随机振动实验技术

戴诗亮 编著

清华大学出版社

目　录

第一章　随机振动的基本特性

1.1　概　　述

一、振动的分类

振动是物体机械运动的一种特殊形式。振动常用运动的时间历程来描述，或者说用位移、速度或加速度的时间函数来表示。例如简谐振动的位移时间历程是

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

式中 $x(t)$ 是振动位移，

x_0 是位移振幅值，

ω 是振动圆频率，

t 是时间，

φ 是初相角。

显然，在 x_0、ω 和 φ 一定时，简谐振动是一个确定性运动。对任意时刻 t，振动位移 $x(t)$ 的数值可以精确计算出来，它是一个确定的数，换句话说，描述简谐振动所用的是确定性数据。

我们按照描写振动的数据的特点，可将物体振动分类如图 1.1 所示。即将振动分为确定性振动和随机振动两大类。

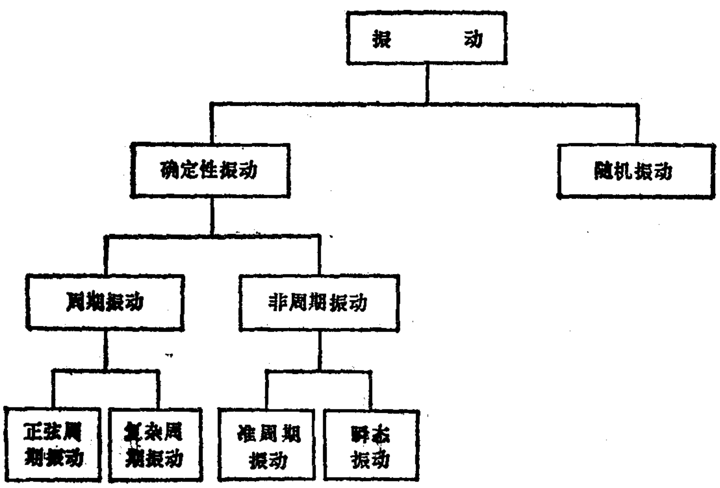

图 1.1　振动的分类

确定性振动又分为周期性振动和非周期性振动。

周期振动包括简谐振动和复杂周期振动，所谓复杂周期振动就是除简谐振动以外的周期振动。

非周期振动包括准周期振动和瞬态振动。所谓准周期振动也是由一些不同频率的简谐振动合成的振动，这一点与复杂周期振动类似。但是，准周期振动没有周期性，组成它的简谐分量中总会有一个分量与另一个分量的频率之比值为无理数。而复杂周期振动的诸简谐分量

中任两个分量的频率比都是有理数，这是准周期振动与复杂周期振动的不同之点。至于非周期振动中的瞬态振动，其时间函数为各种脉冲函数或者衰减函数，例如有阻尼自由振动就属于瞬态振动。或者可以说除准周期振动以外的一切可以用时间函数描述的非周期振动都属于瞬态振动。

简谐振动、复杂周期振动、准周期振动和瞬态振动的时间历程图分别如图 1.2 所示，其中瞬态振动是一种衰减振动。

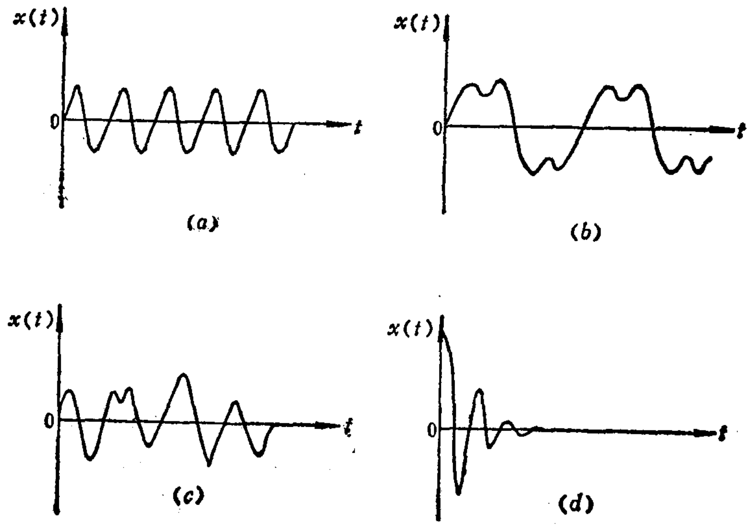

图 1.2 确定性振动

(a) 简谐振动 (b) 复杂周期振动 (c) 准周期振动 (d) 瞬态振动

随机振动是一种非确定性振动。当系统作随机振动时，事先不可能确定系统中观测点在某时刻的位置以及振动的有关振幅、频率或相位等参数的瞬时值，即不能用确定函数来描述这种振动。例如，我们研究结构抗震问题时，就不能用一个确定函数来描述可能要发生的地震的振动波形，也就是对振动系统的激励事先不能用确定函数描述。因此振动响应也就不能用确定函数描述。

随机振动虽然具有不确定性，但却有一定统计规律性。所谓统计规律性就是在一定条件下多次重复某项实验或观察某种现象所得结果呈现的规律性。例如当实验次数很多时，某参量测量结果的平均值就可能会趋向某一确定的极限值。

