初中几何证题方法大全

儿童出版社

初中几何证题方法大全

阎照林

江苏少年儿童出版社

初中几何证题方法大全

阎 照 林

出版发行：江苏少年儿童出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：徐州新华印刷厂

开本787×1092毫米　1/32　印张12.25　字数280,000

1990年7月第1版　　1990年7月第1次印刷

ISBN 7—5346—0542—3

G·260　　　定价：3.30元

三角形　四边形　相似形

前　言

我们中华民族是勤劳、智慧的民族。我国古代曾有很灿烂的文化，有许多伟大的发明，科学技术也曾走在世界的前列。正是这些发明传入西方之后，促进了西方的文明。可是到了近代，我们却落后了。究其原因，正如杨振宁博士所讲的，这是一个非常复杂的问题，但其中一个重要原因就是中国古代学者没有像西方学者那样重视几何学。“这是造成中国科技不发达的众多复杂因素中在思辨上带根本性的一个重要方面”。对于我们科技的差距，每一个炎黄子孙，谁又能无动于衷呢？

亲爱的同学们，你们是二十一世纪的科学家，发展中国科技，赶超世界先进水平的担子必然落在你们的肩上！请接受历史的教训，重视几何，掌握其逻辑系统，去发现，去发明，去创造！为了使你们能打好基础，找到正确的根本的方法，减少分析时的盲目性，提高做题的正确性，从而更好地掌握几何学的一套逻辑系统，我们编写了这本《初中几何证题方法大全》。本书对各种类型的平面几何题目，都作了系统地归纳和总结，给出了分析思考的路线，理论根据，以及证明的方法和技巧；有例题，有习题，有提示，有指导，可作为课堂学习的补充，便于同学们阅读和自学。

参加本书编写工作的还有胡成英、培建、张素英、培化等同志。在编写过程中得到了燕守忠、踪家金、刘祖合、阎

树民、张凤涛、鹿启贵等同志的支持和帮助，谨表谢意。本书选用了有关资料中的一些典型习题，在此对原命题者及原出版单位表示感谢。

由于我们水平有限，书中的错误在所难免，敬请专家与读者指正。

编　者

1990年2月

目 录

一、几何证明的分析法和综合法

几何是数学学科的一个分支．在中学数学中学习平面几何知识，是培养同学们逻辑思维能力的重要途径．而逻辑思维能力是通过推理论证来培养的，推理论证的过程就是证明．因此，学习几何就要学会证明．所谓证明，就是从题设（也就是已知）出发，根据已经学过的定义、公理或定理，经过“因为……所以……”组成的推理，直到得出结论．推理的每一步都必须有根据，要论据充分，既不可没有根据，又不可乱写理由．其中的根据应是题设和已证事项或定义、公理、定理．

