

# University Physics

## 大学物理学（第二版）上册

主 编 王磊

副主编 聂娅 刘彦允 陈钢 廖志君

高等教育出版社

## >>> 第一章

# … 质点的运动

本章首先介绍了经典时空的概念和描述质点运动的参考系;其后介绍了描述质点运动状态的基本量:位置矢量、速度矢量及加速度矢量,分别在直角坐标系和自然坐标系下给出了质点运动的描述;最后讨论了质点的运动学方程.

运动是物质世界基本的存在方式. 机械运动是最基本、最直观的运动形式,机械运动是其他运动的基础. 力学的任务就是描述和分析宏观物体的机械运动规律,说明定量描述物体运动的方法,研究物体发生各种运动的原因,给出物体运动的普遍物理规律.

机械运动是指宏观物体的空间位置随时间发生改变. 任何物体的运动都是在时间、空间中进行的,空间给出了物体的体积和位置及其变化的概念,反映了物质的广延性,时间反映了物理过程的顺序和持续性. 在经典物理中,空间是均匀、各向同性的,时间是均匀、单向流逝的,空间和时间各自独立地变化.

## § 1.1 质点运动的描述

### 1.1.1 参考系 质点

自然界中的运动是绝对的,而对运动的描述是相对的. 描述物体运动时选作标准的物体称为参考系. 参考系的选择是任意的,选择不同的参考系,对研究对象运动的描述是不同的. 在选定的参考系中,建立适当的时空坐标系,质点的运动便可以定量描述. 本书主要涉及的坐标系为直角坐标系和自然坐标系.

任何物体都有一定的大小和形状,而且物体在运动时,内部各个点的位置变化也各不相同. 在物理上为了便于对物体运动作定量的精确研究,往往把研究对象模型化. 研究物体运动的一个理想化模型是质点. 质点是指其大小和形状均可以忽略的有质量的点. 在两种情形下,物体的运动可当成质点来处理:①当物体做非旋转的平动时,可以用一个点代表整个物体的运动情况;②当物体的几何尺寸与所关注的空间尺度相比很小时,可将整个物体看成一点来处理. 一个物体可否抽象为一个质点,应当根据问题的实际情况而定. 例如研究星体在太空中相对于太阳的运动时,星体可视为质点;而讨论星体的自转运动形态时,星体就不能视作质点,必须考虑物体的质量分布和方位了.

### 1.1.2 位置矢量 位移

#### 一、位置矢量 质点的运动方程

为描述质点在  $t$  时刻的空间位置,首先应在参考系中建立适当的坐标系. 在如图 1.1-1 的直角坐标系中,从坐标系原点  $O$  到  $t$  时刻质点位置  $P$  引出的矢量  $\boldsymbol{r}$ ,称为  $P$  点的位置矢量,简称位矢或径矢.

当质点运动时,位矢  $\boldsymbol{r}$  是时间  $t$  的函数,可表示为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t) \quad (1.1-1)$$

上式称为质点的运动方程,其直角坐标分量为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \quad (1.1-2)$$

质点在空间所经历的路径称为轨道. 质点的运动轨道是直线时,称为直线运动;质点的运动轨道是曲线时,称为曲线运动. (1.1-2)式是轨道参数方程,消去时间  $t$  后得到质点运动的轨道方程:

$$f(x, y, z)=C$$

另一方面,质点的运动可视为沿直角坐标轴的三个分运动的合成,有

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k} \quad (1.1-3)$$

位矢  $\mathbf{r}$  的大小为

$$r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (1.1-4)$$

$\mathbf{r}$  与  $x, y, z$  三个坐标轴的夹角称为方位角,如图 1.1-1 中的  $\alpha, \beta, \gamma$ ,故  $\mathbf{r}$  的方向可由方位角的余弦(方向余弦)来确定:

$$\cos \alpha=\frac{x}{|\mathbf{r}|}, \cos \beta=\frac{y}{|\mathbf{r}|}, \cos \gamma=\frac{z}{|\mathbf{r}|} \quad (1.1-5)$$