在自然界和生产实践中除了因激励随机变化引起随机振动外，振动系统本身的参量随机变化也会引起随机振动。

与确定性振动一样，振动系统在随机初始条件激励下会引起随机自由振动，当激励长时间作用时引起的随机振动叫做随机受迫振动。

在有些场合，一种振动是属于确定性振动还是属于随机振动很难区分。因为在确定性振动中也难免有意外因素的影响，使得振动有一定随机性。从这个意义上讲，绝对的确定性振动不存在。在实践中，判断振动是确定性的还是随机的，通常是以在相同条件下是否产生相同的振动结果作为依据。如果在实验人员控制的相同的实验条件下多次重复同一实验，所得振动结果都相同，则为确定性振动，否则为随机振动。

既然一个随机振动系统在相同的条件下进行多次重复实验所得振动记录都不完全一样，因此要研究随机振动就要研究大量实验数据的统计规律性，这是在研究方法上与确定性振动的不同之点。

随机振动的时间历程如图 1.3 所示。

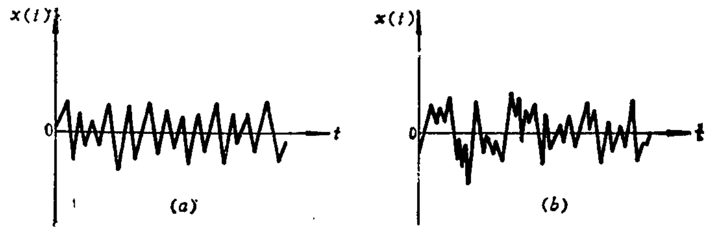

图 1.3 随机振动时间历程图

要注意一点，随机振动不等于复杂振动。例如，初相角随机变化的简谐振动，波形十分简单，但它却是一种随机振动。“随机”不是复杂的意思，而是不确定性的意思。一个确定性振动波形无论怎样复杂，也不是随机振动。对于任意时刻 t，确定性振动参数是可以根据描述振动的函数进行计算的，即表示振动特性的位移、速度和加速度的幅值，频率以及相位等参数都是确定的。

随机振动的其它特性后面再详细讨论。按照随机振动的特性，从不同的角度，随机振动还可有以下各种分类方法：

（1） 按振动激励和振动系统参数的特性可分为：

随机激励引起的随机振动；

系统参数的随机性引起的随机振动；

随机激励和系统参数的随机性共同引起的随机振动。

（2） 按激励类型可分为：

随机自由振动；

随机受迫振动。

（3） 按系统自由度可分为：

单自由度随机振动；

多自由度随机振动；

无限多自由度随机振动。

（4） 按振动微分方程的特点可分为：

线性随机振动；

非线性随机振动。

（5） 按随机振动频带宽窄可分为：

宽带随机振动；

窄带随机振动。

（6） 按振动的特性随时间变化情况可分为：

平稳随机振动；

非平稳随机振动。

关于这里所列分类方法，有些与确定性振动的分类方法类似，有一些以后再详细讲，这

里就不多说了。

二：各类振动的频谱特性

各类确定性振动和随机振动不仅时间历程图有很大的差别，而且频谱特性也有很大的差别。频谱特性在振动研究中非常重要，很多振动问题，例如系统动特性研究，共振问题，响应分析，环境预测以及寻找振源等各种振动理论分析和实际工程问题都离不开对振动进行频率分析。所以我们将各类振动的频谱特性分述如下。

简谐振动只包括单一频率成分，可用图 1.4 所示线谱图来表示，这是振动能量按频率的分布图。显然，简谐振动全部能量集中在单一频率上。

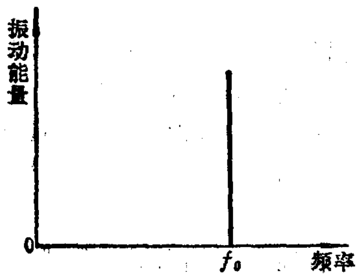

图 1.4　简谐振动的线谱

图 1.5　周期振动的线谱

复杂周期振动，通常即称周期振动，可按富里叶级数展开而分解为简谐振动的叠加。其振动能量线谱图如图 1.5 所示。图中 f_1 是基频，它等于周期振动的周期的倒数。而 $f_2, f_3, \cdots, f_n$ 是高次谐振频率。且

$$\begin{aligned} f_2 &= 2f_1, \\ f_3 &= 3f_1, \\ &\vdots \\ f_n &= nf_1 \end{aligned}$$

即周期振动的能量分散于基频及各个整倍频处。

虽然准周期振动也是由简谐振动叠加而成，例如

$$x(t) = x_1 \sin \omega t + x_2 \sin \sqrt{2}\, \omega t$$

就是准周期振动，但不管时间 t 延续多长，$x(t)$ 都不会成为周期函数。具有多个简谐分量的准周期振动的线谱如图 1.6 所示。虽然准周期振动能量也是集中在频率 $f_1, f_2, \cdots f_n$ 处，但这里至少存在一个 $f_i (i = 2, 3, \cdots, n)$，使得 f_i/f_1 为无理数，更不会所有谱线都在 f_1 的整倍频处。