证明一个命题的一般步骤如下：

①按题意画出图形；

②分清命题的题设和结论，结合图形，在已知一项中写出题设，在求证一项中写出结论；

③探求证明途径；

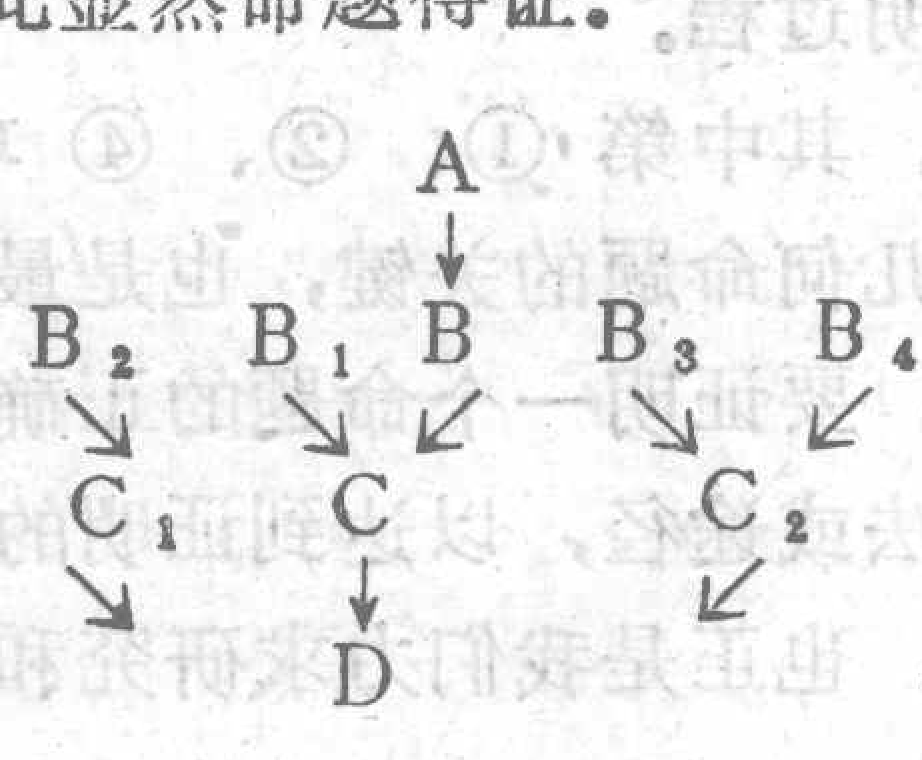
④在证明一项中写出证明过程．

以上是证明的一般步骤，其中第①、②、④项比较容易掌握，但第③项是证明几何命题的关键，也是最难掌握的。因为几何命题千变万化，要证明一个命题的正确，关键在于怎样找出正确的证明方法或途径，以达到证明的结果．这确是最困难的、最关键的，也正是我们力求研究和解决的问题．

（一）分析法

要证明一个命题正确，为了寻找正确的证题方法或途径，我们可以先设想它的结论是正确的，然后追究它成立的原因，再就这些原因分别研究，看它们的成立又各需具备什么条件，如此逐步往上逆求，直至达到已知的事实．这样一种思维方法就叫做分析法，可简单地概括为“执果索因”．执：就是拿的意思．果：就是结果．索：就是索取、寻找．因：就是原因．明白地说就是拿着结果去寻找原因．

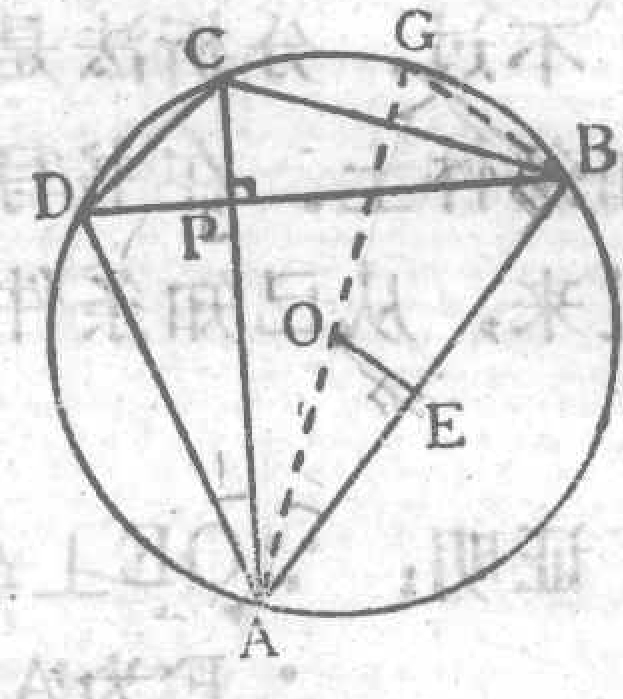
例如，要证明定理“若A成立，则D成立”．用分析法思考时，其思路可如下图所示：（应从下往上看）从结论开始，即从D开始往上寻求其成立的条件，假设C、C_1、C_2，都能使D成立，再寻求什么条件能使C、C_1、C_2成立，设B、B_1能使C成立，B_2能使C_1成立，B_3、B_4能使C_2成立，这一切原因，固然都可使D成立，但究竟哪个是题设A的结果呢？检查之后，设发现B是．这样就由未知的D上溯到已知的A，因而就获得了证明的思路：$D \leftarrow C \leftarrow B \leftarrow A$．即D可由C得出，C又可由B得出，B又可由已知的A得出，至此显然命题得证．



