

线性代数标准化试题

王守楨 编

中国标准出版社

(京)新登字 023 号

线性代数标准化试题

王守祯 编著

责任编辑 冯强

*

中国标准出版社出版
(北京复外三里河)

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

版权专有 不得翻印

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.875 字数 124 千

1993 年 5 月第一版 1993 年 5 月第一次印刷

*

ISBN7 -5066-0675 -5/0 • 004

印数 1—6 000 定价 3.20 元

*

科目 287—37

前 言

标准化命题考试是国外采用较早的一种考试方法,这种考试命题的特点是题目多,知识覆盖面广,还可以在很大程度上排除考试过程(命题、应试、阅卷)中的主观性、随机性,以提高考试的可信度。随着我国考试制度的改革,比较科学的标准化测试方法已经在各类考试中逐步开始使用。

编写本书的目的是:(1)使初学者加深对基本概念、基础知识的理解及熟悉基本运算;(2)供自学者自我测试学习水平;(3)供教师进行考试命题,布置思考题、复习题、课外作业时参考。本书是按照线性代数的教学内容顺序编写的,每章中包括填空题、是非判断题、单项选择题、多项选择题等四个方面的内容,每章题目都附有答案或提示,以供参考。由于题目构思巧妙、新颖、多变,内容充实,涉及面广且深入,因此,通过这些题目的练习,可以明确各类标准化试题的构造特点、解题思路和方法,正确理解、准确掌握和灵活运用基本概念和基本定理;纠正在运算方法和运算过程中常犯的错误;提高思维能力、逻辑推理能力和分析判断能力;提高解题技巧和应试能力。

本书可作为线性代数习题课教材,也可供财经类和工科类各专业在校本科、专科学生学习时参考以及电大、夜大、函大、职大学员和参加自学考试的学生们的自学参考资料,又可供报考研究生的读者复习之用。

由于时间仓促以及水平所限,不妥之处在所难免,敬请同行及读者批评指正。

王守楦

1992年1月

符 号 说 明

符号	含义
$i_1 i_2 \cdots i_n$	由数 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 组成的一个 n 级排列
$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$	排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数
$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $= a_{ij} $	n 阶行列式
D' (或 D^T)	行列式 D 的转置行列式
M_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的余子式
A_{ij}	行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式

续表

符号	含义
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $= (a_{ij})_{m \times n}$	$m \times n$ 矩阵
A' (或 A^T)	矩阵 A 的转置矩阵
$ A $	方阵 A 的行列式
$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	单位矩阵
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$I(i, j)$	第一种初等行(列)变换
$I(i(k))$	第二种初等行(列)变换
$I(i, j(l))$	第三种初等行(列)变换
$E(i, j)$	$I(i, j)$ 对应的初等矩阵
$E(i(k))$	$I(i(k))$ 对应的初等矩阵

续表

符号	含义
$E(i, j(l))$	$I(i, j(l))$ 对应的初等矩阵
$\alpha(\text{或 } \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$	n 维(列)向量
R^n	n 维向量空间
$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$	n 维单位向量组
$(I) \simeq (II)$	表示(I)、(II)两个向量组等价
$R(a_1, a_2, \dots, a_n)$	向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的秩
$R(A)$	矩阵 A 的秩
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$	一般的线性方程组
$AX = B$	一般线性方程组的矩阵形式
$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$	一般线性方程组的向量形式
A	线性方程组的系数矩阵

续表

符号	含义
$A B$	线性方程组的增广矩阵
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$	齐次线性方程组
$AX=0$	齐次线性方程组的矩阵形式
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$	齐次线性方程组的向量形式
$V_1, V_2, \cdots, V_r$	齐次线性方程组的基础解系
$A \sim B$	A 与 B 相似
$A \simeq B$	A 与 B 合同
$f = X'AX$	二次型的矩阵形式

目 录

第一章 行列式	1
一、填空题	1
二、是非判断题	5
三、单项选择题	9
四、多项选择题	14
第二章 矩阵	20
一、填空题	20
二、是非判断题	25
三、单项选择题	27
四、多项选择题	34
第三章 n 维向量	41
一、填空题	41
二、是非判断题	47
三、单项选择题	50
四、多项选择题	64
第四章 线性方程组	72
一、填空题	72
二、是非判断题	76
三、单项选择题	81
四、多项选择题	88
第五章 特征根和特征向量	94
一、填空题	94

二、是非判断题	97
三、单项选择题	99
四、多项选择题	104
第六章 二次型	107
一、填空题	107
二、是非判断题	108
三、单项选择题	109
四、多项选择题	112
习题答案	114

第一章 行列式

一、填空题

1. 排列 2431 的逆序数是 4, 是 偶 排列, 通过 2 次对换可调成自然排列 1234.

