高等学校试用教材

泛函分析第二教程

夏道行　舒五昌
严绍宗　童裕孙

高等教育出版社

高等学校试用教材

泛函分析第二教程

夏道行　舒五昌
严绍宗　童裕孙

高等教育出版社

本书共分五章，分别介绍了向量值函数积分和向量值测度，算子半群，拓扑线性空间，Banach 代数，非线性映射等基本内容．除广义函数论因《实变函数论与泛函分析》（夏道行等编）第七章中已有扼要介绍外，泛函分析中最重要也是最具应用价值的几个部分都在本书中介绍了．只要具备大学阶段所规定的泛函分析基础课知识就可阅读本书，本书可作为综合大学、师范院校数学类各专业高年级学生的选修课教材，也可作为理、工科有关专业研究生教材．

本书由理科数学、力学教材编审委员会函数论、泛函分析编审组委托江泽坚、张恭庆教授主持的审稿会审查，同意作为高等学校试用教材出版．

高等学校试用教材

泛函分析第二教程

夏道行　舒五昌

严绍宗　童裕孙

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 14.375　字数 34 700

1987 年10月第 1 版　　1987年10月第 1 次印刷

印数 00 001—4 228

ISBN 7-04-000233-7/O

书号 13010·01488　定价 2.90 元

序

泛函分析是数学中的一个较新的重要分支．它起源于经典数学物理中变分问题，概括了经典分析、函数论等中某些重要概念、问题和成果，并受到量子物理、现代力学以及现代工程技术的有力刺激．它综合地运用分析、代数和几何的观点和方法，研究分析数学、现代物理和现代工程技术等所提出的有关问题．它是本世纪出现的第一个高度综合性的数学学科．从本世纪中叶开始，偏微分方程理论、概率论(特别是随机过程理论)以及部分计算数学，由于运用了泛函分析而得到了大发展．现在，泛函分析的观念和方法已经有力地渗透并影响着现代纯粹与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子物理、统计力学、现代控制论、现代力学、抽象调和分析、函数论、大范围微分几何等．

泛函分析课程现在已作为一门基础课列入我国高等院校数学系和应用数学系的教学计划，也已成为许多工程技术专业研究生必读的数学基础课之一．考虑到泛函分析在数学的理论研究和应用中的需要，而许多重要和有价值的内容又不可能在基础课中介绍，因此，1982年春数学、力学教材编审委员会函数论、泛函分析组决定在基础课内容基础上再编写一本泛函分析的选修课读物，以适应我国目前教学发展的需要．

本书主要综合介绍泛函分析的最基本最重要的几个方面．全书共分五章：第一章，向量值函数的积分和向量值测度；第二章，算子半群；第三章，拓扑线性空间；第四章，Banach 代数；第五章，非线性映射．显然，作为反映泛函分析最基本最重要的方面而言，理

应还有广义函数论，由于考虑到在本书部分作者所编的《实变函数论与泛函分析》（高等教育出版社出版）一书的第七章已对它作了扼要介绍（从本书的要求来看，这个介绍略嫌简单了点）以及本书的篇幅所限，所以本书未列入广义函数论内容.

本书第一章的前三节和第四节的前两小节是一般性的基础知识，其余的部分初学者可暂不学. 第二章—第五章，除第三、四章内容有些联系外，各章内容具有相对独立性，也就是说，第二—第五的章次顺序既非是数学内容的必然的逻辑顺序，也非数学内容重要性的顺序. 在编写本书的技术方面也充分注意并有意加强这种独立性. 因此，在用本书教学时，例如，可以在讲完第一章部分内容后立即讲第五章；讲授者认为必要时，甚至也可先讲第四章 Banach 代数，而后再适当介绍第三章拓扑线性空间的某些内容（当然，这样做就要少许介绍或暂时承认少量拓扑线性空间的基本事实）. 如果每周讲授三学时，估计讲完本书需一年；如果安排学时不足，则应按所学对象的需要可只讲部分章节.

