

力学丛书

# 计算流体力学

——偏微分方程的数值解法

程心一 著



科学出版社

51.632

力学丛书

# 计算流体力学

——偏微分方程的数值解法

程心一 著

科学出版社

1984

## 内 容 简 介

本书主要介绍流体力学中的各种偏微分方程和不同的初边值条件的有限差分计算方法。同时综述了自六十年代后期发展起来的计算流体力学中有限差分方法的理论基础,与各种格式的特点。

本书可供计算力学和计算数学工作者及大专院校相应专业师生阅读。

力 学 丛 书

计算流体力学

——偏微分方程的数值解法

程 心 一 著

责任编辑 陈大宁 谈德颜

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1984年10月第一版 开本: 850×1168 1/32  
1984年10月第一次印刷 印张: 6 7/8  
印数: 精 1—4,600 插页: 精 2  
平 1—6,600 字数: 180,000

统一书号: 13031·2692

本社书号: 3702·13—2

定价: 布脊精装 2.00 元  
平 装 1.30 元

# 前 言

自然界的许多现象常常可以用偏微分方程来描述。在科技工作中往往需要求解这些方程,但是除了某些特殊简单的例子外,一般情况下,问题的求解是非常困难的。因而,利用种种不同的特殊物理条件来简化这些方程,将偏微分方程转变成常微分或积分方程,希望以分析方法获得解的积分形式或代数形式,以便进行数值计算。本书所论述的是用离散方法将偏微分方程直接转换成高维数的代数方程组,用数值计算方法来求得原问题的近似解,以满足许多工程技术问题的实际需要。本书的内容偏重于介绍各种计算方法在流体力学中的应用,这是因为在流体力学中的种种偏微分方程是较富有代表性,并且是在其它物理问题中通常容易遇到的。所谓计算流体力学,就是研究利用现代的计算方法和工具,近似解决一般流体力学问题的一门独立的分支。

随着高速电子计算机的发展,计算方法很快地成为解决自然科学中的理论问题和工程技术中的实际问题的重要工具。二、三十年前计算方法在发展原子能与导弹的研究工作上已发挥了很大的作用,近十余年来计算方法才被广泛应用到其它科技工作中去。在这普及化的过程中,一些与运用计算方法有关的理论、原则及应注意的特征往往被忽视了。因而导致种种错误的计算结果,这些错误所造成的不幸后果是应设法避免的。本书的重点就在于说明数学物理的基本原则在计算方法中的重要性,研究各种计算方法在不同情况下的利弊,以获得对计算结果的正确的判断和分析。这样一方面可减少或避免错误,使得计算结果尽可能符合各个物理问题的原有的要求和条件;另一方面可以指出有关计算方法的研究工作今后应取的方向,以此来加强研究的理论基础与增进方法的精度和运算效益。

计算方法在数学理论上的严谨正确,当然是大家所企求的,但是在目前我们只能对线性的离散问题作比较完整而严谨的数学处理,有关非线性问题的数学理论,无论从纯数学或应用数学的观点来看都很不完善.然而科技工作中要求解的问题很多是非线性的,要想求解这些非线性问题,在目前还只有从计算方法着手.因此,我们不得不避开一些数学理论上的严谨,而试用计算方法来获得一些有用的近似解答并研究其困难之所在.探索各种能减轻或解决这些困难的办法,这就是当前有关计算方法的重要研究内容与方向.我们运用数学上没有足够根据的办法来求复杂的非线性方程的数值解,不是不顾一切原则盲目从事计算,相反地我们要求尽可能利用已知的数理原则指导我们去得到有意义的近似结果.

本书是一本有具体目的的专题讨论著作,而不是一般的教科书.因此,它省略了关于许多离散方法的初步介绍;对有些定理的具体证明、公式的推导、计算方法的示范与计算结果的描述等等都从简略去.从整体着想,提纲择要地为在计算方面已有相当经验与体会的科技工作者作一系统的讨论并给出一些建议.读者若需要更具体的材料,请参考其它有关计算方法的教科书籍与原始文献.

