# 数学与思维

徐利治 王前◎著

SCIENCE & HUMANITIES

03

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第二辑）

*Mathematics and Thinking*

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

# 数学与思维

徐利治 王前 ◎著

SCIENCE & HUMANITIES

03

（珍藏版）

数学科学文化理念传播丛书（第二辑）

*Mathematics and Thinking*

图书在版编目(CIP)数据

数学与思维 ：珍藏版 / 徐利治，王前著. —2 版
. —大连 ：大连理工大学出版社，2016.1
(数学科学文化理念传播丛书)
ISBN 978-7-5685-0162-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①徐… ②王… Ⅲ. ①数学—关系—思维 Ⅳ. ①O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 249449 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　传真:0411-84701466　邮购:0411-84708943
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连住友彩色印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:188mm×260mm　印张:7.5　字数:106 千字
2008 年 7 月第 1 版　2016 年 1 月第 2 版
2016 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　王　伟　责任校对:田中原
封面设计:冀贵收

ISBN 978-7-5685-0162-0　定价:39.00 元

数学科学文化理念传播丛书·第二辑

# 编写委员会

# 写在前面*

## 一

20 世纪 80 年代，钱学森同志曾在一封信中提出了一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，他建议称之为数学科学．当然，这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”，他认为在人类整个知识系统中，数学不应该被看成是自然科学的一个分支，而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位．

我基本上同意钱学森同志的这个意见．数学不仅在自然科学的各个分支中有用，同时在社会科学的很多分支中也有用．随着科学的飞速发展，不仅数学的应用范围日益广泛，同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻．事实上，数学的重要性不只在于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系，而且数学自身的发展水平也在影响着人们的思维方式，影响着人文科学的进步．总之，数学作为一门科学有其特殊的重要性．为了使更多人能认识到这一点，我们决定编辑出版《数学・我们・数学》这套小丛书．与数学有联系的学科非常多，有些是传统的，即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科，如力学、物理学以及天文学等．化学虽然在历史上用数学不多，不过它离不开数学是大家都看到的．对这些学科，我们的丛书不打算多讲，我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切，但又不大被大家注意的学科，或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科．我们这套丛书并不想写成学术性的专著，而是力图让更大范

* “一”为丁石孙先生于 1989 年 4 月为《数学・我们・数学》丛书出版所写，此处略有改动；“二”为丁先生为本丛书此次出版而写．

围的读者能够读懂，并且能够从中得到新的启发．换句话说，我们希望每本书的论述是通俗的，但思想又是深刻的．这是我们的目的．

我们清楚地知道，我们追求的目标不容易达到．应该承认，我们很难做到每一本书都写得很好，更难保证书中的每个论点都是正确的．不过，我们在努力．我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见，甚至就某些问题展开辩论．我们相信，通过讨论与辩论，问题会变得愈来愈清楚，认识也会愈来愈明确．

## 二

大连理工大学出版社的同志看了《数学·我们·数学》这套丛书，认为本套丛书的立意与该社目前正在策划的《数学科学文化理念传播丛书》的主旨非常吻合，因此出版社在征得每位作者的同意之后，表示打算重新出版这套书．作者经过慎重考虑，决定除去原版中个别的部分在出版前要做文字上的修饰，并对诸如文中提到的相关人物的生卒年月等信息做必要的更新之外，其他基本保持不动．

在我们正准备重新出版的时候，我们悲痛地发现我们的合作者之一史树中同志因病于上月离开了我们．为了纪念史树中同志，我们建议在丛书中仍然保留他所做的工作．

最后，请允许我代表丛书的全体作者向大连理工大学出版社表示由衷的感谢！

丁石孙

2008 年 6 月

# 目　录

## 数学研究与左右脑思维的配合

# 绪 论

数学从它诞生那天起，就与思维结下了不解之缘．数学的存在和发展都要依靠思维，都要通过思维来表现．反过来，数学又是思维的工具．精湛的思维艺术常常要借助数学显示其美感和力量．“数学思维”作为一个统一的名词，经常挂在学者们的嘴边．人们对它的使用习以为常，大都不假思索．既然如此，专门写这样一本小书来讨论数学与思维，又有什么意义呢？

