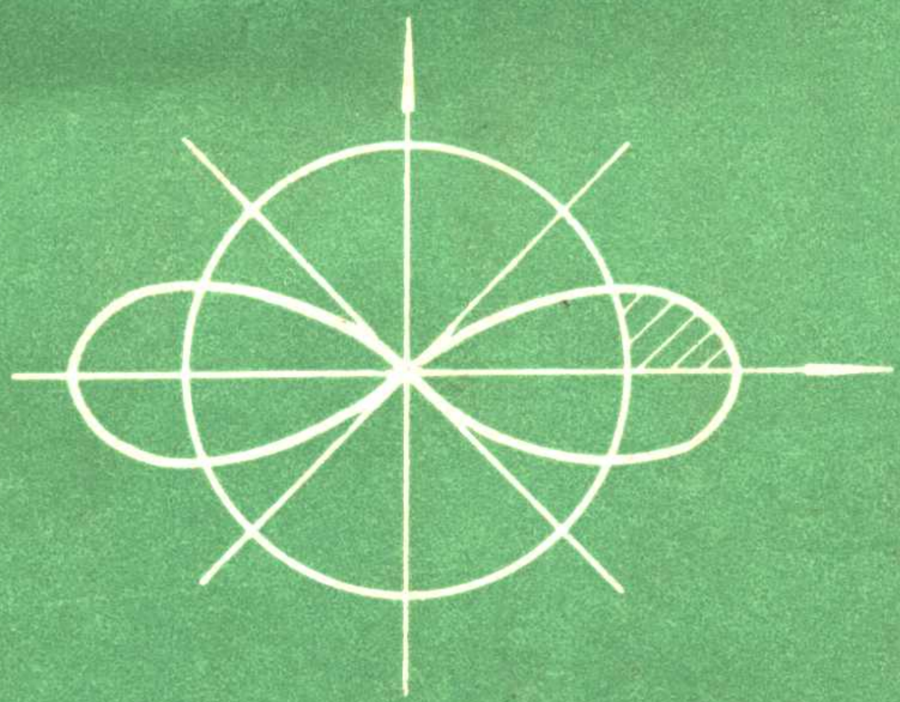
电大参考书

高等数学习题集全解

下册



科学技术文献出版社重庆分社

电大参考书

高等数学习题集全解

下册

谢云荪　况良浩　邱敦元
阎大桂　胡敏德　邓御寇

科学技术文献出版社重庆分社

高等数学习题集全解（下）

科学技术文献出版社重庆分社　出版
重庆市市中区胜利路132号
新华书店重庆发行所　发行
重庆市印制一厂　印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：21.5 字数：47万
1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷
科技新书目：127—233　印数：24000

书号：7176·19　定价：4.30 元

目　　录

第十章 多元函数微分法及其应用

多 元 函 数

10.1 设$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，$y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$，求函数

$Z=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+y)}{\operatorname{arc\,tg}(x-y)}\right]^2$的值。

解 $\because$ $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$，$y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$，

$\therefore$ $x+y=1$，$x-y=\sqrt{3}$.

$$Z\Bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\\ y=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})}}=\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}1}{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}}\right]^2=\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}}\right)^2=\frac{9}{16}。$$

10.2 已知函数$f(u,v)=u^v$，试求$f(xy,x+y)$。

解 $\because$ $f(u,v)=u^v$，

$\therefore$ $f(xy,x+y)=(xy)^{x+y}$.

10.3 已知函数$f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求：$f(x+y,x-y,xy)$。

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{x+y+x-y}$

$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

10.4 试证函数$F(x,y)=\ln x\ln y$满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证 $F(xy,uv)=\ln(xy)\ln(uv)$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$

10.5 试证函数$F(xy)=xy$满足关系式：

$F(ax+by,cu+dv)$

$=acF(x,u)+bcF(y,u)+adF(x,v)+bdF(y,v).$

证 $F(ax+by,\ cu+dv)=(ax+by)(cu+dv)$

$=acxu+bcyu+adxv+bdyv$

$=acF(x,u)+bcF(y,u)+adF(x,v)+bdF(y,v).$

10.6 设 $F(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，证明：

$F(tx,ty)=t^2F(x,y).$

证 $F(tx,xy)=\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-2(tx)(xy)$

$=t^2(\sqrt{x^4+y^4}-2xy)$

$=t^2F(x,y).$

10.7 若函数$Z=f(x,y)$恒满足关系式 $f(tx,ty)=t^Kf(x,y)$就叫K次齐次函数，试证K次齐次函数 $Z=f(x,y)$能化成$Z=x^KF\left(\frac{y}{x}\right).$