一九七九年七月,作者应联合国教科文组织的邀请,来中国大连工学院讲流体力学的计算方法.讲学内容经大连工学院吕玉麟、李鑑初、张洪庆、赖国璋、唐焕文、周树信和夏尊铨七位教师的整理,并在附录中补充了许多公式的证明,汇集成书,以供国内学术界及科技工作人士参考.

因为学术是在不断地进展,目前的困难可能逐渐被克服,所以书中的结论与启示很可能在不久的将来就需加以修正.尚祈各位学者不吝赐教,只希望此书对祖国的科技发展能有所裨益,对各位科技工作者能有所启示.

本书的出版曾得到大连工学院院长钱令希教授的热情关心和大力支持,作者在此表示感谢.同时也向促成此书问世的各位致谢.

程心一

一九八一年七月于美国普林斯顿大学

# 目 录

<b>第一章 离散近似法的实质</b> .....	1
§ 1-1 有限差分法与有限单元法的比较 .....	1
§ 1-2 有限单元法的理论基础 .....	4
§ 1-3 有限差分法的理论基础 .....	6
§ 1-4 适定性 .....	9
<b>第二章 代数方程组</b> .....	11
§ 2-1 线性代数方程组 .....	11
§ 2-2 迭代法 .....	13
§ 2-3 加速方法 .....	15
§ 2-4 非线性代数方程组 $F(x) = 0$ 的解法原理 .....	19
§ 2-5 非线性方程解法举例 .....	23
§ 2-6 非线性方程组的 Picard 迭代法 .....	27
<b>第三章 椭圆型方程</b> .....	31
§ 3-1 有限差分处理 .....	31
§ 3-2 差分方程组的迭代解法 .....	36
§ 3-3 实际应用中的问题及讨论 .....	40
<b>第四章 双曲型方程</b> .....	43
§ 4-1 适定问题 .....	43
§ 4-2 差分问题的适定性 .....	45
§ 4-3 差分格式举例 .....	48
§ 4-4 一阶线性双曲型方程组 .....	53
<b>第五章 抛物型方程</b> .....	58
§ 5-1 适定问题 .....	58
§ 5-2 差分问题的适定性 .....	59
§ 5-3 稳定性分析 .....	62
§ 5-4 初值边值问题 .....	64
<b>第六章 一般理论</b> .....	69
§ 6-1 导言 .....	69

§ 6-2	差分问题的协调性 .....	70
§ 6-3	差分算子与差分问题的收敛性 .....	72
§ 6-4	稳定性 .....	75
§ 6-5	Lax 等价定理 .....	78
<b>第七章</b>	<b>von Neumann 稳定性分析</b> .....	<b>82</b>
§ 7-1	$L_2$ 范数意义下的有界性 .....	82
§ 7-2	两种定义的等价性 .....	84
§ 7-3	局部线性稳定分析 .....	89
§ 7-4	将局部线性稳定分析用于 Navier-Stokes 方程 .....	93
§ 7-5	边界处理 .....	96
<b>第八章</b>	<b>变系数及非线性方程</b> .....	<b>99</b>
§ 8-1	引言 .....	99
§ 8-2	能量分析——一些实例 .....	102
§ 8-3	对能量法运用的讨论 .....	113
<b>第九章</b>	<b>隐式与其它差分格式</b> .....	<b>119</b>
§ 9-1	与时间有关的问题 .....	119
§ 9-2	定常问题——渐近迭代法 .....	121
§ 9-3	分部时间法 .....	124
§ 9-4	混合型方程的差分格式举例 .....	131
<b>第十章</b>	<b>守恒型差分式与事后误差估计</b> .....	<b>135</b>
§ 10-1	守恒型差分公式 .....	136
§ 10-2	事后误差计算 .....	143
<b>第十一章</b>	<b>水动力学问题</b> .....	<b>149</b>
§ 11-1	流函数——旋度方程解法 .....	149
§ 11-2	一般解法及其讨论 .....	156
<b>第十二章</b>	<b>粗网格计算及一种新的差分式(程心一-Allen 格式)</b> .....	<b>164</b>
§ 12-1	关于渐近解与近似解 .....	164
§ 12-2	粗细网格对误差的影响(误差曲线分析) .....	168
§ 12-3	程心一-Allen改进式——一种适用于大网格计算的新格式 .....	175
附录	.....	189
一般参考书籍	.....	212
各章特殊参考文献	.....	213