2. 排列 35782146 的逆序数是 14, 是 偶 排列.

3. 当 $i = \underline{3}$, $j = \underline{6}$ 时, 排列 $1i25j4897$ 为奇排列.

4. $2n$ 级排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2}$.

5. $2n$ 级排列 $13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 2$ 的逆序数为 $n(n-1)$.

6. 若排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 k , 则排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为 $n(n-1)-k$.

7. 在所有的 n 级排列中, 奇排列的个数为 $\frac{n!}{2}$.

8. n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 一般项的表达式为 $(-1)^{r+j} a_{r1} a_{r2} \cdots a_{rj} \cdots a_{rn}$.

9. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中, 含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$

10. 若将行列式 D 的两行(或两列)互换 n 次, 那么, 当 n 为 奇 时, D 的值变号; 当 n 为 偶 时, D 的值不变.

11. 如果 n 阶行列式中零元素的个数大于 $n^2 - n$ 个, 那么此行列式的值为 0.

12. 设 D 是 n 阶行列式, 当 D 中的元素满足 $a_{ij} = 0$ ($i > j$) 时, 称 D 为上三角行列式.

13. 若行列式每行元素之和都为零, 则此行列式的值为

0.

14. n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中, A_{ij} 是对应元

素 a_{ij} 的代数余子式, 那么乘积 $a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk}$

$= D \delta_{jk}$

15. M_{ij} 和 A_{ij} 分别是 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式, M_{ij} 是由 D 中划去第 i 行, 第 j 列, 并将剩下的元素按 原来次序 排列的一个 $n-1$ 阶行列式, 且 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

16. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{-4}$.

17. 设 $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, 那么,

$D = \begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{vmatrix} = \underline{-10}$.

n ~~n~~

18. $\checkmark$ n 阶行列式 $(n+1)$ $\left| \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{array} \right| = \underline{n+1}.$

19. n 阶行列式 $\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \underline{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}}.$

20. n 阶行列式 $\left| \begin{array}{ccccc} a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \\ a_{1n-1} & a_{2n-1} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right| = \underline{a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}}.$

21. 若 $D = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = 1$, 则 D_1

$= \left| \begin{array}{ccc} 4a_{11} & 2a_{11} - 3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} - 3a_{32} & a_{33} \end{array} \right| = \underline{-12}.$

(22) 当 n 为奇数时, 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}.$$

23. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$ 的根为 1, 12.

24. 使方程 $\begin{vmatrix} 2 & x-1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix}$ 成立的 x 是 1 或 2.

25. 一个含有 n 个方程、 n 个未知量的齐次线性方程组，若其系数行列式 $D \neq 0$ ，则该方程组只有零解。

26. 若方程组 $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $k = \underline{4 \text{ 或 } -1}$.

27. 当 λ 满足 1 且 -3 时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + \lambda x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + \lambda x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases} \text{ 仅有零解.}$$

28. 用克莱姆法则可求得线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases} \text{ 的根为 } x_1 =$$

$$x_2 = \underline{2}, x_3 = \underline{3}, x_4 = \underline{-1}.$$

二、是非判断题

1. 排列 14325 是偶排列. ☒
2. 任一个 n 级排列都可经过若干次对换变成自然排列. ☒
3. 当 n 为奇数时, 排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 和 $i_n i_{n-1} \dots i_1$ 的奇偶性相反. ☒ $\frac{n(n-1)}{2}$
4. 四阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{23}$ 的项是 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 和 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$. ☒ 注意符号
5. 若行列式 D 中, 有两行对应元素是互为相反数, 则 $D=0$. ☒
6. 若行列式中的每一个元素都大于零, 则 $D>0$. ☒
7. n 阶行列式 D 中元素均为非零元素, 则 $D \neq 0$. ☒

$$8. n \text{ 阶行列式 } D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 和}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 若对 } i, j=1, 2,$$

...n, 有 $a_{ij} > b_{ij}$, 则 $D_1 > D_2$. ~~X~~

9. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$

3.3.1. 则 $\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & \cdots & a_{1n}-a_{2n} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & \cdots & a_{2n}-a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n} \end{vmatrix} = 0.$ 

10. 如果 n 阶行列式在 k 个行和 h 个列的交点处的元素都为零, 且 $k+h > n$, 则此行列式等于零. 

11. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$

则 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{1n-1} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn} & a_{nn-1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = -D.$ ~~X~~

12. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$

$$\text{则 } D_1 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n D. \quad \checkmark$$

$$13. \text{ 设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\text{则 } D_1 = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = kD \quad \times$$

$$14. \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad \checkmark$$