本书承蒙吉林大学江泽坚、北京大学张恭庆、兰州大学陈文嵘、四川大学孙顺华、南京大学马吉溥诸位教授组成的审查组进行审查，他们的许多宝贵意见和精辟见解使得本书大为增色. 最后张恭庆教授还仔细审阅了修改稿全文，为本书的最后定稿和完善付出了艰辛的劳动. 因此，本书实际上是我国泛函界同行共同的劳动成果. 在此，作者对他们诸位以及为组织此书出版出过大力的北京师范大学孙永生教授表示衷心的谢意. 限于作者水平，本书诸多不当之处尚希同行批评指正，以便日臻完善.

作　者

一九八六、二、

目 录

第一章　向量值函数的积分与向量值测度

本章目的在于把实分析中的基本概念推广到向量值情况，这里的向量通常指赋范线性空间中的元．由于分析数学的基础是收敛概念，而无限维赋范线性空间又有若干种不同的拓扑结构，因此，实分析中一个概念，在向量值函数理论中，往往可以引伸出强形式的推广和弱形式的推广．两者有区别，又有联系，在某种情况下还可能是一致的，它们分别应用于不同问题的研究，丰富了向量值函数分析的内容．

作为引子，我们首先在§1.1中建立了向量值函数的微积分．从简要的讨论中人们可以看到，由数值函数过渡到向量值函数，相应的概念可能如何推广，也能初步体会到 Hahn-Banach 定理、共鸣定理等泛函分析的基本结果在这类推广中的作用．§1.2和§1.3用于讨论向量值函数的可测性，并在此基础上导出 Bochner 积分和 Pettis 积分，它们是 Lebesgue 积分在强、弱两种情况下的推广，也是较常用的两种向量值函数的积分．本章的另一个对象是§1.4所讨论的向量值测度，对这种可列可加向量值集函数的研究，不可避余地要大量使用前两节所提供的工具．我们在这一节中初步介绍了向量值测度的 Radon-Nikodym 性质，人们对该问题研究的兴趣至今未衰．我们还用一定的篇幅讨论了数值函数关于向量值测度的积分，Hilbert 空间上的谱积分当然可以看作这里的一个特例．

§1.1　向量值函数的微积分

在本书中，我们用 K 表示实数域或复数域，X 表示赋范线性空间. 本节中所谓向量值函数是指从 K 的子集 Ω 到 X 的任一单值映射.

本节作为初等分析的推广，主要讨论向量值函数的连续性、可导性和 Riemann 积分. 由于 Banach 空间中有几种不同的拓扑结构，即有几种不同的极限，因而相应地产生了几种不同的连续性、可导性等概念.

1.1.1　向量值函数的连续性

定义　设 $\Omega\subset\mathrm{K}$，x 是定义于 Ω 取值于 X 的向量值函数，即 $x:\Omega\to X$，$t_0\in\Omega$，

(i) 如果对一切 $f\in X^*$，

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t))=f(x(t_0)),$$

则称 x 在 t_0 弱连续；

(ii) 如果

$$\lim_{t\to t_0}\|x(t)-x(t_0)\|=0,$$

则称 x 在 t_0 强连续；

如果 x 在 Ω 上每一点均是弱(强)连续的，那末，称 x 在 Ω 上弱(强)连续.

显然，如果向量值函数 x 在 t_0 强连续，则必在 t_0 弱连续，但反之不然.

例 1　设有向量值函数 $x:[0,1]\to l^2$，

$$x(t)=\begin{cases}e_n, & t=\dfrac{1}{n},\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中，e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元. 于是，易见 $w\text{-}\lim\limits_{t\to 0}x(t)=0$，但 $\left\|x\left(\dfrac{1}{n}\right)-x(0)\right\|=1$，所以 x 在 0 点弱连续而不强连续.

特别地，设 $B(X\to X)$ 为 X 上有界线性算子全体，则它按算子范数是赋范线性空间，自然可以考察定义于 Ω 取值于 $B(X\to X)$ 的向量值函数(也称作算子值函数). 这时，常用到下列连续性的概念.