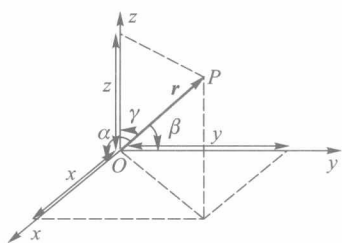


图 1.1-1 质点的位置矢量

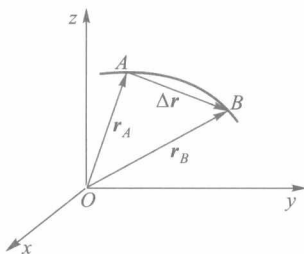


图 1.1-2 质点的位移

## 二、位移

设质点沿轨道  $AB$  做曲线运动,如图 1.1-2 所示. 在时刻  $t_1$ ,质点在  $A$  处,其位矢为  $\mathbf{r}_A$ ;在时刻  $t_2$ ,质点运动到  $B$  处,其位矢为  $\mathbf{r}_B$ . 于是,质点在时间间隔  $\Delta t=t_2-t_1$  内的位置变化,可以用从  $A$  到  $B$  的矢量  $\Delta \mathbf{r}$  来表示,即

$$\Delta \mathbf{r}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A \quad (1.1-6)$$

$\Delta \mathbf{r}$  称为位移,它是位矢  $\mathbf{r}$  的增量.  $\Delta \mathbf{r}$  与参考点  $O$  的选择无关. 在直角坐标系中,位移可写为

$$\Delta \mathbf{r}=(x_B-x_A)\mathbf{i}+(y_B-y_A)\mathbf{j}+(z_B-z_A)\mathbf{k} \quad (1.1-7)$$

位移  $\Delta \mathbf{r}$  反映的是质点在时间  $\Delta t$  内位置的变化,不代表质点在该段时间内的实际路程,因此位移和路程是两个完全不同的概念. 用  $\Delta s=\widehat{AB}$  表示在  $\Delta t$  时间内质点沿轨迹所走过的路程,一般情况下  $\Delta s \neq |\Delta \mathbf{r}|$ . 当一质点经历一个闭合路径回到原来的初始位置,其位移为零,而路程却不为零,即  $|\Delta \mathbf{r}|=0, \Delta s \neq 0$ . 只有在  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限情况下,元位移的大小  $|\mathrm{d}\mathbf{r}|$  才等于元路程  $\mathrm{d}s$ .



思考题 1.1  
根据速度和速度大小的定义  
 $v = \frac{dr}{dt}$  和  $|v| = \left| \frac{dr}{dt} \right|$ , 速度能说是位移对时间的一阶导数吗? 速度的大小能写成  $|v| = \left| \frac{dr}{dt} \right|$  吗?

### 1.1.3 速度 速率

在图 1.1-3 中,若质点在  $\Delta t$  时间内,完成了位移  $\Delta r$ ,那么为了说明质点位置改变的快慢和方向,需考察质点的位移  $\Delta r$  与经过的时间  $\Delta t$  的比值  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ . 定义质点的位矢在  $\Delta t$  时间内的平均变化率为平均速度  $\bar{v}$ ,即

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1.1-8)$$

平均速度是矢量,其方向与位移方向一致. 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,得到平均速度的极限—— $t$  时刻的瞬时速度,简称速度,表示为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad (1.1-9)$$

速度  $v$  是位矢  $r$  的时间变化率,是既有大小又有方向的矢量,即速度  $v$  等于位矢  $r$  对时间的一阶导数;速度的方向为  $\Delta t \rightarrow 0$  时位移  $\Delta r$  的极限方向,即沿运动轨道的切线方向指向运动的前方,如图 1.1-3 所示.

由(1.1-3)式和(1.1-9)式,可知在直角坐标系中,质点的速度  $v$  可以表示为

$$v = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \quad (1.1-10)$$

可以认为,速度矢量  $v$  可以分解为三个速度分量  $v_x, v_y, v_z$ ,有

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$$

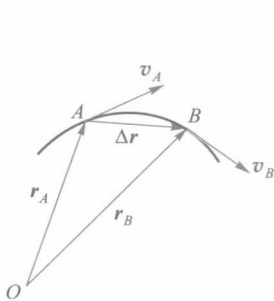


图 1.1-3 质点的速度

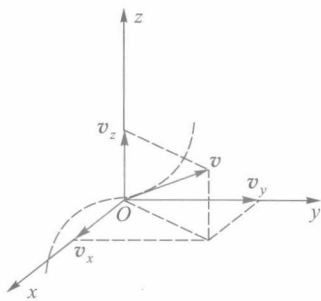


图 1.1-4 速度的分解

也可以认为,速度矢量  $v$  是沿  $x, y, z$  三个坐标轴方向的速度分量  $v_x, v_y, v_z$  的合成,如图 1.1-4 所示,即

$$v = v_x i + v_y j + v_z k \quad (1.1-11)$$

速度的大小为

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.1-12)$$

在国际单位制(SI)中,速度的单位为 m/s.