证 $f(tx,ty)=t^Kf(x,y)$，即$f(x,y)=\frac{1}{t^K}f(tx,ty)$。

令$t=\frac{1}{x}$，则有 $f(x,y)=x^Kf\left(1,\frac{y}{x}\right).$

设 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)=F\left(\frac{y}{x}\right)$，就有$Z=x^KF\left(\frac{y}{x}\right).$

10.8 设$f(x,y)=x^2-xy+y^2$，试求：$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$及$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$，若x由2变到2.1，y由2变到1.9，求：$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$及$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$之值。

解 $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$

$$=[(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)y+y^2]-(x^2-xy+y^2)$$

$$=(2x-y+\Delta x)\Delta x,$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=[x^2-x(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2]$$

$$-(x^2-xy+y^2)=(2y-x+\Delta y)\Delta y.$$

当$x=2$，$\Delta x=0.1$，$y=2$，$\Delta y=-0.1$时，

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\Big|_{\substack{x=y=2\\ \Delta x=0.1}}=(2x-y+\Delta x)\Delta x\Big|_{\substack{x=y=2\\ \Delta x=0.1}}=0.21;$$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\Big|_{\substack{x=y=2\\ \Delta y=-0.1}}$$

$$=(2y-x+\Delta y)\Delta y\Big|_{\substack{x=y=2\\ \Delta y=-0.1}}=-0.19.$$

求10.9—10.21题各函数的定义域，并画出其图形：

10.9 $Z=x+y$。

解 定义域为$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，其图形为全平面。

10.10 $$Z=\frac{4}{x+y}.$$

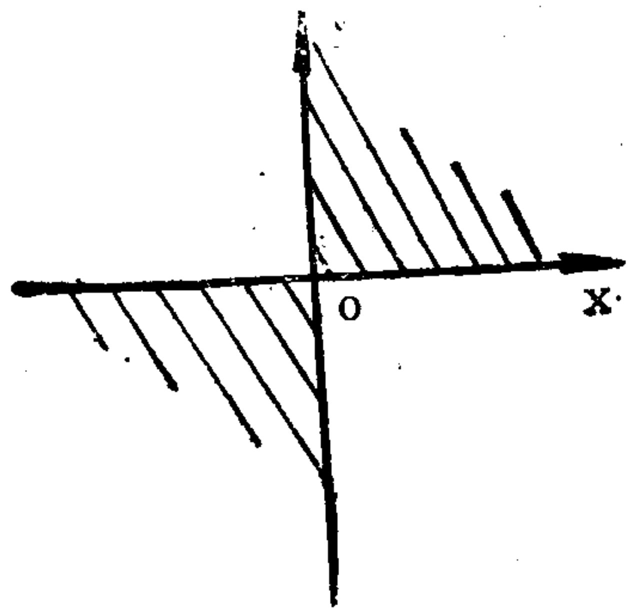
解 定义域为$x+y\neq 0$，或$x\neq -y$，即为去掉直线$y=-x$的xoy面。

10.11 $$Z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

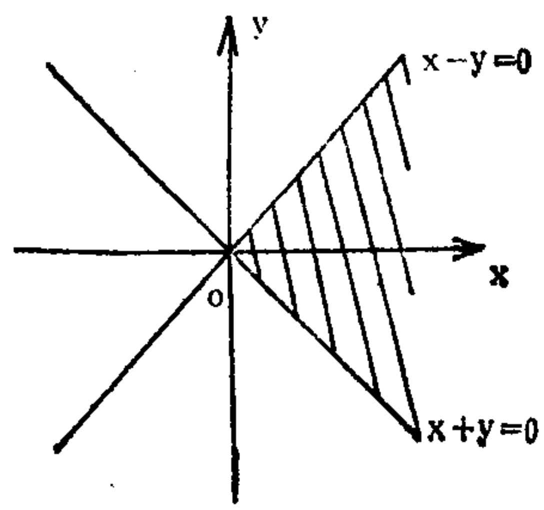
解 $-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty$，全平面。