图 1.6　准周期振动的线谱图

瞬态振动的频谱与周期振动及准周期振动的情况都不一样。当瞬态振动 $x(t)$ 满足绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \tag{1.2}$$

时，$x(t)$ 的富里叶积分

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \tag{1.3}$$

就存在。式中 $j=\sqrt{-1}$，f 是振动频率。

$X(f)$就是瞬态振动 $x(t)$的频谱，一般为复数，若只考虑其幅值大小，则 $X(f)$的模$|X(f)|$就直接表示 $x(t)$ 的各频率分量的大小。

如图1.2(d)所示瞬态振动

$$x(t)=\begin{cases}x_0e^{-at}\ \cos bt & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

即 $x(t)$是一衰减振动，则其$|X(f)|$-f 关系如图 1.7 所示。

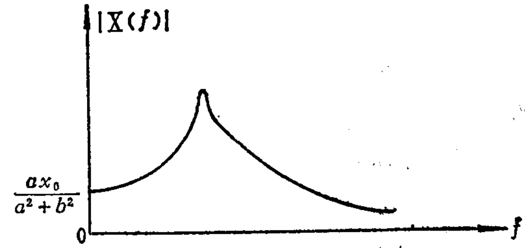

图 1.7　图 1.2(d)所示瞬态振动的频谱图

由于$|X(f)|$ 是 f 的连续函数，所以瞬态振动不是离散谱，而是连续频谱。即振动能量分布在一个连续的频率区间上，不象周期振动和准周期振动的能量是集中在离散频率点上，这是瞬态振动与周期振动及准周期振动的一个根本不同点。

随机振动的频谱也是连续频谱，能量也是分布在一个连续的频带（f_1，f_2）上。图 1.3 所示随机振动的能量对频率的分布图如图 1.8 所示。

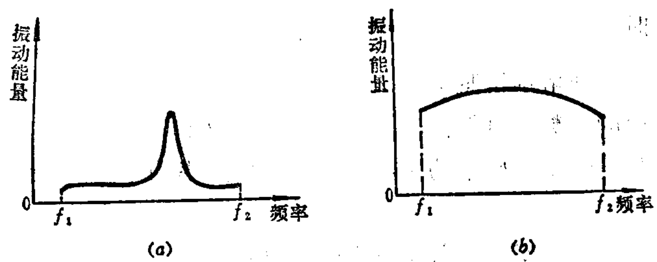

图 1.8　随机振动能量对频率的分布图

随机振动和瞬态振动一样，都具有连续频谱，这是它们的相同之点。但二者有本质的不同，即瞬态振动的频谱是一确定函数，每个频率点上的振动能量是唯一确定的。而随机振动的频谱具有不确定性，每个频率点上的振动能量有不确定性。在相同的条件下多次重复实验时，每次所得频谱图是有差别的，但却是有一定统计规律性的。具有不确定性和统计规律性这两点就是随机振动的频谱区别于瞬态振动频谱之所在。

三、样本函数与随机过程

研究随机振动需要研究相同实验条件下所得多个振动记录的统计规律性，即需要研究多组振动数据，要研究可能取得的全部数据集合。举例说，汽车从甲地到乙地行驶，我们测量车身上某点铅垂加速度随时间的变化量，所得结果就是随机振动记录的一个典型例子。从甲地到乙地行驶N次所得的振动加速度时间历程图如图 1.9 所示。图中 t 表示时间，$x_i(t)$ 表示第 i 次行驶所测得的加速度值，$i=1,2,\cdots,N$。

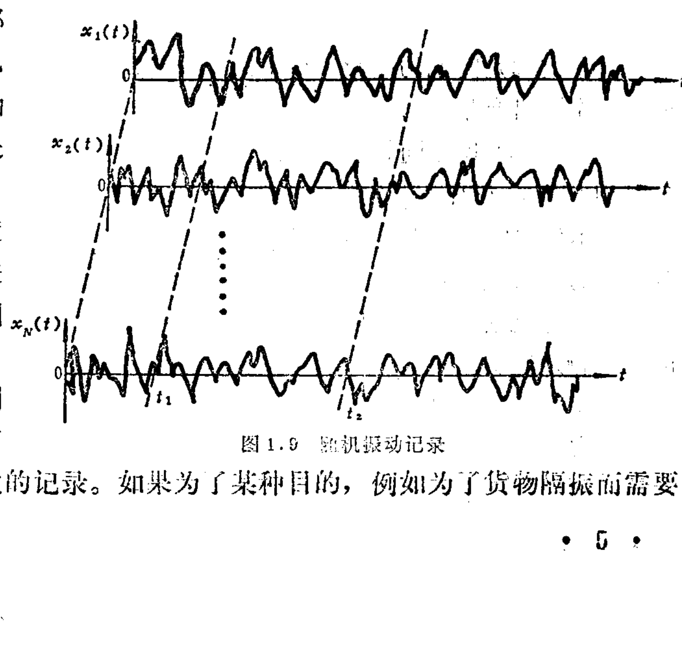

图 1.9　随机振动记录

显然，对于某一时刻 t_1，$x_i(t)$ 到底等于多大是不确定的，随次数 i 而变化。即每次记录都不可能重复前次的记录。如果为了某种目的，例如为了货物隔振而需要