常用速率描述质点运动的快慢,速率为一个标量,定义为单位时间内质点所经

历的路程,即

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.1-13)$$

速率  $v$  等于路程  $s$  对时间的一阶导数. 在  $\Delta t \rightarrow 0$  的情况下, 路程  $\Delta s$  的元路程  $ds = |d\mathbf{r}|$ , 于是速率为速度的大小, 即

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

#### 1.1.4 加速度

质点做曲线运动的过程中, 速度的大小和方向随时间在改变, 速度的变化情况用加速度表示. 如图 1.1-5 所示, 时刻  $t$ , 质点在  $A$  处, 其速度为  $\mathbf{v}_A$ ; 时刻  $t + \Delta t$ , 质点运动到  $B$  处, 其速度为  $\mathbf{v}_B$ . 速度矢量的变化为  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ . 那么, 质点在时间间隔  $\Delta t$  内, 速度的平均变化率为平均加速度, 即

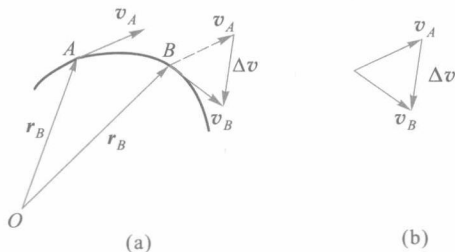


图 1.1-5 质点速度的改变

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1.1-14)$$

在  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 平均加速度的极限为质点在时刻  $t$  或某位置的瞬时加速度, 它精确地描述质点在任意时刻(或位置)的速度变化率, 等于速度  $\mathbf{v}$  对时间的一阶导数:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.1-15)$$

或等于位矢  $\mathbf{r}$  对时间的二阶导数:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.1-16)$$

加速度是矢量, 其方向就是  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 速度增量  $\Delta \mathbf{v}$  的极限方向.

在直角坐标系中, 加速度的三个分量  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  分别是

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.1-17)$$



思考题 1.2

行星绕太阳做逆时针运动, 运动的轨道是一个椭圆, 太阳处于椭圆的一个焦点上如图所示, 分析图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的速度和加速度的关系, 你如何理解速度和加速度的关系?

加速度矢量可以写作

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k} = \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt} \boldsymbol{k} \quad (1.1-18)$$

加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.1-19)$$

在国际单位制中,加速度的单位为  $\text{m/s}^2$ .

**例 1.1-1** 一质点的运动方程可表示为  $\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{i} + (6-2t^2)\boldsymbol{j}$  (SI 单位), 求:

- (1)  $t=0$  和  $t=2\text{ s}$  时质点的速度和加速度;
- (2) 该质点的运动轨迹.

**解:** (1) 由运动方程  $\boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{i} + (6-2t^2)\boldsymbol{j}$  可得速度与加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt} \boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \boldsymbol{j} = -4\boldsymbol{j}$$

将  $t=0$  和  $t=2$  分别代入上式有

$$\boldsymbol{v} \Big|_{t=0\text{ s}} = 3\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{v} \Big|_{t=2\text{ s}} = 3\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} \Big|_{t=0\text{ s}} = -4\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{a} \Big|_{t=2\text{ s}} = -4\boldsymbol{j}$$

- (2) 由已知可得运动方程的分量式为

$$x(t) = 3t$$

$$y(t) = 6 - 2t^2$$

消去运动方程中的参数  $t$ , 得轨道方程:  $9y = -2x^2 + 54$ .

## § 1.2 质点运动的合成与分解

实验事实表明,若质点同时参与两个或两个以上的运动时,其总的运动效果是由各个分运动的合成得到的,各个分运动彼此独立,互不干扰.这就是质点运动的叠加原理.该原理说明了质点运动的独立性和可叠加性.反过来,质点的运动,特别是较为复杂的运动,分析时可以按实际情况将其分解为几个分运动.运动的合成与分解遵从矢量合成法则.