诚然，“数学思维”一词是被人们用惯了的，但用惯了的东西未必就是深刻理解了的东西．笼统地讲“数学思维”，每个学过数学的人都会联想到以往的许多数学思维活动，产生一种生动直观的、但却一言难尽的感受．但是要继续追问数学思维的本质特点和规律性，追问数学思维的不同类型和作用，追问数学思维与其他思维活动的关系，那就不是谁都能回答的了．对数学思维的深刻理解，必须经历一番深沉的思索．当然，这种思索不应该是枯燥无味的，它应该充满机智、幽默和创造的活力．“深沉”的含义在于不能浅尝辄止，而应该有一种深入事物内部穷追不舍的精神．

对“数学思维”的思索，首先需要对其进行适当的解剖．这就是我们为什么要讨论“数学与思维”而不是“数学思维”的原因．把“数学”与“思维”分开来考察，再来看两者间的内在联系，许多事情可以看得更清楚些，更准确些．数学的思维活动在许多方面与其他科学的思维活动类似，同时又有自身特点．过去人们往往只注意数学思维活动与其他科学思维活动的差异，而且有时把这种差异绝对化．问题恰恰就出在对共性的忽视上．过去人们常常强调数学思维具有“高度的抽象性”

和“严密的逻辑性”. 这是不错的. 但数学思维同时还具有类似自然科学思维的“观察、实验、类比、归纳”等特点，甚至具有类似社会科学思维的“猜测、反驳、想象、直觉、美感”等特点. 当思维的所有类型差不多在数学中都能找到类似物时，人们自然要想到，这究竟是怎么一回事呢？数学与思维是怎样一种关系呢？数学思维与人脑构造是怎样一种关系呢？人们的眼界势必要扩大到整个思维科学和脑科学领域，在这样一个背景下认识数学思维自身的特点.

恰好，现代思维科学和脑科学研究的新进展，为解决这方面问题提供了重要资料和线索. 现在，人们知道，人的大脑的两个半球具有不同的功能. 左半脑主要担负逻辑分析和推理的任务，右半脑主要担负形象思维和审美的任务. 左、右半脑在生理机制上互相联系、互相促进. 一个半脑的发展明显有助于另一个半脑机能的改善. 过去人们常常强调的数学思维的抽象性和逻辑性，是同左半脑的思维功能相联系的. 而数学思维具有的“实验、猜测、想象、直觉、美感”等特点，是同右半脑的思维功能相联系的. 因此，我们对数学与思维关系的探讨，就需要考虑到两个半脑思维的不同特点及其相互关系. 在本书中，我们分别讨论了数学与“左脑思维”和“右脑思维”的关系，并以此为基础探讨了数学思维与左右脑的配合问题，通过这样进一步的解剖过程，就能对数学与思维的关系获得更深入的认识.

讨论数学与思维的关系，对于数学研究和数学教育都有十分重要的意义. 近年来，国内外数学界都很注重对数学发现和创造过程中思维活动规律的研究. [①]美国著名数学家 G · 波利亚(G. Polya)所著的《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等书译成中文出版后，产生了广泛影响. 英国数学哲学家 I · 拉卡托斯(I. Lakatos)的《证明与反驳》一书，也使数学工作者深受触动，思路大开. 这些著作实际上都是从不同角度讨论数学与右脑思维的关系，作为对以往人们过于注重数学与左脑思维关系的偏向的补偿. 应该指出，以往人们对数学与左脑思维关系的研究也是不够深入的. 对数学逻辑严密性的追求往往是不言而喻的自发行动，但却很少考虑数学左脑思维的一般特点、必要性

① 本书所引文献出处均以当页脚注形式给出. 第一次出现时注明文献刊出的期刊名称或出版单位以及出版时间和作者，以后再出现同一文献时，均只给出名称和页码，而不再注明版本和时间.

和局限性.数学研究和数学教育常常被当成抽象晦涩、枯燥刻板的事情.G·波利亚和I·拉卡托斯等人的工作,给数学研究和数学教育带来了一股新鲜气息,在一定程度上恢复了数学思维生动、机智,充满创造活力的本来面目.数学界的这种思想变化表明,数学与思维的关系正在成为今后数学发展的一个焦点.这方面的研究有可能使数学研究和数学教育获得新的动力,出现新的景象.