研究即将发生的某一次行驶的加速度随时间的变化规律，那就得等该次行驶开始后去实地测量记录才能得到。在这以前所得的记录，虽然车辆、道路、装载、驾驶等各方面条件都相同，但也不能代替。所以，要研究某型号汽车从甲地到乙地行驶时车身上某点的振动规律，理论上就得行驶无穷多次，才能得到随机振动的全部信息。

图 1.9 所示随机振动记录中的某一次记录 $x_i(t)$ 称为一个样本函数。严格说，样本函数的时间区域应是无穷的。在有限时间区间观察所得结果叫做样本记录。

图 1.9 所示随机振动记录当$N\to\infty$时就形成一个随机过程。为了叙述随机过程的定义，我们先讨论随机事件、概率和随机变量的概念。

有许多现象，它们在一定条件下可能出现也可能不出现，这种现象称为随机事件，简称事件。例如"掷硬币得正面"就是随机事件。

概率就是在一次实验中随机事件A出现的可能性的数量上的描写，记作 Prob(A)。概率可以用频度（也叫频率）来定义：进行 n 次实验，若事件A出现 μ 次，则称$\frac{\mu}{n}$为A在这 n 次实验中出现的频度。当 n 充分大时，频度有稳定的趋势，$\frac{\mu}{n}$在Prob(A)附近摆动。当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\mu}{n}$按一定意义趋向于概率Prob(A)。

通俗地讲概率就是指随机事件出现的可能性的大小，它既表示在多次实验中某一事件发生的次数的可能性，又表示一次观测中该事件发生的可能性，即事件发生的机会。如果事件肯定发生，概率为 1，肯定不发生概率为零。一般情况下：

$$0\leqslant \mathrm{Prob}(A)\leqslant 1 \tag{1.4}$$

随机变量：若变量X的取值是不确定的，要由实验结果而定，但"取值小于任意实数"有确定的概率，则称 X 为随机变量。

例如某人打靶，弹着点离靶中心点距离X事先是不知道的，要射击以后才能确定，即X的取值要由实验结果而定。打靶时虽然每次射击弹着点距中心点距离X有无穷多个可能，但是对于确定的人，在确定的条件下，X的取值小于任意实数 x 的概率是确定的，所以X就是一个随机变量。

由于有了随机变量的概念，使概率由研究事件发展为研究函数。下面我们就可以定义随机过程：

随机过程是时间的函数，但不同于一般的函数，它在给定时刻的函数值不是一个数值，而是一个随机变量。

例如图 1.9 所示随机振动记录，当$N\to\infty$时，样本函数的总体就是一个随机过程。在某一时刻 $t=t_1$，车身上某点的振动加速度值 $X(t_1)$是一个变量，它的取值 $x_i(t_1)$，$i=1,2,\cdots$，N，是不确定的，但取值小于任意实数 x 的概率是确定的，所以 $X(t_1)$是一个随机变量。同样，在另一时刻 $t=t_2$，振动加速度 $X(t_2)$也是一个随机变量。

一个随机过程是随机现象可能产生的全部样本函数的集合，而一个样本函数是随机过程的一个物理现实。

由于在实践中只能得到有限长的样本记录，而不可能得到无限长的样本函数，所以在随机振动实验工作中并不严格区分样本记录和样本函数，有时也称样本记录为样本函数。一个随机过程的每一个样本记录的时间区间一般是相同的。这个时间区间可以是很长的时间，也

可以是相对很短的时间，这要根据所研究问题及数据处理的特点和需要而定。例如，河水流量随机过程的样本长度为一年，高大建筑物脉动随机过程的样本记录长度也许需要数小时，而在发射阶段火箭振动随机过程的样本记录可能只有几秒钟长。

图 1.9 所示随机过程的具体获得方法可以是某一个驾驶员驾驶同一辆车，努力控制车速和其它驾驶条件不变，在同一条道路上行驶N次而测量得到。也可以是N个驾驶员各驾驶一辆同一型号的车，在驾驶条件不严格控制的情况下各行驶一次而测量得到。显然，这样得到的两个随机过程会有所不同，前者各样本记录之间差异较小，后者则各样本记录间差异较大。

四、随机过程的特性与分类

（一） 概率分布函数和概率密度函数

为了研究随机过程，我们先介绍随机变量的概率分布函数和概率密度函数。

随机变量的取值事先是不可预知的，但是取值大于某值，小于某值或落在某一范围的概率是确定的，是可以计算出来的。

随机变量分为离散型和连续型两种。对于连续型随机变量X，我们定义X的取值小于某一实数x的概率为概率分布函数

$$P(x)=\mathrm{Prob}(X<x) \tag{1.5}$$

例如，在数轴上$[0,a]$区间内随机地投一质点，则质点所在的坐标是随机变量X，X的取值是连续的，是$[0,a]$内之任一实数，如图 1.10(a)所示。

显然，上例中X小于任意实数x的概率是可以计算的，即概率分布函数可以算出：

$$P(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0)\\ \dfrac{x}{a} & (0<x\leqslant a)\\ 1 & (x>a)\end{cases}$$