### 1.2.1 直线运动

当质点的运动只在一条直线上,这个运动只涉及一个维度的空间变化,运动的量均能在—维坐标上以标量表示其大小和变化.假设运动直线与  $x$  轴重合,选定坐标原点  $O$ ,—维运动的运动方程为

$$x = x(t) \quad (1.2-1)$$

瞬时速度和瞬时加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (1.2-2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.2-3)$$

其正负分别表明指向  $x$  轴的正方向和负方向. 在直线运动中, 从质点位置  $x$  随时间  $t$  的函数变化关系, 可得到质点的速度和加速度.

若质点以恒定加速度  $a$  做直线运动, 由 (1.2-3) 式可以得到

$$dv = a dt$$

假设在  $t=0$  时刻, 质点的位置为  $x_0$ , 质点的速度为  $v_0$ ; 在任一时刻  $t$ , 质点的位置为  $x$ , 质点的速度为  $v$ , 那么将上式积分:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

有

$$v - v_0 = at \quad \text{或} \quad v = v_0 + at$$

由 (1.2-2) 式有

$$dx = v dt$$

从  $t=0$  到时刻  $t$  的一段有限长的时间间隔内, 质点的位移为

$$x - x_0 = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

故

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

或

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

从而得到匀加速直线运动的位置  $x$  与时间  $t$  的关系, 此即匀加速直线运动的运动方程.

再由 (1.2-3) 式, 有

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

则有

$$v dv = a dx$$

对等式两端积分

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

得匀加速直线运动质点的位置与速度的关系式为

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0) \quad \text{或} \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$



## 1.2.2 抛体运动

从地面上某点以一定的抛射角  $\theta$  和初速度  $v_0$  向空中抛出一个物体,它在空中的运动就叫抛体运动. 抛体运动是最常见的一种平面曲线运动. 在地球表面附近不太大的范围内,抛体的重力加速度  $g$  可视为常量. 在研究抛体运动时,忽略风和阻力的影响.

通常选取抛射点为坐标原点,以抛射时刻为计时起点,沿水平方向和竖直方向分别引  $x$ 、 $y$  轴,如图 1.2-1 所示.  $t=0$  时刻物体位于坐标原点.

抛体运动可以分解为沿  $x$  轴方向的匀速运动,和沿  $y$  轴方向以  $-g$  为加速度的匀加速运动,即

$$a_x=0, \quad a_y=-g$$

或

$$\mathbf{a}=\mathbf{g}=-g\mathbf{j} \quad (1.2-4)$$

在  $t=0$  时刻,有

$$x_0=0, \quad v_{x0}=v_0 \cos \theta$$

$$y_0=0, \quad v_{y0}=v_0 \sin \theta$$

在  $t$  时刻,速度的两个分量为

$$v_x=v_0 \cos \theta, \quad v_y=v_0 \sin \theta - gt$$

或

$$\mathbf{v}=(v_0 \cos \theta)\mathbf{i}+(v_0 \sin \theta - gt)\mathbf{j} \quad (1.2-5)$$

物体的位矢为

$$x=\int_0^t v_x dt=(v_0 \cos \theta)t, \quad y=\int_0^t v_y dt=(v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.2-6)$$

则物体的坐标为

$$x=(v_0 \cos \theta)t, \quad y=(v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.2-7)$$

将(1.2-6)式改写为

$$\mathbf{r}=(v_0 t \cos \theta)\mathbf{i}+(v_0 t \sin \theta)\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}$$

将初速度矢量  $\mathbf{v}_0=v_0 \cos \theta \mathbf{i}+v_0 \sin \theta \mathbf{j}$  和重力加速度矢量  $\mathbf{g}=-g\mathbf{j}$  代入上式,得

$$\mathbf{r}=\mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \quad (1.2-8)$$

说明抛体运动还可以看作由沿初速度方向的匀速运动和竖直方向的自由落体运动叠加而成,如图 1.2-2 所示.

