职工业余中等学校高中课本

SHUXUE

数学

第二册

上海教育出版社

职工业余中等学校高中课本
数　学
第 二 册
职工教材编写组编
上海教育出版社出版
(上海永福路 123 号)
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 9.75　字数 216,000
1983 年 7 月第 1 版　1983 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—850,000 本
统一书号：K 7150·2911　　定价：0.71 元

说　　明

职工业余中等学校高中数学课本，是按照教育部制订的《职工业余中等学校数学教学大纲(试行草案)》初稿，以一九八〇年人民教育出版社出版的工农业余中等学校高中课本《数学》为基础编成的，供干部、职工业余学校教学使用.

这套课本分两册．第一册的内容是函数，三角函数等两章；第二册的内容是空间图形，直线、曲线方程，复数、数列和排列、组合等三章．这套课本的教学时数为250～270课时。第一册为110～120课时，第二册为140～150课时．文科高中可以选学第一册．

这套课本是由教育部组织[illegible]分教师和有关人员编写的，由谢培审定。这册课[illegible]鸿坤、田万海编写，赵宪初审稿。

目　录

第3章 空间图形

在平面几何里，我们已经学习了在同一平面内的几何图形的性质、画法、计算以及它们的应用. 但是，在日常生活和生产实际中，还会遇到一些几何图形，图形上的点不都在同一平面内，象这样的几何图形叫做**空间图形**.

在这一章里，我们将要研究空间图形的性质、画法、计算以及它们的应用.

一 平 面

3.1 平面及其表示法

在日常生活中，平静的水面，镜面，桌面等，都给我们以平面的形象；木工用角尺检查木板是否平整，水泥工在铺水泥的地面时用一根直尺刮平，这些做法都是检验平面的方法. 人们从日常生活和生产实践中总结出来的这些经验，把它写出来就是：**经过面内任意两点的直线，如果这条直线都在这个面内，那么，这个面是平面.**

我们知道几何里的直线是无限延伸的. 同样，几何里的平面也是无限伸展的. 怎样把平面的形象在纸上画出来呢？我们日常生活中所看到的平面图形，如地板、墙壁、桌面、黑板面等，多数是矩形的，如果我们从适当的角度和距离观察一个矩形时，感到它象平行四边形，因此，通常用一个平行四边形来表示平面. 如果一个平面的一部分被另一平面遮住时，把被遮

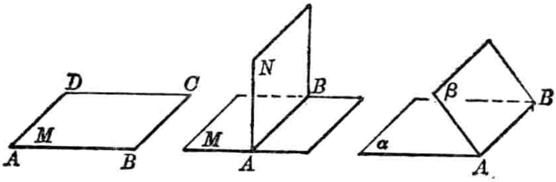


图 3.1

住的线条画成虚线或不画.（图 3.1）

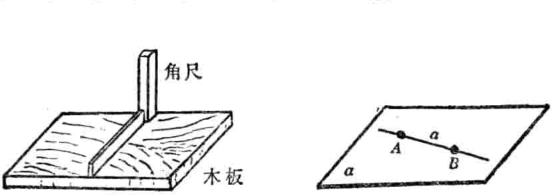
平面的记法，通常在平行四边形某一个顶角的内部用一个大写的字母 M 或用一个小写的希腊字母 α 来表示，读作“平面 M”或“平面 α”．有时也用平行四边形对角的两个字母来表示，读作“平面 AC”或“平面 BD”．

3.2 平面的基本性质

人们在日常生活和生产实践中，通过分析和概括，得到了有关平面的一些基本性质，我们把它当作公理，作为进一步推理的基础．

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

如图 3.2(1) 所示，木工用角尺在刚刨过的木板上任意移动或转动，看角尺的边缘是否处处与木板靠紧，这样来检查木板是不是平面．这就是公理 1 的实际应用．



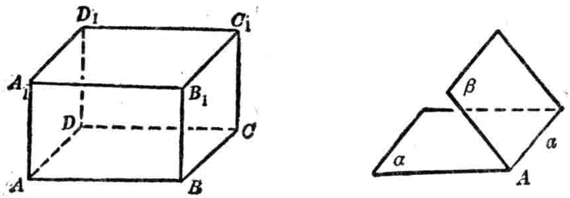
(1)　　(2)

图 3.2

如图 3.2(2) 所示，直线 a 上有两个点 A、B 在平面 α 内，可以记作 A、$B\in a$，A、$B\in\alpha$，这时，我们说直线 a 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 a，可以记作 $a\subset\alpha$.