此概率分布函数如图 1.10(b)所示。

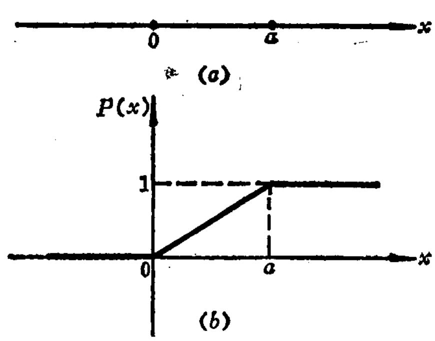

图 1.10 概率分布函数图

概率分布函数的一些性质简述如下：

（1） $P(x)$非降：若 $b>a$，则 $P(b)\geqslant P(a)$。

（2） $P(x)$左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^-}P(x)=P(a)$，$a^-$ 表从左边趋近 a。

（3） $P(-\infty)=0$；
$P(\infty)=1$。

（4） X连续则 $P(x)$必连续。

如果随机变量X的概率分布函数 $P(x)$可表示为

$$\begin{aligned}P(x)&=\int_{-\infty}^{x}p(x')dx'\\&=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx\end{aligned} \tag{1.6}$$

则称 $p(x)$ 为随机变量X的概率密度函数。如图 1.10(b) 所示概率分布函数对应的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & (0<x\leqslant a)\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}$$

如图 1.11 所示，

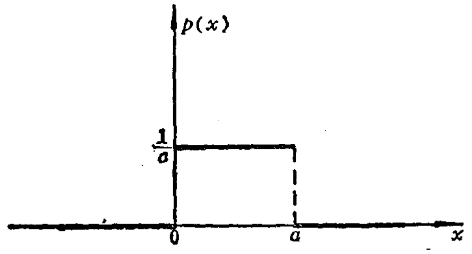

图 1.11　一种概率密度函数图

概率密度函数的一些性质简述如下：

（1）　$p(x)\geqslant 0$。

（2）　$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$。

（3）　对于 $a<x<b$

$$\int_a^b p(x)dx=P(b)-P(a)=\text{Prob}(a\leqslant X<b)。$$

（4）　$p(x)=\dfrac{dP(x)}{dx}$；

$$\begin{aligned}\text{Prob}(x\leqslant X<x+dx)&=P(x+dx)-P(x)\\&\approx dP(x)\\&=p(x)dx,\end{aligned}$$

设随机变量 X 的概率密度函数 $p(x)$ 如图 1.12 中曲线所示，则 X 的取值落在 x 与 $x+dx$ 之间的概率等于 $p(x)dx$ 如图 1.12 中影线面积所示。这是随机振动中一种典型的一维概率

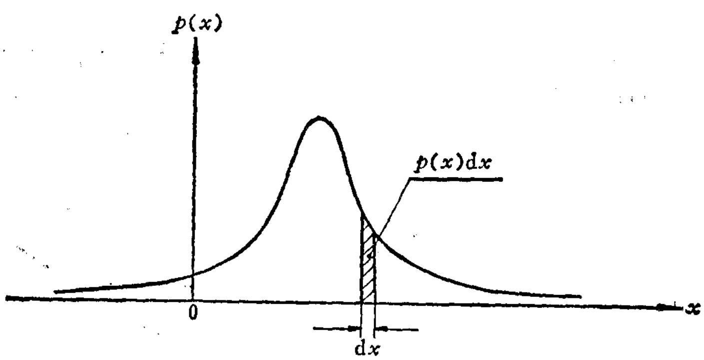

图 1.12　一种典型的一维概率密度图

密度图。一维概率密度函数的量纲是 $\frac{1}{x}$ 的量纲，$p(x)$ 只有乘以区间 dx 才等于概率。连续随机变量的取值落在一个点上的概率为零。所以概率密度函数中密度二字与质量线密度中的密度二字意思类似。

当两个随机变量 X_1，X_2 的取值由实验结果而定，且对任意实数 x_1 和 x_2，X_1 的取值小于 x_1 以及同时 X_2 的取值小于 x_2 有确定的概率，则称 X_1, X_2 为二维随机变量。且