在(1.2-7)式中消去时间  $t$ ,得抛体运动的轨迹方程:

$$y=x \tan \theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad (1.2-9)$$

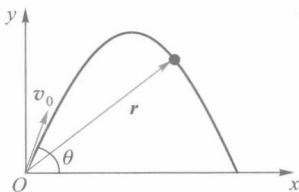


图 1.2-1 抛体的运动

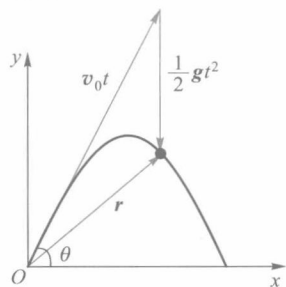


图 1.2-2 抛体运动的合成

这是一条抛物线轨道. 在轨道的最高点, 由  $v_y = 0$  可得  $t = v_0 \sin \theta / g$ , 因此抛体所能达到的最大高度(射高)为

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (1.2-10)$$

在抛体的落地点, 由  $y = 0$  可得  $t = 2v_0 \sin \theta / g$ , 称为飞行时间, 因此抛体所能达到的水平最远距离(射程)为

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (1.2-11)$$

可见, 当  $\theta = 90^\circ$  时, 抛体运动有最大的射高, 当  $\theta = 45^\circ$  时, 抛体运动有最大的射程.

按照初始速度矢量  $v_0$  的方向, 即根据抛射角  $\theta$  的大小, 可以将抛体运动分为平抛 ( $\theta = 0$ )、斜上抛 ( $0 < \theta < 90^\circ$ )、斜下抛 ( $-90^\circ < \theta < 0$ )、竖直上抛 ( $\theta = 90^\circ$ ) 和竖直下抛 ( $\theta = -90^\circ$ ) 运动. 研究抛体问题时, 只要知道初始速度  $v_0$  及抛射角  $\theta$ , 在适当的坐标系下, 抛体运动可完全求解. 在实际抛体问题中, 还要考虑空气阻力、风速、风向等的影响.

**例 1.2-1** 如图 1.2-3 所示, 直杆  $AB$  两端可以分别在两固定且相互垂直的直线导槽上滑动. 已知杆的倾角  $\varphi$  按  $\varphi = \omega t$  随时间变化, 其中  $\omega$  为常量. 试求杆上任意点  $M$  的运动方程和轨道方程.

**解:** 沿直线导槽建立直角坐标系  $Oxy$ , 如图所示, 设  $|AM| = a$ ,  $|BM| = b$ , 则  $M$  点的坐标为

$$x = a \cos \varphi = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin \varphi = b \sin \omega t$$

这就是在直角坐标系中  $M$  点的分运动表达式.

从坐标原点  $O$  向  $M$  点作位置矢量  $\mathbf{r}$ , 则有

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$$

这就是  $M$  点的运动方程.

利用分运动式, 消去时间  $t$ , 可得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

此式表示  $M$  点的运动轨迹是一个椭圆, 其中心在坐标原点  $O$ , 半轴长度分别为  $a$ 、 $b$ . 常见的椭圆规就是依此原理制成的.

**例 1.2-2** 路灯距地面高为  $h$ , 身高为  $l$  的人以匀速  $v_0$  在路上行走, 求灯所照射的人影中头顶移动的速度.

**解:** 设  $t = 0$  时人恰好在灯下, 取此处为坐标原点  $O$ , 以人运动所沿直线为  $x$  轴. 如图 1.2-4 所示, 设任意时刻人影中头的坐标为  $x_2$ , 足的坐标为  $x_1$ , 利用右图中相似三角形的性质, 有

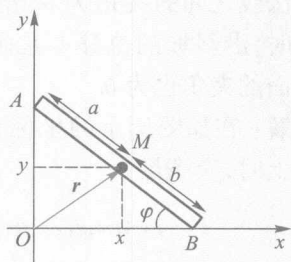


图 1.2-3 例题 1.2-1 图

$$\frac{l}{h} = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$$

由于人匀速走动,故足的坐标满足  $x_1 = v_0 t$ ,代入上式可得

$$x_2 = \frac{h}{h-l} v_0 t$$

根据定义,人影中头顶移动的速度为

$$v = \frac{dx_2}{dt} = \frac{h}{h-l} v_0$$

表明人影中头顶在做匀速运动.