10.12 $Z=\ln xy$。

解 $xy>0$，定义域为$x>0$，$y>0$（第一象限）；或 $x<0$，$y<0$（第三象限）。



第10.12题



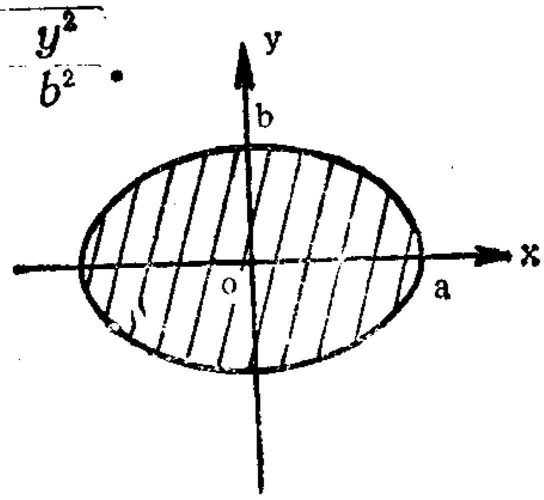
第10.13题

10.13 $$Z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}.$$

解 定义域$x+y>0$且$x-y>0$。

10.14 $$Z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

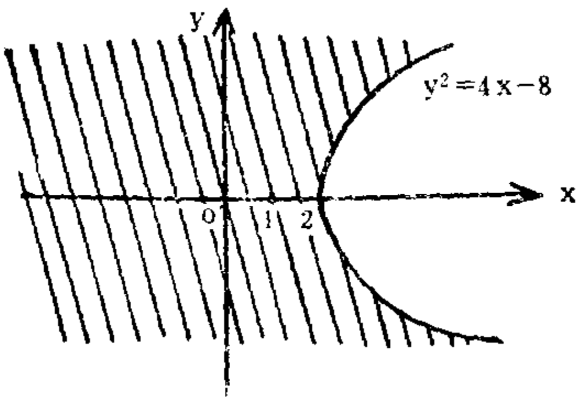
解 定义域为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，即由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内部与边界所组成的闭区域。



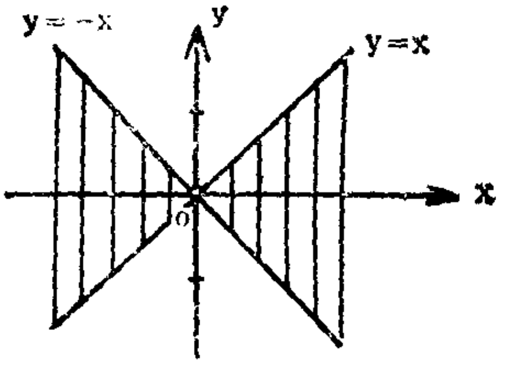
第10.14题

10.15　$Z=\ln(y^2-4x+8)$.

解　定义域为 $y^2-4x+8>0$，即 $y^2>4x-8$（图中阴影部份）.



第10.15题



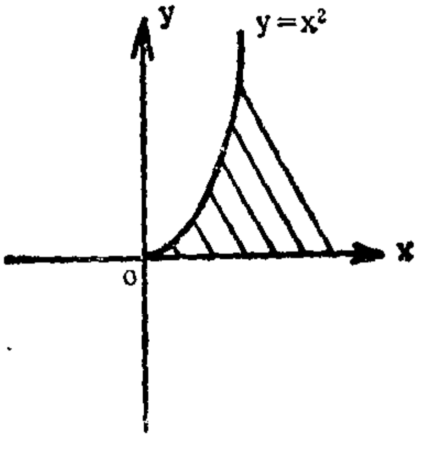
第10.16题

10.16　$Z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

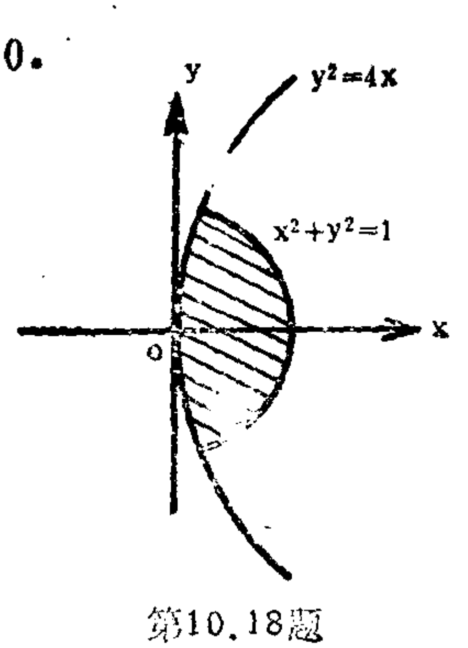
解　定义域为$x\neq0$及$\left|\dfrac{y}{x}\right|<1$，即$|y|\leqslant|x|$而点$(0,0)$除外.

10.17　$Z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

解　定义域为$x\geqslant\sqrt{y}$且$y\geqslant0$.