$$P(x_1,x_2)=\text{Prob}(X_1<x_1,X_2<x_2) \tag{1.7}$$

就是二维概率分布函数。

二维概率分布函数有如下特性：

（1）　对 x_1, x_2 都非降。

（2）　对 x_1, x_2 都左连续。

（3） $P(-\infty, x_2)=0$；

$P(x_1, -\infty)=0$；

$P(-\infty, \infty)=0$；

$P(\infty, -\infty)=0$；

$P(\infty, \infty)=1$。

（4） 对于实数

$a_1 \leqslant a_2$， $b_1 \leqslant b_2$

有 $$P(a_2, b_2)-P(a_1, b_2)-P(a_2, b_1)+P(a_1, b_1)=A \geqslant 0$$

如图 1.13 所示。A 即二维随机变量的取值落在图中影线面积之内的概率。

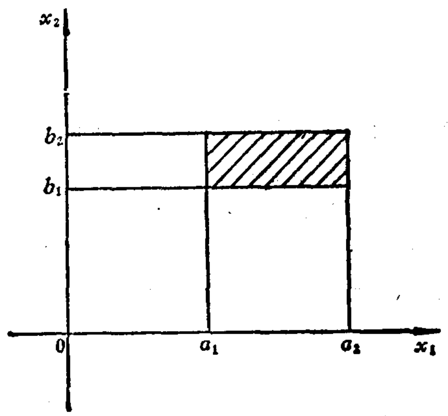

图 1.13 二维概率分布函数的区间

当二维概率分布函数 $P(x_1, x_2)$ 可表示为

$$P(x_1, x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \tag{1.8}$$

时，$p(x_1, x_2)$ 即为二维随机变量 X_1，X_2 的二维概率密度函数。其典型图形之一如图1.14所示。

如图 1.9 所示随机过程，同时考虑两个随机变量 $X(t_1)=X_1$ 及 $X(t_2)=X_2$ 的联合概率密度时，则$X(t_1)$ 的取值落在 x_1 和 x_1+dx_1 之间，同时 $X(t_2)$ 的取值落在 x_2 和 x_2+dx_2 之间的概率

$$\text{Prob}[x_1 \leqslant X(t_1) < x_1+dx_1,\ \ x_2 \leqslant X(t_2) < x_2+dx_2]$$

就等于图 1.14 所示以微元面积 dx_1dx_2 为截面、以 $p(x_1, x_2)$为高度的体积。

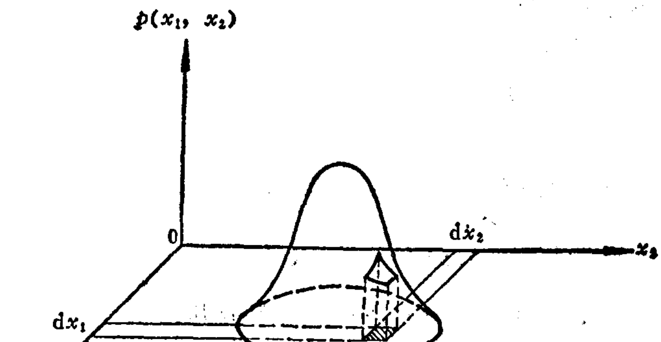

图 1.14 二维概率密度函数

二维概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 的一些性质：

（1） $p(x_1, x_2) > 0$。

（2） $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2=1$。

（3） $dP(x_1, x_2)=p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$。

（4） 对于矩形域 $\Omega(a_1\leqslant X_1\leqslant b_1,\ a_2\leqslant X_2\leqslant b_2)$，$X_1$ 的取值落在区间 a_1 至 b_1，同时 X_2 的取值落在区间 a_2 至 b_2 的概率为

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2。$$

这里 a_1, a_2, b_1, b_2 是实常数。对于非矩形域，积分限中出现 x_1（或 x_2）的函数。

（5）一维概率密度函数实际上是二维概率密度函数的特例：

$$p(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2)\,dx_2;$$

$$p(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2)\,dx_1。$$

二维概率密度函数的量纲是 $\frac{1}{dx_1\cdot dx_2}$ 的量纲。$p(x_1,x_2)$ 只有乘以长、宽分别为 dx_1, dx_2 的矩形面积才能得到概率。二维概率密度函数中密度二字是面密度的意思。

一个随机过程，在任意个不同时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$，对应 n 个随机变量 $X(t_1)$，$X(t_2), \cdots, X(t_n)$，它们组成 n 维随机向量，具有 n 维联合概率分布函数

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathrm{Prob}\,[X(t_1)<x_1,\ X(t_2)<x_2,\cdots,\ X(t_n)<x_n] \tag{1.9}$$

以及 n 维联合概率密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n P(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.10}$$

要研究一个随机过程的全部统计特性，就应该研究该随机过程的一维、二维、……概率密度函数或者概率分布函数。但是，在实际问题中，给出随机过程的多维概率密度函数或者多维概率分布函数太困难，有时甚至不可能。而对于多数实际问题也并不必要。

为了获得随机过程的部分统计特性，我们用一些数字特征来描述随机过程。下面研究其中最基本、最重要的两个数字特征——均值和自相关函数。

（二） 均值和自相关函数

随机过程 $X(t)$ 在 t 时刻的均值 $\mu_X(t)$ 就是概率统计学中的数学期望：

$$\mu_X(t)=E[X(t)] \tag{1.11}$$

具体讲，设随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx$ 绝对收敛：则

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\,dx \tag{1.12}$$

就是 X 的数学期望。所以，随机过程 $X(t)$ 在 t_1 时刻的均值

$$\mu_X(t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1 p(x_1)\,dx_1 \tag{1.13}$$