## 第一章 离散近似法的实质

许多描述实际问题的数学模型往往归结为求解一些很复杂的非线性偏微分方程，一般情况下，用经典的分析法处理是很困难的。五十年代起，应用数学家们利用 Prandtl 边界层理论，以奇异摄动法处理偏微分方程的边值问题，将偏微分方程转化成一组常微分方程，利用计算机进行解算。这是一种近似的计算方法，若能大致预知问题的结果，就能断定这个解答是否正确合理。但从原理上很难严格地论证它的正确性。只要常微分方程问题是适定的，它的求解并不困难，有困难的是解偏微分方程问题。下面将介绍如何把偏微分方程直接转化成代数方程组，然后对其求解，略去转化为常微分方程的步骤。

这属于一种离散近似的计算方法，所要寻求的不是域内的连续函数，而是域内各节点上函数的近似值。

设偏微分方程为  $L\left[\bar{x}, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\right)^{n^*}\right]u = 0$ ，其中  $\bar{x}$  是点的坐标矢

量，可以包含时间因素在内。L 是算子， $u$  是未知量，它可以是标量，也可以是矢量， $n^*$  是偏导数的阶数。

一般偏微分方程的数值解法有两种，即有限差分法和有限单元法，在某种意义上讲，有限单元法是差分法的一种特殊形式。有限单元法往往更适用于某一些特殊问题，而差分法可能应用得更广泛一些，但这并非说差分法优越于有限单元法，只是说对某一些问题可能用有限单元法合适，而对另一些问题则可能用差分法好。这里提到的有限单元法是广义的，包括配置法等在内。

### §1-1 有限差分法与有限单元法的比较

有限差分法与有限单元法这两者的区别有四点（第四点只是



方法上的不同,不是主要差别)。

### 1. 点近似

差分法是点近似,它只考虑在有限个离散点上的函数值,而不去考虑在点的邻域函数值如何变化。有限单元法考虑的则是分段

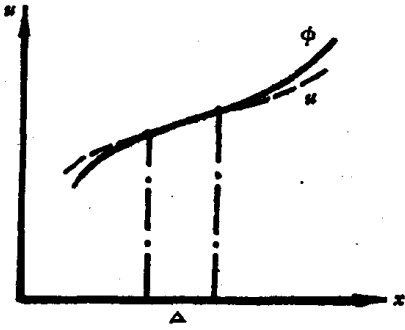


图 1-1

(块)的近似,如图 1-1 所示,它考虑的是点组的近似。在这个点组内用一个样条函数  $\varphi$  来代替微分方程的解  $u$ 。在点上样条函数的值和解的函数值是一致的。而在点与点之间两者虽有差别,但不太大。因此有限单元法可以进行微分,而差分法在点的邻域上函数值是不确定

的,因此微分系数无法确定。有限单元法一旦选定了样条函数,其连续性是确定的,而有限差分法解的连续性是未定的,这是差分法的主要困难。由于差分法是点近似,故对微分系数应从泛函的概念来理解,而不能只从普通的微分概念来理解。

### 2. 收敛性

对于有限差分法,其“收敛”的定义如下:

设  $U$  是用差分法解出的一个点的函数值(函数值可能是多维的,这里只讨论一维问题),当步长  $\Delta$  趋近于零时,若在解的定义域内每一点上,有

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} U = u \quad (1-1)$$

我们则称解是收敛的。式中  $u$  为微分方程在各个点上的准确解。

当  $\Delta$  取得很小,即  $\Delta$  趋近于零时,点数可以无限增加,但点数的增加并不一定就能形成连续的函数,因为这里只考虑每一点上的函数值,收敛的意义就在域内任一点处的差分解  $U$  是否趋近于偏微分方程在该点的准确解  $u$ ,即是否  $U$  趋近于  $u$ 。

对于有限单元法,收敛的概念和差分法不同,在用有限单元法解偏微分方程时,可将偏微分方程等号两边都乘上一个函数

$F(\varphi_i)$  (这时等号右边将仍为零), 其中  $\varphi_i$  是每一段的样条,  $F(\varphi_i)$  是样条  $\varphi_i$  的函数, 有时只乘  $\varphi_i$ , 但原则上可以乘  $F(\varphi_i)$ , 将  $F(\varphi_i)$  乘以  $LU$  以后, 在全域  $D$  内进行积分 当  $\Delta$  趋近于零时, 有

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_D F(\varphi_i) LU dD = 0 \quad (1-2)$$

当  $\Delta$  不为零时, 由于上式中  $U$  并非真正解  $u$ , 因而积分值不为零而总会有误差, 收敛的意义要看当  $\Delta$  趋近于零时误差是否趋近于零. 所以, 有限单元法的收敛是根据积分的收敛来定义的, 而不是根据点定义的.

### 3. 光滑性

当用差分方程代替微分方程时, 或者说当用差商代替微商时, 往往假定函数有足够的光滑性. 这样, 微分系数就可以用差商来代替. 当函数用截断的泰勒级数展开时, 利用不同阶的中值定理便可得到不同准确度的差分格式.

而有限单元法因为利用了样条函数, 在分段(块)内函数值已经光滑, 但是在样条函数的连接处要求函数是连续的, 甚至可能要求微分系数是连续的, 即满足所谓相容性条件. 有限元法得到的是一个光滑的解. 一般讲来, 差分法并不能保证解的光滑性, 但不能因此说解是不好的.

4. 在差分法中用差商代替微分系数 (这时  $u$  变成了  $U$ ) 且得到了代数方程组. 引入边界条件后, 便可求解未知量. 这里未知量不是单一个点的函数值, 而是域内许多点的函数值. 在差分法中, 由于差分的格式不同(离散方法的不同), 对应于一个偏微分方程, 其代数方程组不是唯一的.

在有限元法中, 当解的定义域  $D$  固定, 样条函数  $\varphi_i$  已选定, 也还可以有不同的  $F(\varphi_i)$ , 因而也得到了不同的代数方程组. 在有些情形下用差分法与有限单元法将同一偏微分方程离散成代数方程组时, 可以得到同一代数方程组. 但在一般情形下从不同的离散方法所得的代数方程组是不同的. 这许多不同的代数方程组的解都是微分方程的解的近似.

## § 1-2 有限单元法的理论基础

假定  $U$  是有限单元法的近似解, 并且可以展成级数

$$U = \sum_i \alpha_i \varphi_i \quad (1-3)$$

式中  $\varphi_i$  是选定的样条函数,  $\alpha_i$  为待定的系数,  $\varphi_i$  为一完备集合, 并且希望它是正交的. 当  $\varphi_i$  是正交时, 问题要简单得多(当然也可以用不正交的样条函数). 为了简单起见 在 (1-2) 式中取  $\varphi_i$  代替  $F(\varphi_i)$ , 于是可写出

$$\int_D \varphi_j L(\sum \alpha_i \varphi_i) dD = 0 \quad (1-4)$$

当用分部积分时, 如  $\varphi_i$  是正交的, 则其内积

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j \cdot \varphi_i \rangle &= 0 & j \neq i \\ \langle \varphi_j \cdot \varphi_i \rangle &\neq 0 & j = i \end{aligned} \quad (1-5)$$

(在建立代数方程组时, 还应包括相容性条件和边界条件), 这样就组成了有限单元法的代数方程组.