【例1】若圆内接四边形的对角线互相垂直，则圆心至任

一边的距离等于该边对边的一半。

已知：四边形ABCD内接于⊙O，对角线AC⊥BD，OE⊥AB于E。



求证：$OE=\frac{1}{2}CD$。

用分析法分析：要证明$OE=\frac{1}{2}CD$，由OE⊥AB知E为AB的中点，故可作一直径AG则O为AG的中点，连BG则可得$OE=\frac{1}{2}BG$。下面只要证出BG=CD即可。要证出BG=CD有许多方法，此题只有一种是可行的，只要证出∠BAG=∠CAD即可。由∠APD=∠ABG=Rt∠，∠AGB=∠ADB，这是由题设和作辅助线得出的，故∠BAG=∠CAD。以上的分析思路，可用下图简单表示，不过要从下往上逆求。

题设　　　　辅助线

∠AGB=∠ADB　　∠ABG=∠APD

弦心距等　　∠BAG=∠CAD　　圆心角等　　弧等

BG=CD

$OE=\frac{1}{2}BG$

$OE=\frac{1}{2}CD$

不过，分析法是从结论开始逐步往上逆求，最后归结到已知条件上. 在书写证明过程时，为了叙述方便，往往还要逆过来，从已知条件开始叙述. 此题的证明过程可如下书写.

证明：$\because OE \perp AB$,

$\therefore$ E为AB的中点.

作直径AG，连结BG,

则O为AG的中点，$BG \perp AB$,

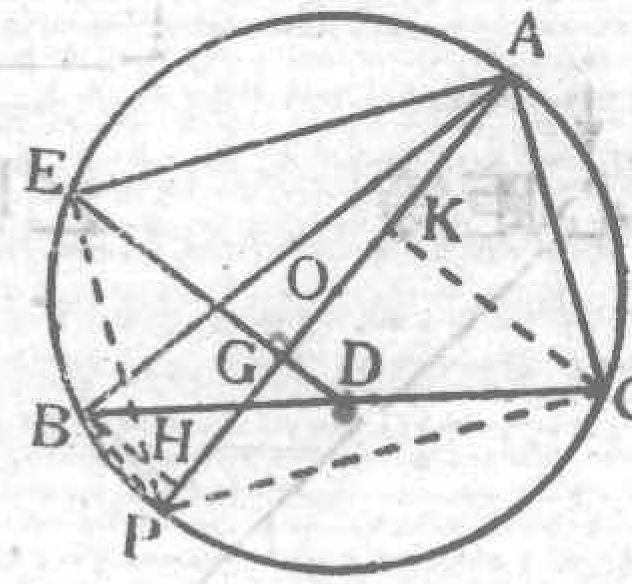
$\therefore OE = \frac{1}{2}BG$.

又 $\because \angle APD = \angle ABG = Rt\angle$，$\angle ADB = \angle AGB$,

$\therefore \angle DAC = \angle BAG$，　$BG = CD$.

$\therefore OE = \frac{1}{2}CD$.

【例 2】 已知△ABC内接于⊙O，AP为⊙O的直径，D为BC的中点，$DG \perp AP$交⊙O于E，求证：$AB^2 + AC^2 = 2AE^2$.



采用分析法，用语言分析为：要证明$AB^2 + AC^2 = 2AE^2$，可先找出AB^2、AC^2各能等于什么，然后让它们相加，再与$2AE^2$相比较，看能否相等. 由AP是⊙O的直径，故只要过B、C各作AP的垂线BH和CK，则易知$AB^2 = AH \cdot AP$，$AC^2 = AK \cdot AP$，这样$AB^2 + AC^2 = AH \cdot AP + AK \cdot AP = AP \cdot (AH + AK)$；由BH、CK、DG都是AP的垂线又得三条直线平行，又D为BC的中点可得G为HK的中点，这样$AH + AK = 2AG$，$AB^2 + AC^2 = AP \cdot 2AG = 2 \cdot AP \cdot AG$. 而$AP \cdot AG = AE^2$，故$AB^2 + AC^2 =$