在数学研究方面,数学与思维的关系历来是由数学家们自发地维系着的.当数学与思维的关系成为自觉的认识对象时,必然会大大提高数学研究的水平.数学工作者们可以通过不断的反思,不断调整自己的思维结构,训练自己的思维能力,用灵活的方法和高超的技巧解决历史遗留的难题,开拓新的研究方向.对于数学家来说,最重要的是有一个思维灵敏的大脑.任何重大的数学发现和创造都是数学家思维方式发生大变革的结果.如果数学家们能够比较自觉地把握思维方式的变化规律,显然会焕发更多的聪明才智,获得更加丰硕的成果.

在数学教育方面,数学与思维的研究将促进数学课程和教学方法的改革.现在人们越来越多地讨论着已往数学教育中的某些弊端,诸如过分强调死记硬背大量规则,做大量经验性的练习,忽视思想内容和能力训练,等等.美国数学家A·拉克斯(A. Lax)和G·格罗特(G. Groat)曾指出:"当用记忆规则的教学铺平通往正确答案的道路时,学生就没有贡献其创造力的余地.学生们看不出数学和思维有关系;他们把它与一堆需要记忆的公式和规则联系在一起."①要克服这种倾向,必须从一般的意义上弄清楚数学与思维的关系,使数学教师和学生们都意识到忽视数学思维能力带来的危害.这样才能逐渐选择合适的教学内容、教学原则和方法,从小培养学生的创造性,使数学真正成为一门思维的艺术,在现实应用中发挥更大的作用.

对数学与思维关系的讨论,在我国数学教育改革和发展中有特殊重要的意义.应该看到,由于我国传统文化的影响,人们往往只是从工具的角度来理解数学的功能,强调其算法性质.数学教育中比较注重计算和应用,而对逻辑思维和创造能力的培养都不甚注意.换言之,由

① L·A·斯蒂恩主编:《明日数学》,华中工学院出版社1987年版,第90-91页.

于传统文化的影响，数学与左脑思维和右脑思维的关系都未能得到深入研究. 因此，我国的数学教育尽管也有相当的规模和实力，但获得的世界一流的研究成果还为数不多，也没有形成若干有自己思想特色的学派. 要想使我国的数学研究进入世界先进水平，必须在数学教育中打下坚实的思想基础. 从现在起，就应该重视数学的思维功能，重视学生们思维能力的培养. 这一点应该引起我国数学界足够的注意.

讨论数学与思维的关系，对于数学之外的很多学科领域也是很重要的. 自古以来，特别是在欧洲文化思想的发展过程中，学习数学一直有着训练逻辑思维的功能. 古希腊的几何学中之所以强调“尺规作图”，目的正是在于把训练逻辑思维的功能尽力加以发挥. 研究数学与思维的关系，有助于人们了解数学在培养逻辑思维能力方面的意义和作用，提高逻辑思维的水平. 这对于自然科学和社会科学各领域的发展都是大有好处的. 对数学与思维关系的探讨，还有助于思维科学的发展. 数学思维的丰富内容为思维科学研究提供了大量生动素材，促使人们更深入地思考思维过程的一般规律，了解各种思维活动的本质特点及其相互关系. 由此看来，非数学专业的科学工作者，也都能从数学与思维的讨论中有所收获，有所补益.

数学与思维的关系是一个大题目，而本书只是做了一些初步探讨，未必涉及数学与思维关系的所有层面. 对于读者来说，本书是一部入门性质的书籍，力求适应不同文化知识结构的较广大的读者群，尽量写得深入浅出，通俗易懂，又不失哲理性和启发性，目的在于引起更多的读者的兴趣，与我们一起来重视和深入探讨数学与思维的关系. 一般说来，具有一定数学史知识和高中以上文化知识的读者，读这本书大概是不会有困难的. 但是要抓住这个课题深入钻研下去，我们大家都要付出更多的气力. 愿本书成为对数学与思维进行广泛研究的新的开端.

# 数学与左脑思维

# 一　数学与抽象

## 1.1　数学的对象与抽象思维

数学是抽象性极强的一门科学.数学的对象都是抽象思维的产物.研究数学对象与抽象思维的关系,是对数学与思维关系进行探讨的出发点.

