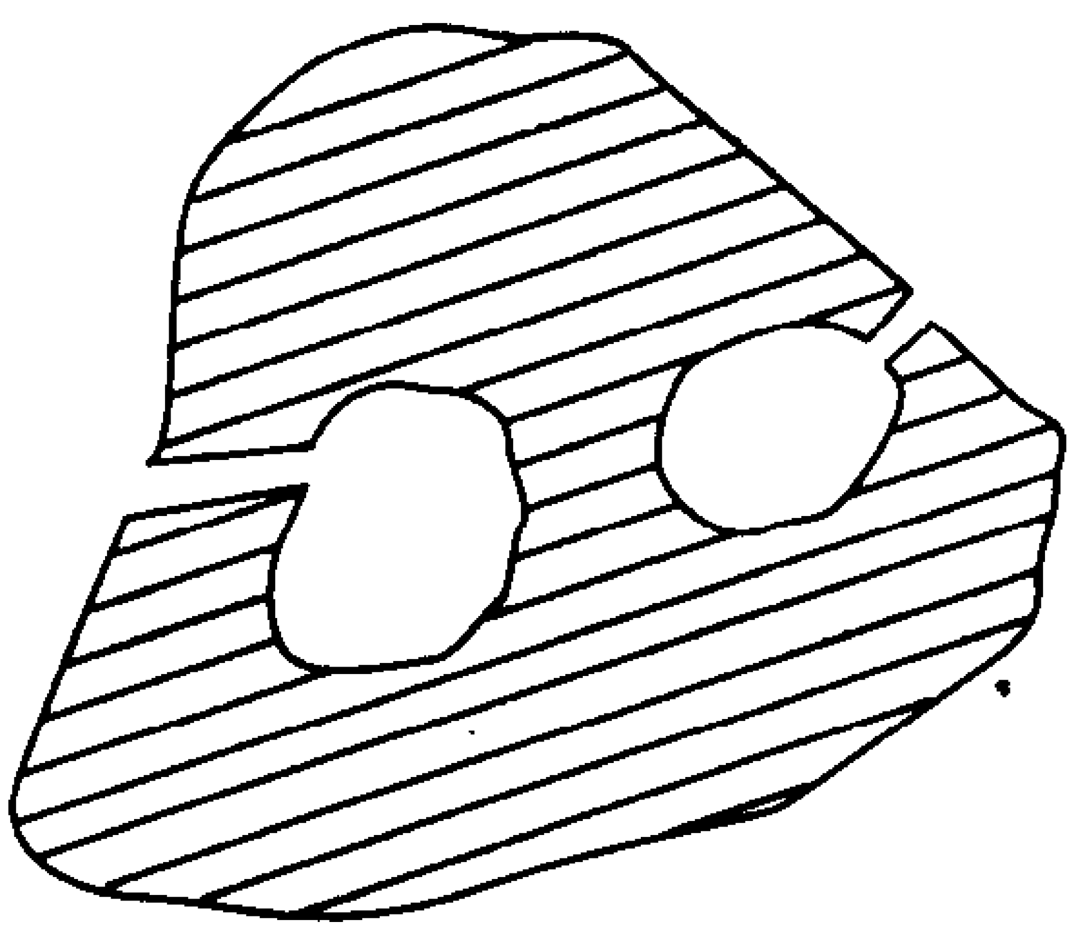

图 1.5

简单的说单连通区域是无洞的区域，复连通区域是有洞的区域. 复连通区域可适当引入一些割线后变成单连通区域(图 1.5).

3. 极限与连续性

复变函数极限和连续性的定义与实变函数极限和连续性的定义的叙述方式完全相同. 因此，有关复变函数的极限和连续性的讨论，可归结为对两个二元实函数的极限和连续性的讨论. 显然，实变函数中关于极限的运算规则和连续函数的许多性质，对复变函数均成立. 值得强调的是

(1) $f(z)$在 z_0 点极限存在或 $f(z)$在 z_0 点连续，必须要求其极限值 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z_0)=A$ 或 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$在整个复平面内与 z 趋于 z_0 的方向无关.

(2) 两种极限不存在的情况 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 和 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$的值不定，是我们常会遇到的.

(三) 微商及解析函数

1. 微商及微分

(1) 导数　设 $f(z)$是在 z_0 点及其邻域定义的单值函数，若 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$存在，并与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，则称$f(z)$在 z_0 点**可导**或**可微**，这个极限值就称为 $f(z)$在 z_0 点的导数或微商，记为

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}\text{或} f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} \tag{1.1.16}$$

复变函数的求导公式和求导法则与实变函数相同，如，$\sin' z=\cos z$，$(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z$；$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$等. 另有一计算导数的公式为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.1.17}$$

(2) 微分　称 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\mathrm{d}z$ 为$f(z)$在 z_0 点的**微分**.

(3) 可导的必要条件　函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 可导的必要条件是