第10.17题



第10.18题

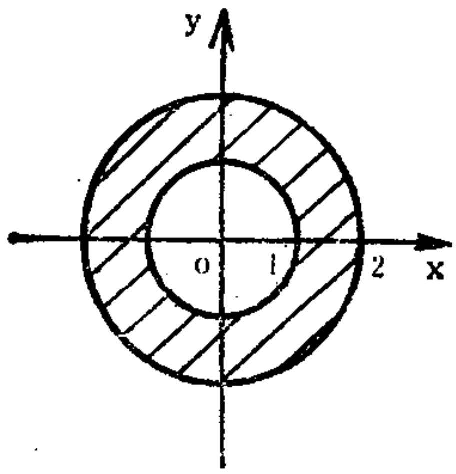
10.18　$$Z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}.$$

解　定义域为$4x\geqslant y^2$，$x^2+y^2<1$且$x^2+y^2\neq 0$。

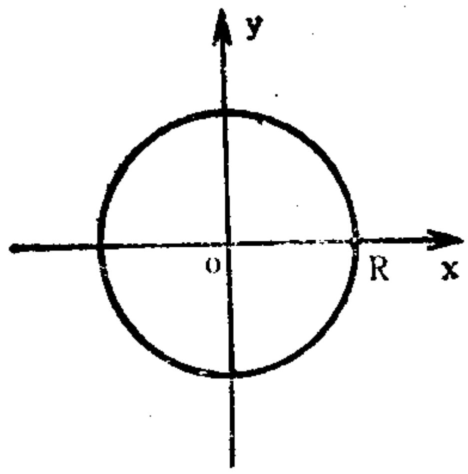
10.19　$Z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\operatorname{arc\,sec}(x^2+y^2)$.

解　定义域为$\dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant 1$，$x^2+y^2\geqslant 1$，

即　$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$（圆环）.



第10.19题



第10.20题

10.20　$Z=xy+\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

解　定义域为$\dfrac{R^2}{x^2+y^2}\geqslant 1$且$x^2+y^2\neq 0$及$x^2+y^2-R^2\geqslant 0$,

由此得

$$R^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2,$$

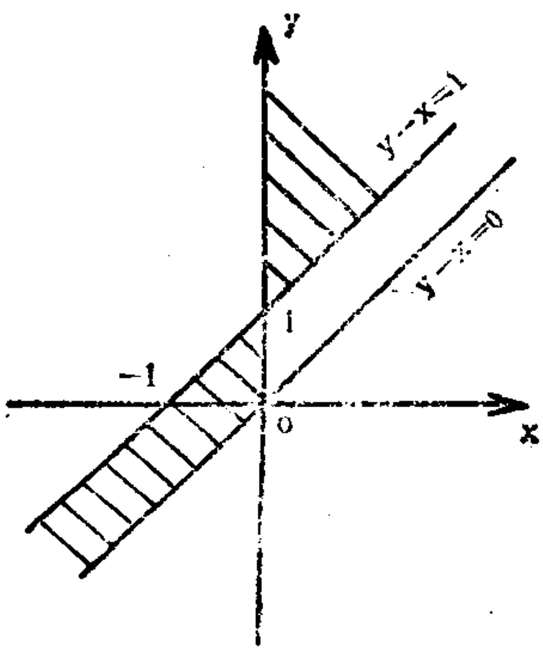
图形为圆周 $x^2+y^2=R^2$。

10.21　$Z=\ln[x\ln(y-x)]$.

解　$\because$ $x\ln(y-x)>0$,

即 $\begin{cases}x>0\\ y-x>1\end{cases}$

或 $\begin{cases}x<0\\ 0<y-x<1,\end{cases}$



第10.21题

故定义域为$\begin{cases}x>0\\ y-x>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ 0<y-x<1。\end{cases}$

10.22 求下列函数的定义域：

（1） $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$

（2） $z=\sqrt{x\sin y}$

（3） $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$

（4） $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

（R、r均为正实数）

解 （1）定义域为$x>0$，$y>0$，$z>0$。

（2） $\because$ $x\sin y\geqslant 0$，

故定义域为$x\geqslant 0$且$2k\pi\leqslant y\leqslant(2k+1)\pi$，

或$x\leqslant 0$且$(2k+1)\pi\leqslant y\leqslant(2k+2)\pi$

$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

（3） $\because$ $\pi(x+y)\neq k\pi$，

故定义域为$x+y\neq k$，$k=0$，±1，$\pm2,\cdots$。

（4） $\because$ $R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$且$x^2+y^2+z^2-r^2>0$，

故定义域为：当$r<R$时，$r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$；

当$R\leqslant r$时无解。

求10.23—10.30各题的极限：

10.23 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解 $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y\sin(xy)}{xy}$$

$$=\lim_{y\to0}y\cdot\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{xy}=0.$$