注意:本题求速度时不是直接从已知速度推出未知速度,而是从几何关系中找到坐标之间的关系,然后求导数就可求出速度.

**例 1.2-3** 如图 1.2-5 所示,一小球在斜坡上被抛出,已知出手速度为  $v$ ,与斜坡法线之间的夹角为  $\theta$ . 试求当小球落到斜坡上时,沿斜坡的位移  $L$  是多大? 已知斜坡与水平面的夹角也为  $\theta$ .

解:在如图所示的坐标系中,当小球落到斜坡上时,应满足

$$y=0 = vt \cos \theta - \frac{1}{2} g \cos \theta \cdot t^2$$

于是  $t = 2v/g$ ,故小球沿斜坡的位移  $L$  为

$$L = x = vt \sin \theta + \frac{1}{2} g \sin \theta \cdot t^2 = \frac{4v^2}{g} \sin \theta$$

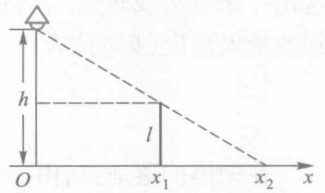


图 1.2-4 例题 1.2-2 图

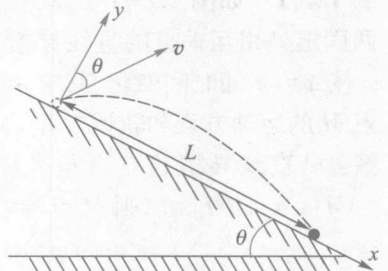


图 1.2-5 例题 1.2-3 图

## § 1.3 给定轨道的平面曲线运动

### 1.3.1 自然坐标 切向加速度和法向加速度

自然坐标系常用来描述轨迹已知的平面曲线运动.如图 1.3-1 所示,首先选定轨迹上任一点  $O$  为原点,质点的位置用从  $O$  点开始计量轨迹的长度  $s$  来描述.沿轨道运动的质点,其速率为  $v = \frac{ds}{dt}$ .质点的速度和加速度的方向由两个依赖于质点位置的单位矢量确定,一是过该点沿轨迹切线方向的切向单位矢量  $e_t$ ,另一个是过该点与切线正交

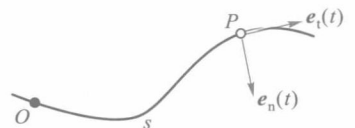


图 1.3-1 在自然坐标系中表示质点的平面曲线运动

并指向轨迹曲线凹侧的法向单位矢量  $e_n$ .  $e_t$  和  $e_n$  的方向彼此正交, 但指向一般随时间和位置而变化. 这种描述质点运动的方法称为自然坐标系法.

质点沿轨道运动的速度方向由质点所在处轨迹的切线方向  $e_t$  决定, 即

$$\boldsymbol{v} = v e_t = \frac{ds}{dt} e_t \quad (1.3-1)$$

在自然坐标系中, 质点运动的速度  $\boldsymbol{v}$  只有切向分量.

质点加速度  $\boldsymbol{a}$  在自然坐标系中应为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v e_t)}{dt} \quad (1.3-2)$$

一般的平面曲线运动, 可以分解为一系列无穷小的圆弧运动. 为了表示曲线  $A$  点的弯曲程度, 可以将  $A$  点附近无穷小曲线逼近成为无穷小的圆段, 相应的这个圆称为  $A$  点的曲率圆, 其半径称为  $A$  点的曲率半径, 用  $\rho$  表示, 如图 1.3-2 所示.

对应于圆心角  $d\varphi$  的曲线元弧长为  $ds$ , 曲率圆的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \quad (1.3-3)$$

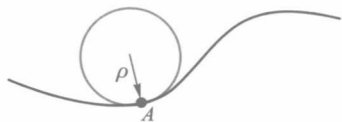


图 1.3-2  $A$  点的曲率圆

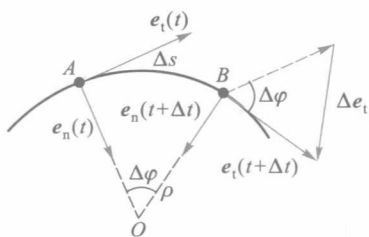


图 1.3-3 自然坐标系中切向单位矢量的增量关系

如图 1.3-3 所示, 当质点从  $A$  点沿平面曲线轨道运动到  $B$  点时,  $\Delta\varphi$  表示  $e_t$  和  $e_n$  转过的角度. 当  $\Delta t$  很小时,  $B$  点接近  $A$  点,  $\Delta\varphi$  很小, 有

$$|\Delta e_t| = |e_t| \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $|de_t| = d\varphi$ , 且由于  $d\varphi \rightarrow 0$ , 故  $de_t$  沿  $e_n$  方向, 于是有

$$de_t = d\varphi e_n \quad (1.3-4)$$

由 (1.3-2) 式, 质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} e_t + v \frac{de_t}{dt}$$