点 A 在直线 a 外，记作 $A\notin a$；点 A 在平面 α 外，记作 $A\notin\alpha$.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线.



(1)　　(2)

图　3.3

如图 3.3(1)，长方体中面与面的交线是常见的. 例如平面 A_1B 与平面 C_1B 有公共点 B，就有一条交线 BB_1. 如图 3.3(2)，平面 α 与平面 β 有一个公共点 A，它们就有一条过点 A 的交线 a. 这时，我们说平面 α 与平面 β 相交于直线 a，可以记作 $\alpha\cap\beta=a$. 同样，直线 m、n 相交于 B，可记作 $m\cap n=B$.

公理 3　经过不在同一直线上的三点可以作一个平面，并且只能作一个平面.

例如，两只铰链一把锁就能把门板或箱盖固定；平板仪和照相机用三脚架可以放稳，就是公理 3 的实际应用. 通常我们说，“不在同一直线上的三点确定一个平面.” 这里所谓“确定”是指“可以作而且只能作”的意思.

根据公理 3，可以得出下面三条推论（图 3.4）：

推论 1　一条直线和这条直线外的一点，确定一个平面.

推论 2　两条相交的直线，确定一个平面.

推论 3　两条平行的直线，确定一个平面.

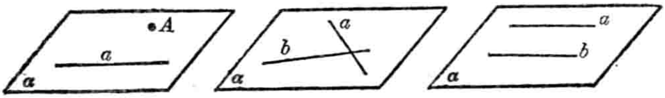


图　3.4

在以后的推理中，我们还要用到下面的公理:

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例如，三棱镜的三条棱或长方体的棱 $AA' \parallel BB'$, $CC' \parallel BB'$, 则 $AA' \parallel CC'$ (图 3.5).

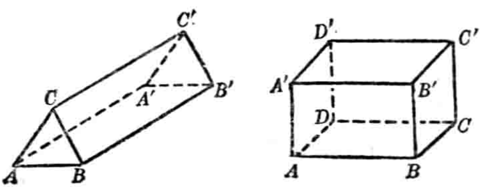


图　3.5

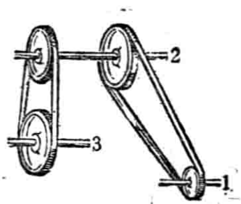


图　3.6

在生产中安装变速的皮带轮时，轮轴必须互相平行，这样，轮子的运转才比较平稳(图 3.6). 当轴 3 和轴 2 平行时，只要轴 1 和轴 3 平行，就能使轴 1 和轴 2 平行.

例 1　一条直线和两条平行直线相交，证明这三条直线在同一个平面内.

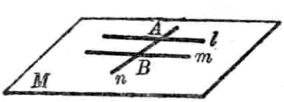


图　3.7

已知: $l \parallel m$; $n \cap l = A$, $n \cap m = B$ (图 3.7).

求证: l、m、$n \subset$ 平面 M.

证明　$\because$　$l \parallel m$,

$\therefore$ l、m 确定一个平面 M(推论 3).

$\because$ 直线 n 上的 A、B 两点在平面 M 内,

$\therefore$ 直线 n 也在平面 M 内(公理 1).

即 l、m、$n \subset$ 平面 M.

例 2 四个顶点不在同一平面内的四边形叫做空间四边形. 如图 3.8 所示, 设空间四边形 $ABCD$ 的各边中点分别为 E、F、G、H, 求证这四个中点在同一平面内.

证明 连结 BD、EH、FG.

$\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore$ $EH \parallel BD$.

同理, $FG \parallel BD$.

$\therefore$ $EH \parallel FG$(公理 4),

EH、FG 在平面 EG 内(推论 3).

$\therefore$ E、F、G、H 在同一平面内.

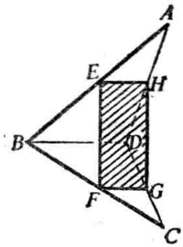


图 3.8

3.3 在平面内表示空间图形

在纸上画空间图形时, 和平面几何不同, 不是画它的真实形状, 而是画它的直观图. 例如, 我们把矩形画成平行四边形. 画水平放置的平面图形的直观图时, 通常应遵守下面几条规则:

(1) 把图形的水平线段画成水平线段, 并且长度不变;

(2) 垂直于水平线段的线段画成与水平线段成 45° (或 135°)的倾斜线段, 并且长度变为原来的一半.