现在要问,  $U$  在什么情况下可以作为原来微分问题的准确解  $u$  的近似呢?

假定  $L$  是线性算子, 这样, 上述积分 (1-4) 就是能量积分, 这里指的是数学意义上的“能量”. 如果样条函数选得适当, 这个积分可以相当于结构中的位能.

如果  $U$  为微分方程的解, 那么应有

(1) 对所有的  $j$  存在关系式

$$\int_D \varphi_j L \left( \sum_i \alpha_i \varphi_i \right) dD = 0$$

(2) 边界条件一定是自然边界条件. 所谓自然边界条件是指分部积分之后, 边界积分为零的条件, 我们应当充分利用自然边界条件. 显然, 自然边界条件是  $F(\varphi_i)$  的函数. 总可以选用一定的  $F(\varphi_i)$  来形成自然边界条件, 但是工程上一般选用的是  $\varphi_i$  而不是  $F(\varphi_i)$ . 这样, 就无法充分利用自然边界条件.

由于  $U$  不是微分方程的准确解而只是近似解, 所以上述对  $D$

区域的积分不一定为零,我们希望这一积分虽不为零但是应为极小,从这一观点出发,这一积分式就应是微分方程  $Lu = 0$  与边界条件  $Bu = 0$  的变分式(用有限单元法计算时,往往有许多积分式,其数目不一定受限于  $\varphi_i$ ,有时要少些,因为引入了许多相容条件和边界条件,减少了积分式的数目)。如果积分式就是变分式,那么微分方程可以有許多不同的变分形式,相应会有许多的所谓不变量(至于原微分方程所代表的物理问题有没有这些不变量,是不是这些不变量,这些都并不肯定)。在变分式情况下,微分方程是变分式的欧拉分程。而原微分方程的算子  $L$  是自共轭的,同时,相应的变分式是正定的。所以,采用有限单元法首先应找到其最有利的变分式,而且检验这些算子和变分式是否是自共轭的、正定的。但是,要回答这些问题是很困难的。工程上常常就不去管这些问题而直接应用,这样做有利也有弊,利是不必过多顾及数学上的困难。但由此也使有限单元法在应用上还存在一些具体困难,这些困难是:

(1) 上述理想条件往往不能满足,变分式往往是“退化”的,原则上讲“退化”的变分式有时没有解,有时解不是唯一的。

(2) 虽然非自然边界条件总可以用 Lagrange 乘子强加到变分上去作为补充条件,但这样处理,变分问题很可能会成为不适定的(多解或无解),得到的解答很可能与我们需要的物理问题的解答不相干。

(3)  $F(\varphi_i)$  选择得不同就有不同的变分式,而有些变分式往往不符合物理上的守恒原则,有时甚至与之相违背,这样就失去了物理上的意义。在流体力学中有时变分原理并不知道,在高速情况下一般不存在。所以在流体力学中尤其是高速情况下用有限元法是有一定困难的。

(4) 一般地讲,所选的  $\varphi_i$  不是完备的系列而是从计算或处理问题方便的角度来选取的片段连续函数,而且往往是一维的,是  $\varphi_i(x_i)$  而不是  $\varphi_i(\vec{x}_i, t)$ ,对多维的或随时间变化的问题  $\varphi_i$  很难选择,  $\varphi_i(x_1)$  与  $\varphi_i(x_2)$  之间有没有相互结合的关系呢?所以对这一