将式 (1.3-4) 代入上式得

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} e_t + v \frac{d\varphi}{dt} e_n$$

又由 (1.3-3) 式, 有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} v$$



## 思考题 1.3

一质点以速度  $v_0$  与水平面的夹角  $\theta$  做斜上抛运动, 其运动轨迹是一条抛物线, 那么在最高点处轨迹的曲率半径能否用物理方法求出?

于是

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{e}_n = a_t \boldsymbol{e}_t + a_n \boldsymbol{e}_n \quad (1.3-5)$$

质点做轨道一定的平面曲线运动时, 在自然坐标系中, 加速度  $\boldsymbol{a}$  可以分解为切向加速度  $a_t$  和法向加速度  $a_n$ .  $a_t$  的大小为速率随时间的变化率, 方向沿轨迹切向, 反映速度大小的变化;  $a_n$  的方向沿法向, 反映速度方向的变化, 具体表达式如下:

$$a_t = a_t \boldsymbol{e}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t, \quad a_n = a_n \boldsymbol{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{e}_n \quad (1.3-6)$$

加速度的大小和方向分别为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1.3-7)$$

$$\tan \theta = \frac{a_n}{a_t} \quad (1.3-8)$$

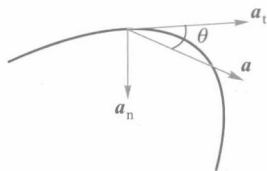


图 1.3-4 切向加速度和法向加速度

$\theta$  表示加速度与速度 (轨道切线方向) 的夹角, 如图 1.3-4 所示.

**例 1.3-1** 一物体做初速度为  $v_0 = 26.8 \text{ m/s}$ 、抛射角为  $\theta_0 = 60^\circ$  的斜上抛运动. 经过 1 s 后, 其速度与水平方向夹角为多少? 其所在位置的曲率半径为多大?

**解:**  $x$  方向质点的速度始终为

$$v_x = v_0 \cos 60^\circ = \frac{26.8}{2} \text{ m/s} = 13.4 \text{ m/s}$$

$y$  方向质点的速度变化关系为

$$v_y = v_0 \sin 60^\circ - gt$$

将  $t = 1 \text{ s}$  代入, 得

$$v_{y1} = v_0 \sin 60^\circ - g = (26.8 \times 0.866 - 9.8) \text{ m/s} = 13.4 \text{ m/s}$$

由  $v_x = v_{y1}$  可知, 此时质点的速度方向与水平方向的夹角为  $45^\circ$ , 如图 1.3-5 所示. 在自然坐标系中, 质点做抛体运动的法向加速度由重力加速度的轨道法向分量提供, 即

$$a_n = g \cos 45^\circ$$

$t = 1 \text{ s}$  时, 速度的大小为

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_{y1}^2} = (\sqrt{13.4^2 + 13.4^2}) \text{ m/s} = 18.95 \text{ m/s}$$

轨道上该点的曲率半径为

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_n} = \frac{v_1^2}{g \cos 45^\circ} = \frac{359.12}{6.93} \text{ m} = 51.82 \text{ m}$$