10.24 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2\dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}.$$

因 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}=1,$$

而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$,

因此原极限不存在。

10.25 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

10.26 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\because\ 2|xy|\leqslant x^2+y^2$，$\therefore \dfrac{2|xy|}{x^2+y^2}\leqslant 1$，

即
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\longrightarrow 0\quad\left(\text{当}\begin{smallmatrix}x\to 0\\ y\to 0\end{smallmatrix}\right),$$

故
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

10.27 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

解 当$x>N$，$y>N$时，$e^x>x^2$，$e^y>y^2$，

$$0<\frac{x^2+y^2}{e^{x+y}}<\frac{e^x+e^y}{e^xe^y}=\frac{1}{e^y}+\frac{1}{e^x}\to 0\left(\begin{matrix}\text{当 }x\to+\infty\\ y\to+\infty\text{时}\end{matrix}\right),$$

因此
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0.$$

10.28 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\because\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=e$,

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^y=e^0=1.$$

10.29 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 当$x>0$，$y>0$时，$x^2+y^2\geqslant 2xy>0$，则有$0<\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$\leqslant\dfrac{1}{2}$，$0<\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$，

因此
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

10.30 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2.$

10.31 证明：当$x\to 0$，$y\to 0$时，函数$u=\dfrac{y}{x-y}$的极限不存在。(x,y)以怎样的方式趋于$(0,0)$时，能使$\lim u=3$，$\lim u=2$，$\lim u=-2$。

证 设$y=kx$。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{kx}{x(1-k)}=\frac{k}{1-k},$$

其值随k值而变化，故极限不存在。

当(x,y)沿着直线$y=\dfrac{3}{4}x$趋于$(0,0)$时，$\lim u=3$，当(x,y)沿着直线$y=\dfrac{2}{3}x$趋于$(0,0)$时，$\lim u=2$，当(x,y)沿着直线$y=2x$趋于$(0,0)$时，$\lim u=-2$.

10.32 下列函数当$(x,y)\to(0,0)$时，极限是否存在？

（1）$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

（2）$f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^4}$

解 （1）如果取路线$y=0$，$x\to 0$，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$；

如果取路线$y=x$，$x\to 0$，

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1.$$

由于取两条不同路线趋于(0,0)时，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)$ 不相等，因此极限不存在.

（2） 设(x,y)沿抛物线$x^2=ky$趋于(0,0).

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{ky^2}{k^2y^2+y^4}=\frac{1}{k},$$

其值随着k变化，因此极限不存在.

10.33 下列函数在何处间断：

（1） $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$

（2） $z=\ln|x-y|$

解 (1) $y^2-2x=0$，即抛物线$y^2=2x$上的点为函数的间断点.

（2） $x-y=0$，即直线$y=x$上的点为函数的间断点.

10.34 证明函数$z=x^2+y^2$在全平面连续。

证 设(x_0,y_0)为xoy平面内任意一点，点$(x,y)\to(x_0,y_0)$，记$x=x_0+\Delta x$，$y=y_0+\Delta y$，$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$。

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\&=|(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2-(x^2+y^2)|\\&=|(2x_0+\Delta x)\Delta x+(2y_0+\Delta y)\Delta y|\\&\leqslant|2x_0+\Delta x||\Delta x|+|2y_0+\Delta y||\Delta y|\to 0,\end{aligned}$$

因此，$z=x^2+y^2$在全平面连续。

10.35 设$f(x,y)$在区域D内一点$P(a,b)$是连续的，且$f(a,b)>0$，证明：存在点P的一个邻域，使$f(x,y)>0$.

证 因为$f(x,y)$在P连续，对任给$\varepsilon>0$，存在点P的一个邻域，使得在该邻域内

$$|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon,$$

即 $f(a,b)-\varepsilon<f(x,y)<f(a,b)+\varepsilon.$

因为$f(a,b)>0$，只要取$\varepsilon<f(a,b)$，就有$f(x,y)>0$，因此，存在点P的一个邻域，使$f(x,y)>0$.

一 阶 偏 导 数

10.36 证明：若$f(x,y)$的偏导数存在，则有：$f'_x(x,b)=\frac{d}{dx}f(x,b)$.

证 由定义，

$$f'_x(x,b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=\frac{d}{dx}f(x,b).$$

10.37 设$f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$，求$f'_x(3,4)$.

解 $f'_x(x,y)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$f'_x(3,4)=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}.$$

10.38 设$z=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$，求$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{2x}}{x+\frac{y}{2x}},$$