类问题,有限单元解法的不可靠性是相当严重的。

(5) 对波动方程,尤其是非线性的问题,初值可能是光滑的,但解却不一定是光滑的,有些情况下应该是不光滑的,例如在波前附近的解,上述的有限元法难于处理这类不光滑解的问题。在形式上讲,似乎在有限单元法的样条中加入了激波元素或其它不连续函数,就不难于表达不光滑的解。但这种解甚难适合此类不连续函数所代表的物理现象。在波前某几种物理量是不连续的,其间断是由固定的不变量来决定的。这种变量与不变量,随不同的物理问题而异。波前的位置不是预知的,而是由固定的不变量根据所要求的解来决定的。这种波前在计算解中的位置及其传播的速度是随不同物理问题的解而不同的。这许多附加条件,要适当地加入有限单元法的计算解中,是有具体困难的。所以对这一类问题,有限单元法往往不甚适用。

有限单元法的优点是:

(1) 由于允许网格划分的不规则性使用起来比较方便,尤其对于处理不规则边界或域中局部点函数值变化显著的问题更是如此。

(2) 特别是椭圆型方程(有时也包括扩散方程)的解都趋于光滑,即使边界值稍有误差,所解得的中间段函数值也是光滑的,对于许多实际无显著波动性的问题,有限单元法往往是非常方便和有效的,但仍需注意守恒原则与边界条件的处理。

### § 1-3 有限差分法的理论基础

差分法近似解的理论基础需要从“泛函分析”着手。因为用差分法计算的结果往往不能保证“光滑”性或“连续”性,其近似的程度需从误差范数  $\|U - u\|$  来确定。

所谓范数是“距离”的概念在  $n$  维线性空间中的推广。原点是零值矢量。在二维或者三维空间中,任一点到原点的距离,就可看作矢量的长度或大小。在  $n$  维线性空间中,我们引用范数这一概念做为矢量长度或矢量之间的“距离”的度量。范数必须满足下列

关系:

$$(1) \|x\| \geq 0 \quad x \in D$$

$$\|x\| = 0 \quad \text{当且仅当 } x = 0$$

$$(2) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in R \text{ (实数集合)}, \forall x \in D$$

$$(3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in D. \quad \text{此即三角不等式.}$$

满足上述关系的  $\bar{n}$  维向量  $x$  的范数可以有许多不同的形式.

例如:

$$(1) \|x\|_1 = N_1(x) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} |x_j| \quad \text{或称 } L_1 \text{ 范数.}$$

$$(2) \|x\|_2 = N_2(x) = \left[ \sum_{j=1}^{\bar{n}} |x_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{或称 } L_2 \text{ 范数, 也叫做 } \bar{n} \text{ 维}$$

空间中的欧几里德范数, 或距离.

$$(3) \|x\|_p = N_p(x) = \left[ \sum_{j=1}^{\bar{n}} |x_j|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{或称 } L_p \text{ 范数.}$$

$$(4) \|x\|_\infty = N_\infty(x) = \max |x_j| \quad \text{或称 } L_\infty \text{ 范数.}$$

$\bar{n}$  阶方阵作为  $\bar{n}^2$  维线性空间的元素 (或称向量), 它的范数还需具备另一个条件, 即

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \quad \text{式中 } A, B \text{ 是同阶的方阵.}$$

一个矩阵的范数可由下式定义:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \|Ax\| / \|x\|$$

这样定义的范数称为“自然范数”, 其中  $\sup$  表示上确界, 它满足了上述四个要求.

由上述矩阵范数的定义可见, 矩阵的范数是与向量的范数密切相关的.

若  $A$  为  $\bar{n}$  阶方阵, 则其相当于最大范数的“自然矩阵范数”是

$$\|A\|_\infty = \max \sum_{k=1}^{\bar{n}} |a_{ik}|$$

即将矩阵元素的绝对值按行相加, 而其中的最大值即矩阵的范数.

相当于  $L_2$  范数的“自然矩阵范数”是

$$\|A\|_2 = [\rho(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$$

其中  $A^* = \bar{A}^T$  为  $A$  阵的共轭转置,  $\rho(A^*A)$  为矩阵  $A^*A$  的谱半径(即矩阵  $A^*A$  绝对值最大的特征值).