下面举例说明具体画法.

例 1 画水平放置的正方形 $ABCD$ 的直观图.

画法 如图 3.9,

(1) 在平面 M 内画水平线段 A_1B_1, 使 $A_1B_1 = AB$;

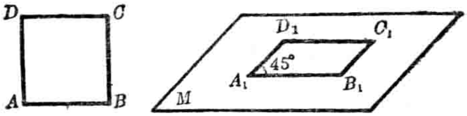


图 3.9

(2) 作 $\angle B_1A_1D_1=45°$，并且取 $A_1D_1=\dfrac{1}{2}AD$；

(3) 作 $D_1C_1 /\!/ A_1B_1$，并且使 $D_1C_1=A_1B_1$；

(4) 连结 B_1C_1，则 $A_1B_1C_1D_1$ 就是所要画的正方形 $ABCD$ 的直观图.

例 2 画水平放置的顶点在同一平面内的任意四边形 $ABCD$ 的直观图.

画法 如图 3.10，

(1) 过四边形的顶点 A 作一条水平的直线 l，分别作 BG、CF 和 DE 都垂直于 l，垂足为 G、F 和 E；

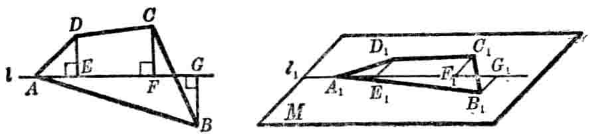


图 3.10

(2) 在平面 M 内，任意作一条水平的直线 l_1. 在 l_1 上任取一点 A_1，并截取 $A_1E_1=AE$、$E_1F_1=EF$、$F_1G_1=FG$；

(3) 作 $\angle D_1E_1G_1=\angle C_1F_1G_1=\angle B_1G_1F_1=45°$，并且取 $B_1G_1=\dfrac{1}{2}BG$，$C_1F_1=\dfrac{1}{2}CF$，$D_1E_1=\dfrac{1}{2}DE$；

(4) 连结 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1，则得到四边形 $ABCD$ 的直观图 $A_1B_1C_1D_1$.

习 题 一

1. 填空:

(1) ______________的三点确定一个平面;

(2) 两条____或____的直线确定一个平面;

(3) 有一个公共点的两个平面相交于通过____点的一条直线.

2. 用符号表示下列关系:

(1) 点 A 在直线 l 上,直线 l 在平面 α 内;

(2) 点 A、B 在直线 l 上,点 A、B 在平面 α 内;

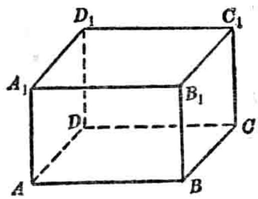
(3) 点 A、B 在直线 l 上,点 C 不在直线 l 上;

(4) 直线 a 和直线 b 相交于平面 α 内一点 M.

3. 经过一条直线能画几个平面? 怎样的两条直线才能确定一个平面?

4. 木工锯板时,为什么要在树干的两侧画两条平行线,沿线锯板才能使板面平整?

5. 如图所示的长方体,分别用两个大写字母表示上下前后左右六个平面.



(第 5 题)

6. 三角形一定是平面图形吗?为什么?

7. 四条线段依次首尾相接,所得的封闭图形一定是平面图形吗? 为什么?

8. 过已知直线外一点,向这条直线上的三定点分别连结三条线段,证明这三条线段在同一平面内.

9. 有一条直线和两条平行线相交,另一条直线也和这两条平行线相交,证明这四条直线在同一个平面内.

10. 两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内.

11. 画出下列图形的直观图:

(1) 底长为 2 cm、高为 4 cm 的等腰三角形;

(2) 长、宽分别为 3 cm、2 cm 的矩形;

(3) 边长为 a 的正六边形.

二　空间两条直线

3.4　两条直线的位置关系

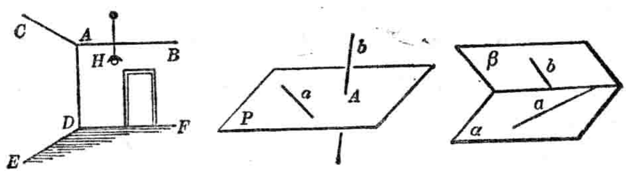
观察空间不重合的两条直线, 它们的位置关系共有三种:

(1) 两条直线相交;

(2) 两条直线平行;

(3) 两条直线既不相交也不平行.