式中 $p(x_1)$ 是随机变量 $X(t_1)$ 的概率密度函数。均值是随机过程的一阶统计量。

对于全部可能取值是有限个或者是可列无限多个的离散型随机变量，其均值为

$$\mu_X=\lim_{M\to\infty}\sum_{j=1}^{M}x_jP_j \tag{1.14}$$

式中 P_j 是随机变量 X 取值为 x_j 的概率，M 为可能取值的总个数。

这里讨论的均值或数学期望是涉及到随机变量的一切可能的取值，把它称作总体平均或集合平均。它是以概率为权的加权平均，当 P_j 为等概率的特殊情况时

$$P_j=\frac{1}{M},$$

均值
$$\mu_X=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j$$

就是算术平均值。

对于各个样本函数都有等可能性的随机过程，例如图 1.9 所示随机过程，若N个样本函数都具有等可能性，则在 t_1 时刻的均值为

$$\mu_X(t_1)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1) \tag{1.15}$$

式中 $x_i(t_1)$ 为第 i 个样本函数在 t_1 时刻的值。

一个随机过程的自相关函数定义为

$$R_X(t_1,t_1+\tau)=E[X(t_1)X(t_1+\tau)] \tag{1.16}$$

式中 $X(t_1)$和 $X(t_1+\tau)$是随机过程 $X(t)$ 在 t_1 时刻和 $t_1+\tau$ 时刻的两个随机变量，τ 是任意时间间隔。

$E[X(t_1)X(t_1+\tau)]$是$X(t_1)$与 $X(t_1+\tau)$的取值 $x(t_1)$与 $x(t_1+\tau)$之积的总体平均值，即

$$R_X(t_1,t_1+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2)dx_1\,dx_2 \tag{1.17}$$

式中 $p(x_1,x_2)$为随机变量 $X(t_1)$与$X(t_1+\tau)$的二维联合概率密度函数。

若$X(t_1)$与$X(t_1+\tau)$为离散随机变量，则自相关函数为

$$R_X(t_1,t_1+\tau)=\lim_{M\to\infty}\sum_{j=1}^{M}x_j(t_1)\,x_j(t_1+\tau)P_{jj} \tag{1.18}$$

式中 P_{jj} 为 $X(t_1)$ 取值为 $x_j(t_1)$，同时$X(t+\tau)$取值为 $x_j(t_1+\tau)$的概率，M是可能取值的个数。

可见，自相关函数也是以概率为权的一对随机变量$X(t_1)$与$X(t_1+\tau)$的取值的加权平均值，由于是对随机变量的全部可能取值作加权平均，所以也叫做总体平均。

当 P_{jj} 为等概率的特殊情况时，

$$P_{jj}=\frac{1}{M}$$

则自相关函数为

$$R_X(t_1,t_1+\tau)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}x_j(t_1)x_j(t_1+\tau)$$

对于各个样本函数都有等可能性的随机过程，例如图 1.9 所示随机过程若N个样本函数都具有等可能性，则自相关函数为

$$R_X(t_1,t_1+\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)x_i(t_1+\tau) \tag{1.19}$$

式中 $x_i(t_1)$是第 i 个样本函数在 t_1 时刻的值，$x_i(t_1+\tau)$是第 i 个样本函数在 $t_1+\tau$ 时刻的值。

自相关函数描述了随机过程某时刻 t_1 的数据值与另一时刻 $(t_1+\tau)$ 的数据值之间的依赖关系，即描述了随机过程不同时刻之值的相关性。由于随机过程在时刻 t_1 时对应一随机变量

$X(t_1)$，在时刻$(t_1+\tau)$时对应另一随机变量$X(t_1+\tau)$，所以自相关函数是表示这两个随机变量之间的相关性，是描写两个随机变量的成对取值$x_i(t_1)$与$x_i(t_1+\tau)$的总体(指$i=1,2,\cdots N$)之间的关系。

两个随机变量之间的相关性可举下例说明：若随机变量X_1，X_2的成对取值用X_2对X_1的直角坐标图上的点来表示，如图1.15所示，则图1.15(a)显示出X_1与X_2不相关。图1.15(b)表示两个随机变量是相关的，因为X_2的大值与X_1的大值相关联，而X_2的小值与X_1的小值相关联。图1.15(c)表示X_1与X_2精确地线性相关，而图1.15(d)则表示非线性相关。定量描写两个随机变量之间的相关性就要用到相关函数（包括自相关函数和以后要讲到的互相关函数）。当式(1.16)中τ取一定值时，$R_X(t_1,t_1+\tau)$就是一个数值，这个数值就描述了随机变量$X(t_1)$与$X(t_1+\tau)$的相关程度。