显然,若  $A$  为正规矩阵,也就是  $A^*A = AA^*$ , 则有

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

下面是以后将用到的几个有关矩阵范数的定理(这里略去证明).

定理 1  $\bar{n}$  阶矩阵范数为矩阵的  $\bar{n}^2$  个元素的“连续”函数.

定理 2  $A$  的不同形式的矩阵范数是等价的.

定理 3 矩阵  $A$  的范数不小于  $\rho(A)$ , 也就是

$$\rho(A) = \inf \|A\|$$

其中  $\inf$  表示下确界.

定理 4 收敛矩阵  $A$  有

$$(1) \lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$$

$$(2) \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\| = 0$$

$$(3) \rho(A) < 1$$

$$(4) (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

$$(5) \frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

差分式解的误差  $U - u$  是一个矢量, 这个矢量的维数是差分解域中的点数  $\bar{n}$ , 差分解法的收敛是指

$$\lim_{\bar{n} \rightarrow \infty} \|e\| = \|U - u\| = 0, \text{ 而 } \bar{n}\Delta \rightarrow D$$

由于误差  $e$  是  $\bar{n}$  的函数(点数  $\bar{n}$  值不同, 误差  $e$  也就不同), 故写作  $e(\bar{n})$ ,  $e(\bar{n})$  是函数序列,  $U(\bar{n})$  (差分解  $U$  也是  $\bar{n}$  的函数) 也是函数序列. 当  $\bar{n} \rightarrow \infty$  时, 我们希望  $e(\bar{n})$  的极限为零, 而  $U(\bar{n})$  的极限为微分方程的准确解  $u$ .

若  $U(\bar{n})$  的泛函空间是“密集”的, 则  $U(\bar{n})$  的收敛是一致的,

当  $n$  很大但为有限值时, 步长  $\Delta \sim \frac{1}{n}$  为很小, 则  $e(\Delta) \sim O(\Delta^\alpha)$ ,

$\alpha$  为一定的正数.

根据上述定义, 收敛的概念与选用的范数有关. 虽然不同的范数是等价的, 但要注意  $L_2$  范数的一致收敛, 并不能保证最大范数的一致收敛.

### §1-4 适 定 性

无论差分法解或是有限单元法解, 其收敛的先决条件均应是: 微分问题是适定的, 即解  $u$  必须“存在”并在固定的域内是“唯一”的, 此外, 解还必须具有“连续性”.

这里所谓“连续性”是指微分式及边界条件初始条件中的参数如稍有变化(扰动), 解仍应存在且仍为唯一, 这个扰动后的唯一解与扰动前的解应相差无几, 这就是微分问题的连续性. 这样, 当扰动趋近于零时, 解的改变量  $\|\Delta u\| \rightarrow 0$ . 这一点首先由 Hadamard 提出, 称作 Hadamard 适定条件. 有了这一条件, 当描述一个具体物理问题的微分方程若其初边值条件与实际问题的出入时(这一误差肯定会有的), 我们仍能得到物理问题的正确近似解. 但是, 微分问题的适定性并不能保证差分方法或有限单元法等离散近似问题的“适定”. 后者也要求三点(这三点与上述存在、唯一、连续性是相似的, 但其含义更广些):

(1) 可解性——即这个差分离散问题要求可以解得出来.

(2) 唯一性——不管是用这台或那台计算机, 也不管怎样作重复计算, 计算的结果应该相同, 当然误差(或差别)总是存在的, 所以我们这里称之为计算结果的可重复性是指这些误差是足够的小.

(3) 连续性——当初值或离散方程式的参数稍有改变, 解的结果应该保持 Lipschitz 连续性, 即解的改变等于参数的改变量乘上 Lipschitz 常数. Lipschitz 常数不应太大, 否则解的改变仍是相当大的.



这些特性很难从理论上证明,但我们应进行事后验证,这样虽不能保证一定就是我们所要寻求的物理问题的解,至少能帮助我们避免许多不必要的错误,使计算结果的解为物理问题的适当近似解。