$2AE^2$．命题得证．

思路可由下图表示（看时要从下往上看）．

$BH // GD // KC$， D为BC的中点

↓

G为HK的中点

↓

$AH+AK=2AG$

↓

$AH \cdot AP+AK \cdot AP=AP(AH+AK)$

↙ ↘

作垂线：$AB^2=AH \cdot AP$，$AC^2=AK \cdot AP$ $2AG \cdot AP$

↓ ↓

$AB^2 + AC^2 = 2AE^2$

书写证明过程时，应从上往下进行叙述．

证明：作$BH \perp AP$，$CK \perp AP$，H、K为垂足．

$\because DG \perp AP$，

$\therefore BH // DG // KC$．

又$\because$ D为BC的中点，

$\therefore$ G为HK的中点，$AH+AK=2AG$．

又$\because$ AP为⊙O的直径，

连PB、PC、PE则得三个直角三角形，

$\therefore AB^2=AH \cdot AP$，$AC^2=AK \cdot AP$，

$AE^2=AG \cdot AP$．

$\therefore AB^2+AC^2=AH \cdot AP+AK \cdot AP=$

$AP \cdot (AH+AK)=AP \cdot 2AG=2 \cdot AG \cdot AP$

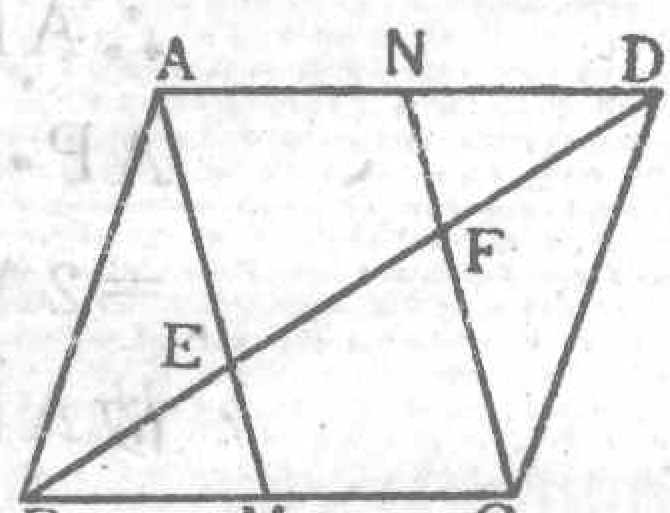
$=2AE^2$．

故$AB^2+AC^2=2AE^2$．

（二）综合法

综合法也是几何证明中常用的一种思考方法。思考问题时，从已知的条件出发，通过一系列已确立的命题（定义、公理、定理），逐步向前推演，最后推得要证明的结果，这样的一种思维方法，就叫做综合法，可简单地概括为“由因导果”，说明白点就是由原因去推导结果。它的特点正好与分析法相反，它是从已知的条件开始推演，最后推出要证明的结果。

例如：要证明定理“若A成立，则D成立”，用综合法思考时，其思路可由下图所示。从已知条件开始，故从A开始推演，寻找可以到达D的思路，但由A所得的结果往往不止一个，可能有好多个。设B、B_1、B_2都是A的结果，同样由B、B_1、B_2又可得好多结果，设由B可得C、C_1，B_1可得C_2，B_2可得C_3、C_4。在这些C中，只要有一个能得出D即可。思考至此，便可得到：A→B→C→D这条证明的思路了。若C中还没有一个能得出D的，可如上一样，再往下寻求，直至能得出D为止。