定义 设有向量值函数 $U:\Omega\to B(X\to X)$，$t_0\in\Omega$，

(i) 如果对任何 $x\in X$，$f\in X^*$，均有

$$\lim_{t\to t_0} f((U(t)-U(t_0))x)=0,$$

则称 U 于 t_0 处**按弱算子拓扑连续**，

(ii) 如果对任何 $x\in X$，均有

$$\lim_{t\to t_0}\|(U(t)-U(t_0))x\|=0,$$

则称 U 于 t_0 处**按强算子拓扑连续**；

(iii) 如果

$$\lim_{t\to t_0}\|U(t)-U(t_0)\|=0,$$

则称 U 在 t_0 处**按一致算子拓扑连续**.

显然，由算子值函数按一致算子拓扑连续可以导出按强算子拓扑连续，由按强算子拓扑连续又可导出按弱算子拓扑连续. 但反之未必成立. 读者可自行举出相应的例子.

定理 1 设 Ω 是 $\mathbb{K}$ 中的有界闭集，

(i) 如果向量值函数 $x:\Omega\to X$ 弱连续，则 $\{\|x(t)\|\mid t\in\Omega\}$ 是有界集；

(ii) 如果算子值函数 $U:\Omega\to B(X\to X)$ 按弱算子拓扑连续，并且 X 是 Banach 空间，则 $\{\|U(t)\|\mid t\in\Omega\}$ 是有界集.

证 (i) 由假设，对任何 $f\in X^*$，$f(x(t))$ 是 Ω 上的连续数值函数，因此，在 Ω 上有界，即

$$\sup_{t\in\Omega}|f(x(t))|<+\infty,\quad \forall f\in X^*,$$

记 τ 为嵌入映射 $X\to X^{**}$，上式即为

$$\sup_{t\in\Omega}|\tau(x(t))(f)|<+\infty,\quad \forall f\in X^*,$$

由共鸣定理得到

$$\sup_{t\in\Omega}\|\tau(x(t))\|<+\infty,$$

但 $\|x(t)\|=\|\tau(x(t))\|$，所以

$$\sup_{t\in\Omega}\|x(t)\|<+\infty.$$

(ii) 由假设，对每个 $x\in X$，$t\longmapsto U(t)x$ 是弱连续的向量值函数，定义于 Ω，由 (i) 可知

$$\sup_{t\in\Omega}\|U(t)x\|<+\infty,\forall x\in X,$$

再利用共鸣定理，即知

$$\sup_{t\in\Omega}\|U(t)\|<+\infty.\qquad \text{证毕.}$$

定理 2 设 Ω 是 $\mathbf{K}$ 中的有界闭集，向量值函数 $x:\Omega\to X$ 强连续，则它在 Ω 上必是均匀强连续的，即对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t_1,t_2\in\Omega$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时

$$\|x(t_1)-x(t_2)\|<\varepsilon.$$

这个结论的证明和数值函数的情况完全一致，此处从略.

1.1.2 向量值函数的可导性

定义 设 Ω 是 $\mathbf{K}$ 中的开子集，$t_0\in\Omega$，向量值函数 $x:\Omega\to X$ 称为在 t_0 处**强可导**，是指存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}-x_0\right\|=0.$$

称 x_0 为 $x(t)$在 t_0 处的**强导数**；称向量值 函数 x 在 t_0 处**弱可导**，是指存在 $x_0\in X$，使得

$$\lim_{h\to 0}f\left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right)=f(x_0),\quad \forall f\in X^*$$

此时，称 x_0 为 $x(t)$在 t_0 处的**弱导数**，记为 $x_0=x'(t_0)$.

显然，强可导必定弱可导，并且强导数即是弱导数，x 在t_0 的强导数一般仍记为 $x'(t_0)$. 反过来，弱可导未必强可导，下面就是一个例子.

例 1 设有向量值函数 $x:(-1,1)\to l^2$,

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}e_n, & t=\dfrac{1}{n}\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

e_n 是 l^2 中第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0 的元. 于是

$$\frac{x(t)-x(0)}{t}=\begin{cases}e_n, & t=\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

由于 $w\text{-}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(h)-x(0)}{h}=0$，因此 x 在$t_0=0$处弱可导，且$x'(0)=0$，

但是 $\left\|\dfrac{x\left(\frac{1}{n}\right)-x(0)}{\frac{1}{n}}\right\|=1$，因而 x 在 $t_0=0$ 处不是强可导的.