例如, 房间里的一些直线间的位置关系, 就有上述三种.



(1)　　(2)　　(3)

图　3.11

如图 3.11(1) 所示, 两墙面交线 AD 和墙面与地板的交线 DE 相交; 墙面与天花板的交线 AB 和墙面与地板的交线 DF 平行; 而天花板上的 AB 与地板上的 DE 则既不相交也不平行, 这样的两条直线不可能在同一平面内.

不能同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**.

画异面直线时，要把两条直线画在不同的平面内，如图3.11(2)、(3)的画法.

3.5 两条异面直线所成的角

为了研究两条异面直线所成的角，我们先证明下面的等角定理：

等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，那么这两个角相等.

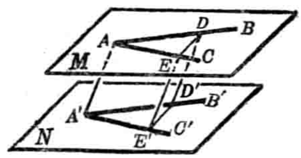


图 3.12

已知：如图3.12，$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

证明 在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$，$AE = A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'.

$\because$ $AB \parallel A'B'$，$AD = A'D'$，

$\therefore$ $AA'D'D$ 是平行四边形，

$AA' \underline{\parallel} DD'$.

同理，$AA' \underline{\parallel} EE'$.

$\therefore$ $DD' \underline{\parallel} EE'$(公理4).

$\therefore$ $EE'D'D$ 是平行四边形，

$ED = E'D'$.

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

$\therefore$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

经过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线，这两条直线相交所成的锐角(直角)叫做**两异面直线所成的角.**

如图3.13中，(1)是两条异面直线 a 和 b，(2)是取空间任一点 O，过点 O 引直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，则 a' 和 b' 相交所成的

锐角就是异面直线 a、b 所成的角. 因为两边对应平行的两个锐角相等, 所以两条异面直线 a 和 b 所成的角的大小是由 a 和 b 的位置来决定的, 和点 O 的位置无关. 点 O 也可以取在 b 上(或 a 上),如图 3.13(3),把点 O 取在 b 上,经过点 O 作 $a' /\!/ a$, 那么, a' 和 b 所成的锐角就是异面直线 a 和 b 所成的角.

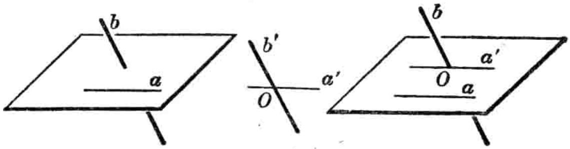


图 3.13

如果两条异面直线所成的角是直角, 则称这**两条异面直线互相垂直**. 图 3.14 是一个正方体, A_1A 和 B_1C_1 是两条互相垂直的异面直线; 房子中间下垂的电线和墙脚线也是互相垂直的[图 3.11(1)].

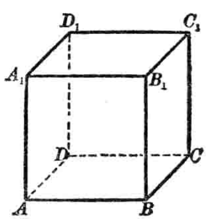


图 3.14

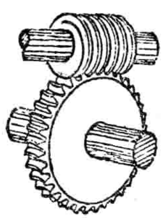


图 3.15

图 3.15 是蜗轮和蜗杆的装置, 它们的轴线是互相垂直的两条异面直线, 它表明由蜗杆到蜗轮的传动方向改变了 $90°$ 的角.

今后我们说两条直线互相垂直, 这两条直线可以是相交直线, 也可以是异面直线.

例 如图 3.16 所示，求正方体侧面上的对角线 AB_1 和 BC_1 所成的角的度数.

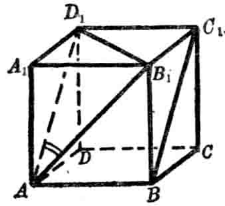


图 3.16

解 如图 3.16 所示，连结 AD_1.

∵ $AB \mathrel{\underline{\parallel}} A_1B_1$，$D_1C_1 \mathrel{\underline{\parallel}} A_1B_1$，

∴ $AB \mathrel{\underline{\parallel}} C_1D_1$，$ABC_1D_1$ 为平行四边形，

$AD_1 \parallel BC_1$.

∴ $\angle B_1AD_1$ 为异面直线 AB_1 和 BC_1 所成的角.