“抽象”这个词,来源于拉丁文“abstractio”,原文含有“排除、抽出”的意思.所谓抽象思维,一般指抽取出同类事物的共同的、本质的属性或特征,舍弃其他非本质的属性或特征的思维过程.这里有两个条件:第一,抽象出来的本质属性或特征原来就存在于同类事物之中,抽象的过程只是把它分离了出来;第二,抽象出来的一定是事物的本质属性或特征,是决定其他非本质的属性或特征的东西.数学的抽象思维在很多情况下也具有这样的特点,但在另一些情况下则不尽然.

有许多数学对象是依靠抽取的办法获得的.比如从三只鸟、三个苹果和三棵树这类具体事物中抽象出“三”这个数字概念,在全体偶数、全体整数、全体有理数、全体实数这些集合的性质中抽象出“基数”这个概念,等等.古语说:“有所得必有所失”.经过这样抽象获得的数学对象,在概念外延上更宽广一些,但在内涵上(或结构上)就贫乏软弱一些.我们不妨称这种抽象类型为“弱抽象”.举个稍微深一点的例子.如果我们考察欧氏空间内积具有的性质,把它的基本性质抽取出来作为内积公理,舍弃欧氏空间内积的其他性质和具体形式,这样就得到了抽象的“内积”概念,它包括一切满足内积公理的关系.具有内积的线性空间叫作内积空间.内积空间比欧氏空间广,但内积空间中的拓扑结构比欧氏空间弱.弱抽象简单地说就是减弱数学结构的

抽象.

弱抽象的关键在于从数学对象的众多属性或特征中辨认出本质属性或特征,从貌似不同的同类数学对象中找出共同的东西.这种抽象思维的法则,可称为“特征分离概括化法则”.运用这种法则需要很强的思维技巧,灵活地变换思考问题的角度.试看下面两个图形①:

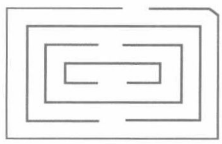

图 1

图 2

图 1 和图 2 初看起来似乎没有任何共同之处.图 1 像是一系列套盒,图 2 像是珍珠项链的简图.但仔细看来,这两个图形有一个重要方面是完全相同的.如果把图 1 看成一个迷宫图,我们尝试找一条从外边通向最里层的途径.经过充分调查之后,我们可以全面描述通行路线.假如这个迷宫图如图 3 那样标记,那么可描述如下:

从外界 $O$ 进入门 $A$,然后有二通道 $B$ 和 $C$ 都可通往门 $D$,门 $D$ 里有二通道 $E$ 和 $F$ 都可通往门 $G$,门 $G$ 里有二通道 $H$ 和 $I$ 都可通往门 $J$,门 $J$ 里面是最内的居室 $S$.

现在假定把图 2 标记如图 4.

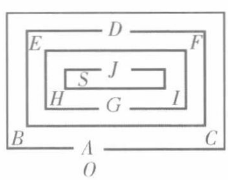


图 3

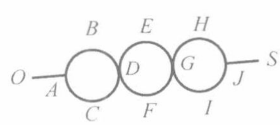


图 4

那么很容易看出,当我们从左向右旅行时,用于图 3 的描述也运用于图 4.因而两个图形在这方面是完全一致的.由于只考虑通行路线的性质,我们就从两个貌似不同的数学对象中抽取出一个具有共性的概念——“网络”.两个图形的网络性质是完全相同的.

这个抽象过程还可以再进一步,并且完全同几何学相分离.在上面的网络里,用字母标记通道相交之处,联结不同点的线现在只剩下

① 注:这里的图 1 至图 4 选自 P. J. Davis & R. Hersh: The Mathematical Experience, Birkhäuser, 1981, Chapter Ⅳ.

符号了.我们可以把这些关系写成“$AB$,1;$BC$,2;$CD$,2;$DE$,2;$EF$,1”,用来表明 $A$ 与 $B$ 之间有一条通道,$B$ 与 $C$ 之间有两条不同通道,等等(图 5).这样,具有几何意义的网络就被进一步抽象为只具有组合性质的抽象网络,它只表示一组结点及结点间的关系.