由定义容易知道：如果向量值函数 $x:\Omega\to X$ 在 t_0 处弱可导，那末对任何 $f\in X^*$，相应的数值函数 $f(x(t))$ 必定在 t_0 处可导，而且

$$\{f(x(t))\}'_{t=t_0}=f(x'(t_0)).$$

但是，这个结论的逆命题一般并不成立，关于这一点，此处不拟详

细讨论.

定理1　设Ω是$\mathbf{K}$中的一个区域,向量值函数$x:\Omega\to X$, 则$x(t)\equiv x_0(t\in\Omega)$的充要条件是$x$弱可导且$x'(t)\equiv 0(t\in\Omega)$.

证　必要性是显然的. 下面证明充分性:设x弱可导且$x'(t)\equiv 0(t\in\Omega)$. 此时,对任何$f\in X^*$,$f(x(t))$在$\Omega$内可导. 且满足

$$\frac{d}{dt}\{f(x(t))\}=f(x'(t))=f(0)=0,$$

因此,$f(x(t))$为常数值函数. 任取$t_0\in\Omega$,即有

$$f(x(t))=f(x(t_0)),\quad \forall f\in X^*,$$

从而必有$x(t)\equiv x(t_0)(t\in\Omega)$. 证毕.

不难看出,在某一点弱(强)可导的向量值函数必在该点弱(强)连续. 实际上,还可以有进一步的结论.

定理2　设x是定义于开集Ω的向量值函数, $t_0\in\Omega$, x在t_0弱可导,则x必在t_0强连续.

证　对任意的$|\delta_n|\searrow 0$, 记$x_{\delta_n}=\frac{1}{\delta_n}[x(t_0+\delta_n)-x(t_0)]$. 由于$x$在$t_0$弱可导,所以对任何$f\in X^*$,极限

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{\delta_n})$$

存在. 和1.1.1的定理1一样,可知存在常数M,使得

$$\sup_n\|x_{\delta_n}\|\leqslant M,$$

从而

$$\|x(t_0+\delta_n)-x(t_0)\|\leqslant M|\delta_n|\to 0,$$

即x在t_0是强连续的. 证毕.

1.1.3　向量值函数的Riemann积分

为了便于今后的应用,这里简单介绍一下向量值函数的Riemann积分.

定义 设 x 是定义于实数区间 $[a,b]$ 而取值于赋范线性空间 X 的向量值函数，对 $[a,b]$ 的任一有限分割 $\mathscr{D}$: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, 作和

$$S_{\mathscr{D}}=\sum_{i=1}^{n-1}x(\xi_i)(t_{i+1}-t_i),\quad \xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$$

又记 $\lambda=\max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$, 如果存在 $z\in X$, 使得 $\lim\limits_{\lambda\to0}\|S_{\mathscr{D}}-z\|=0$, 那末称 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上 **Riemann 可积**, z 称为 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分**, 记作

$$z=\int_a^b x(t)dt.$$

由定义立即可知: 如果 $x(t)$ 是 Riemann 可积的向量值函数, 泛函 $f\in X^*$, 那末 $f(x(t))$ 必定是 Riemann 可积的数值函数, 而且

$$f\left(\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b f(x(t))dt.$$

和数学分析类似地，有下述基本定理.

定理 1 设向量值函数 $x(t)$ 定义于 $[a,b]$, 取值于 Banach 空间 X, x 在 $[a,b]$ 上强连续，则 x 必在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$, 使得

$$|t_1-t_2|<\delta,\ t_1,t_2\in[a,b] \text{ 时 } \|x(t_1)-x(t_2)\|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

由 1.1.1 定理 2，这是可以办到的. 于是，当分割 $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ 的相邻分点最大距离都小不 δ 时,

$$\|S_{\mathscr{D}_1}-S_{\mathscr{D}_2}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon.$$

由于 X 是完备的，故仿数学分析可证 $\{S_{\mathscr{D}}\}$ 必收敛于 X 中的一个元. 证毕.