连结 B_1D_1. 在 $\triangle AB_1D_1$ 中，

∵ $AB_1 = B_1D_1 = AD_1$，

∴ $\angle B_1AD_1 = 60°$.

即异面直线 AB_1 和 BC_1 所成角为 60°.

3.6 两条异面直线的距离

和两条异面直线都垂直相交的直线叫做这两条异面直线的**公垂线**.

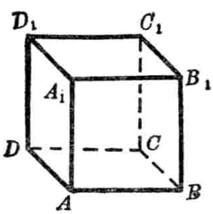
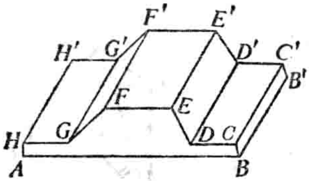


图 3.17

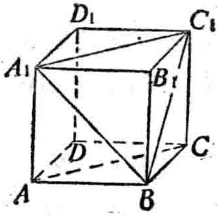
与两条异面直线都相交的公垂线在这两条异面直线间的线段的长叫做**异面直线间的距离**. 也就是说在异面直线公垂线上两垂足间的距离就是异面直线间的距离. 如图 3.17 中，正方体的棱 A_1B_1 和 BC 所在的直线是两条异面直线，B_1B 所在的直线和它们都垂直相交，那么线段 B_1B 的长就是异面直线 A_1B_1 和 BC 的距离.

习 题 二

1. 如图，在一块铸件上找出几对相交直线和异面直线.



（第1题）



（第2题）

2. 如图所示的正方体中，下列每一对直线各是什么位置关系？如果它们不是平行直线，它们所成的角是多少度？

(1) AB 和 CC_1；　(2) A_1A 和 BC_1；　(3) A_1B 和 BC_1；

(4) A_1C_1 和 AC；　(5) AC 和 A_1B.

3. 试证：顺次连结图 3.17 中 A_1A、A_1B_1、D_1B_1、D_1A 这四条线段的中点所组成的四边形是平行四边形.

4. 求证：如果一条直线和两条平行线中的一条垂直(不一定相交)，那么也和另一条垂直(不一定相交)。

三　空间直线和平面

3.7　直线和平面的位置关系

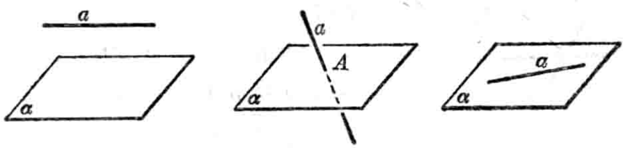
我们观察教室的一部分，如图 3.11(1) 所示，天花板与墙面的交线 AC 或 AB 都与地面不相交；两墙面的交线 AD 与地面相交于一点 D；墙面与地面的交线 DE 或 DF 都在地面内. 由此可以看出一条直线和一个平面的位置关系有下面三种情况：

(1) 直线和平面平行——没有公共点；

(2) 直线和平面相交——只有一个公共点；

(3) 直线在平面内——有无数个公共点.

这三种情况如图 3.18 所示,其中,(1)表示直线 a 与平面 α 平行,记作 $a /\!/ \alpha$; (2)表示直线 a 与平面 α 相交于点 A; (3)表示直线 a 在平面 α 内.



(1) (2) (3)

图 3.18

3.8 直线和平面平行的判定和性质

直线和平面平行的判定定理 **如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行.**

已知：如图 3.19 所示,直线 a 平行平面 P 内的直线 a', a 不在平面 P 内.

求证：$a /\!/$ 平面 P.

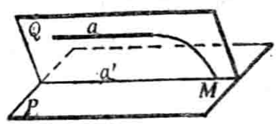


图 3.19

证明 因为 $a /\!/ a'$,所以 a 和 a' 确定一个平面 Q，它与平面 P 的交线就是 a'.

如果直线 a 与平面 P 相交于一点 M，那么 M 是平面 P 内的点，也是直线 a 上的点. 而 a 是平面 Q 内的直线，因此 M 也是平面 Q 内的点.

所以点 M 在平面 P 和平面 Q 的交线 a' 上. 这与已知 $a /\!/ a'$ 矛盾,也就是说,直线 a 与平面 P 不可能有交点.

$\therefore$ $a /\!/$ 平面 P.

根据这个定理,如果要在墙上画一条直线和地面平行,只