图 5

下面我们考虑另一种类型的抽象.它的产物不是从同类事物的众多属性或特征中抽取出来的,而是通过把新特征引入原有数学结构加以强化而形成的.此种抽象可称为“强抽象”.比如,在函数概念中引进连续性概念,构成连续函数概念,对线性空间引入拓扑结构以构成线性拓扑空间.点、线、面等几何元素同各种变换关系相结合,逐渐产生了相似、仿射、射影、同胚等概念,等等.经过这样抽象获得的数学对象,在概念外延上要变得窄一些,但在内涵上更丰富具体.当然需要注意,这里所说的“具体”不是指感性认识中的具体,而是指抽象思维中的“具体”.这种“具体”是对感性的具体中本质属性的综合.人们的认识首先是从感性的具体表象出发,通过思维活动分析出各种孤立的、抽象的规定(这是“弱抽象”的过程).然后,这些孤立的、抽象的规定又在思维中被联结起来,综合成思维中的“具体”.由于思维中的“具体”综合了感性的具体中的本质属性和特征,因而它在反映客观世界方面就比感性的具体更正确、更完全、更深刻.这就是说,强抽象并不是抽象思维的倒退,不是由抽象思维退回到感性的具体,而是抽象思维的进步,是上升到了一个更高的阶段.数学中有很多强抽象的产物,如解析函数、巴拿赫空间,纤维丛等等,它们看上去极为抽象,但却在物理学中得到重要应用.这就是由于它们更具体,更接近现实世界,特别是那些为人们的感觉经验无法直接把握的世界.

强抽象的关键是能把一些表面上看来互不相关的数学概念联系起来,引进某种新的关系结构,并把新出现的性质作为特征规定下来.这种抽象思维法则可称为“关系定性特征化法则”.运用这种法则不仅需要数学工作者有渊博的知识背景和较大的思维跨度,而且需要对数学作为一个整体的内在统一性有较深刻的理解.希尔伯特曾指出:“数学科学是一个不可分割的有机整体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系.……数学理论越是向前发展,它的结构就变得越加调和一

致，并且这门科学一向相互隔绝的分支之间也会显露出原先意想不到的关系.因此，随着数学的发展，它的有机的特性不会丧失，只会更清楚地呈现出来."[1]正是由于有这样的指导思想，希尔伯特一生贡献出大量强抽象的产物，如在他的直接和间接影响下发展起来的希尔伯特空间理论、范数剩余理论、多项式理想理论，等等[2].现代数学的发展尽管越来越抽象，但却没有任何贫乏枯竭的迹象，反而越来越显得内容丰富、充满活力，这在很大程度上取决于强抽象的力量.这种类型的抽象不断把弱抽象的成果联结起来，统一起来，才使数学的有机整体得以发展壮大.

作为强抽象的一种特殊情况，是在具有对偶关系的数学结构之间进行的，即根据对偶性质，由已知数学结构引导到与之对偶的新的数学结构.这种情况下的抽象思维法则可称为"结构关联对偶化法则".它是"关系定性特征化法则"在特定场合中的具体应用.对偶关系的引入看来简单一些，但比较可靠，富有成果.比如在平面几何中，人们发现由点、线等关系结构形成的几何命题或定理，只需把点换成线，线换成点，并把诸种几何关系换成相应的对偶关系后，所得到的新命题或新定理仍然成立.这样，几何中每一条定理及其对偶定理只需证明一个就够了.又如，在泛函分析中，为了研究一个函数空间结构，往往转而研究它的对偶空间或共轭空间.在博弈论中研究对偶策略，在规划论中考虑对偶规划，在积分变换与数列变换中研究互逆变换等等，都是把一对数学结构按对偶化法则关联起来，获得更为完全的思维中的"具体".

数学抽象的第三种类型是较为特殊的，可以称之为"构象化抽象".这种抽象类型的产物，是一些不能由现实原型直接抽取的，完全理想化的数学对象，比如只有位置没有大小的点、没有宽窄且无限延伸的直线、没有厚度又没有边界的平面、虚数、无穷小量、无限远点，等等.它们是出于数学发展的逻辑上的需要而构想出来的，其作用在于可以作为一种新元素添加到某种数学结构系统中去，使之具有完备性，即运算在此结构系统中畅行无阻.这种类型的抽象思维法则可称

① 康斯坦西·瑞德:《希尔伯特》，上海科学技术出版社，1982年，第103页.

② 《数学史译文集》，上海科学技术出版社 1881年，第33-58页.