【例1】 在▱ABCD中，M、N分别是BC、AD两边的中点，AM、CN分别交BD于E、F。求证：BE＝EF＝FD。

用综合法思考可如下图所示：

▱ABCD

对角相等，$AB\underline{\parallel}DC$，$AD\underline{\parallel}BC$ 对角线互相平分

$BM=MC$

$AN=ND$

$AN\underline{\parallel}MC$

▱AMCN

$ME\parallel CF$ 对角相等 对角线互相平分 对边相等 $NF\parallel AE$

$BM=MC$

$BE=EF$

$AN=ND$

$EF=FD$

$BE=EF=FD$

书写证明过程，只要按照上面的思考路线，从上到下进行即可。

证明：∵ABCD是平行四边形，

∴$AD\underline{\parallel}BC$。

又∵$BM=MC$，$AN=ND$，

∴$AN\underline{\parallel}MC$。

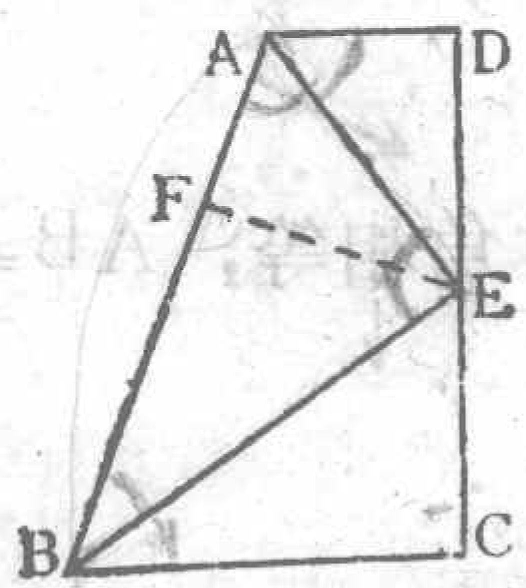
∴AMCN是平行四边形。

∴$ME\parallel CF$。

又∵$BM=MC$，　∴$BE=EF$。

同理：$DF=EF$，∴$BE=EF=DF$。

【例2】 已知梯形ABCD的腰CD上有一点E，EA、EB分别平分∠DAB和∠CBA，则AB＝AD＋BC。用综合法思考可如下图所示：



梯形ABCD

↓

AD∥BC

↙ ↓

∠C、∠D互补　∠DAB、∠ABC互补

↓

∠AEB＝90°　　　EA、EB是角平分线

截BF＝BC

↓

△BEF≌△BEC

↓

△ADE≌△AFE

↓

AF＝AD

↓

AB＝AD＋BC

证明：∵ABCD是梯形、CD是腰，

∴AD∥BC，∠DAB＋∠ABC＝180°。

又∵EA、EB分别平分∠DAB和∠ABC，

∴$\angle BAE+\angle ABE=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，

∴∠AEB＝90°。

在BA上截取BF＝BC，则△BEF≌△BEC。

∴∠BEF＝∠BEC，∠AEF＝∠AED。

又EA平分∠DAB，AE公用，

∴△AEF≌△AED，AF＝AD。

∴AB＋BF＋AF＝BC＋AD。

（三）灵活运用分析法与综合法

分析法和综合法，是几何证明时常用的两种思考方法。以上对于分析法和综合法，只是作了简要的介绍，从中我们可以发现或体会到，这两种方法各有长短。分析法的特点是从要证明的结论开始一步步地寻求其成立的条件，直至寻求到已知条件上。综合法的特点是从已知条件开始推演，一步步地推导结果，最后推出要证明的结果。证几何题时，在思索上，分析法优于综合法。因为几何命题的论断，其根据都出于公理，而公理不过二十多条，但由此产生的定理却不知有多少，所以由因导果较难，执果索因较易。但是另一方面，由于分析法的思路是逆行的，叙述起来较难，措辞不易得当，又不及综合法思路自然。故在表述上分析法又不如综合法。总的说来，分析法和综合法各有优缺点，前者利于思考，后者宜于表述，在解决问题时，最好合并使用。习惯上，对于一个新的问题，多半先用分析法寻求解法，然后用综合法有条理地表述出来。重要的是多加练习，认真体会，总结经验，不断提高，循序渐进，直至熟能生巧。

另外，对于一些比较复杂的几何问题，我们可以采用"两头凑"的思考方法去寻求证明的途径。即先从已知条件出发，看可以得出什么结果，再从要证明的结论开始寻求，看它的成立需具备哪些条件，最后看它们的差距在哪里，从而找出正确的证题途径。

例题　两同心圆中，大圆的弦AC、AG分别切小圆于D、E，延长DE交大圆于B。求证：AB：BC＝BE：CD。

分析：用"两头凑"的方法。由已知可得D、E分别为AC、AG的中点，AC＝AG。连CG则CG∥DE，DEGC是等