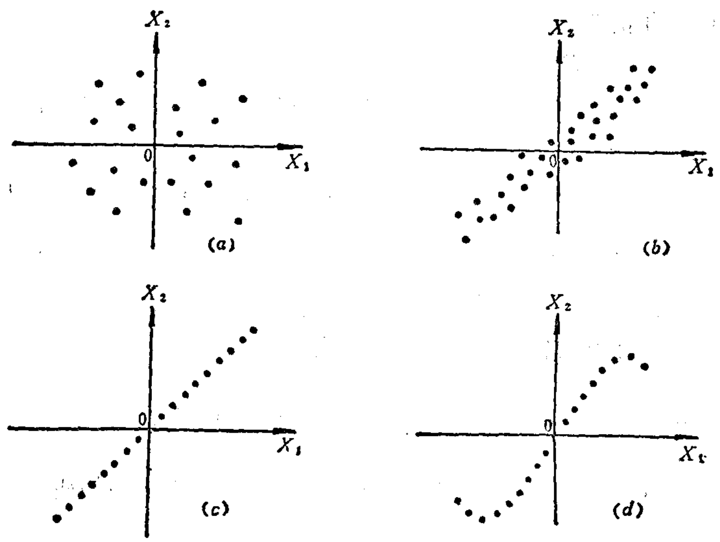

图1.15 两个随机变量之间的相关性

当随机过程各样本函数具有等可能性时，自相关函数是各样本函数t_1时刻和$(t_1+\tau)$时刻的幅值乘积的总体算术平均值。它描述了随机过程的二阶统计性质。

以上所述随机过程的均值和自相关函数是描述随机过程的最重要的统计特性，因为：

（1） 对某些随机过程，如果已知一阶和二阶统计特性，就能计算出高阶统计特性，以后要讲到的所谓高斯随机过程就是这样的。

（2） 对于由一阶和二阶统计量不能计算出高阶统计量的随机过程，根据一、二阶统计量判断其某些特性，往往能近似地代替根据高阶统计量判断同一个随机过程的某些特性。

（3） 从实验数据计算统计特性时，高阶的结果比一、二阶的结果分散，取得精确结果更困难，实际上往往只提供一、二阶统计特性。

（三） 随机过程的分类

随机过程的均值$\mu_X(t_1)$和自相关函数$R_X(t_1,t_1+\tau)$是t_1的函数，这样的随机过程叫做非平稳随机过程。例如前述汽车振动随机过程中，若行驶道路一段是柏油路，一段是砂石路，即得到非平稳随机过程。

假如随机过程的统计特性不随时间变化，就叫做平稳随机过程。即

$$\begin{cases}\mu_X(t)=\mu_X\\ R_X(t,t+\tau)=R_X(\tau),\end{cases}\tag{1.20}$$

只有均值和自相关函数不随时间 t 变化的随机过程叫做弱平稳随机过程。随机过程的全部统计特性，包括高阶统计特性都不随时间变化的，叫做强平稳随机过程。

强平稳随机过程一定是弱平稳的，弱平稳随机过程不一定是强平稳的。但是，在许多实际应用中，已证明过程具有弱平稳性，往往也可假设其为强平稳的。弱平稳与强平稳统称为平稳。

例如某型号汽车从甲地到乙地行驶，道路条件、装载情况和行驶速度都不变，且忽略开车和停车过程，则车身上某点加速度随时间的变化可视为平稳过程。

在实验工作中，往往只讨论一阶和二阶统计特性，所以有时也将弱平稳与平稳二词混用。

在平稳随机过程中，如不作总体平均，而只对某一个（如第 i 个）样本函数求时间平均值和对时间取平均的自相关函数，则

$$\mu_x(i)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)\,dt\tag{1.21}$$

$$R_x(\tau,i)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x_i(t)\,x_i(t+\tau)\,dt\tag{1.22}$$

式中T是样本长度或采样长度。

显然，一般说来当 i 取不同的值时，$\mu_x(i)$和$R_x(\tau,i)$是 i 的函数。

有时说一个样本记录是平稳的是指将该样本记录划分成若干段，在每一段，也就是在不同的时间区间对时间平均所求得的均值和自相关函数都相等。

假如一个平稳随机过程的 $\mu_x(i)$ 和 $R_x(\tau,i)$ 不随 i 而变化，即各个样本函数对时间平均所得的均值和自相关函数都相等，这个平稳过程就叫做弱各态历经过程。

当从各个样本函数对时间平均所得到的所有统计特性，包括高阶统计特性都相等时，这个平稳过程就叫做强各态历经过程。强各态历经过程一定是弱各态历经的，而弱各态历经过程不一定强各态历经。

强各态历经和弱各态历经统称为各态历经。例如上述属于平稳过程的汽车振动的例子，当严格控制每次行驶条件都相同时，就是一个各态历经过程。

与强、弱平稳相互间关系类似，由于在实验工作中往往只讨论随机过程的一阶和二阶统计特性，所以有时也不去区分弱各态历经和各态历经。

综上所述，任意一个各态历经的随机过程，首先必须是平稳的。每个样本函数必须在概率意义上能代表所有其它的样本函数，从而按时间平均时，用任何一个样本函数都可以。

根据定义不难看出，对于各态历经过程

$$\begin{cases}\mu_x(i)=\mu_X\\ R_x(\tau,i)=R_X(\tau)\end{cases}\tag{1.23}$$

式中 μ_X 是随机过程的总体平均值，

$R_X(\tau)$是对总体平均求得的自相关函数。

所以，“各态历经”意味着“时间平均”等于“总体平均”。即由随机过程求得的统计特性与每个样本的统计特性相等，说明一个样本表现出各种状态都经历的特征，有充分的代表性。因此要研究各态历经随机过程就会非常方便，只要有一个样本函数就可以描述整个随机