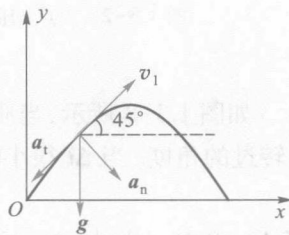


图 1.3-5 例题 1.3-1 图

## 1.3.2 圆周运动

## 一、圆周运动的角量描述

曲率中心和曲率半径始终不变的平面曲线运动即为圆周运动. 质点在  $Oxy$  平面内以  $O$  点为圆心做半径为  $r$  的圆周运动. 以  $Ox$  轴为参考轴, 圆心到质点  $A$  的位矢与  $Ox$  轴之间的夹角为质点的角位置  $\theta$ , 如图 1.3-6 所示. 质点的角位置  $\theta$  随时间变化的规律即为做圆周运动质点的角运动方程:

$$\theta = \theta(t) \quad (1.3-9)$$

角速度为角位置对时间的一阶导数:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.3-10)$$

角速度可以定义为矢量:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \quad (1.3-11)$$

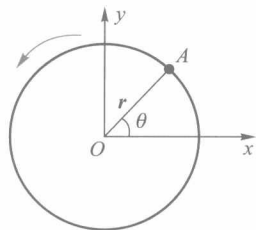


图 1.3-6 圆周运动



图 1.3-7 角速度的方向

角速度具有正负, 规定角速度矢量方向与质点做圆周运动的绕向满足右手螺旋定则, 如图 1.3-7 所示, 其大小为描述质点做圆周运动时转动的快慢.

如果质点做变角速度圆周运动, 定义角速度对时间的变化率为角加速度, 表示为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1.3-12)$$

在国际单位制中, 角位置的单位为弧度, 符号为 rad, 角速度的单位为弧度每秒, 符号为 rad/s, 角加速度的单位为弧度每二次方秒, 符号为  $\text{rad/s}^2$ .

当  $\alpha = 0$  时, 质点做匀角速度圆周运动, 简称匀速圆周运动, 此时  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  为匀速圆周运动的周期. 当  $\alpha$  是常量时, 质点做匀加速圆周运动. 若  $t = 0$  时  $\omega(0) = \omega_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ , 则在任一时刻  $t$ , 有

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (1.3-13)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (1.3-14)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \quad (1.3-15)$$

## 二、圆周运动的线量描述

质点做圆周运动时,其速度沿圆周的切向,称为线速度,表示为

$$\boldsymbol{v} = v \boldsymbol{e}_t = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{e}_t \quad (1.3-16)$$

其加速度表示为

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{r} \boldsymbol{e}_n \quad (1.3-17)$$

其中,  $\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t$  为切向加速度,  $\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r} \boldsymbol{e}_n$  为法向加速度,  $r$  为圆周半径.

## 三、线量与角量的关系

质点运动的位置由轨道长度  $s$  表示:

$$s = r\theta \quad (1.3-18)$$

根据角速度的定义,质点的速率与角速度的关系为

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad (1.3-19)$$

此外,根据角加速度的定义,可以得到质点的加速度与角加速度、角速度的关系为

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha \quad (1.3-20)$$

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad (1.3-21)$$

**例 1.3-2** 汽车在半径为 200 m 的圆弧形公路上刹车,刹车开始阶段的路程随时间的变化关系为  $s = 20t - 0.2t^3$  (SI 单位),求汽车在  $t = 1$  s 时的加速度.

**解:** 加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{e}_n$$

由已知条件求得速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 0.6t^2$$

则

$$a_n = \frac{(20 - 0.6 \times 1^2)^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = -1.2t$$

将  $\rho = 200$  m 及  $t = 1$  s 代入上列各式,得

$$v = (20 - 0.6 \times 1^2) \text{ m/s} = 19.4 \text{ m/s}$$

$$a_n = \frac{19.4^2}{200} \text{ m/s}^2 \approx 1.88 \text{ m/s}^2, \quad a_t = -1.2 \times 1 \text{ m/s}^2 = -1.2 \text{ m/s}^2$$

则

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1.88^2 + (-1.2)^2} \text{ m/s}^2 \approx 2.23 \text{ m/s}^2$$

$$\tan \varphi = \frac{a_n}{a_t} \approx \frac{1.88}{-1.2} = -1.5667$$

于是  $\varphi \approx 122^\circ 33'$ ,  $\varphi$  为加速度与切向方向  $e_t$  的夹角.



#### 思考题 1.4

考虑到地球的自转运动,有人说白天地面上物体的运动速率比夜里小,这种说法对吗,为什么?

## § 1.4 相对运动

质点运动本身是客观的,对运动的描述是相对于确定参考系而言的. 从两个相对运动的参考系上描述同一质点的运动,将得到不同的描述,这就是运动描述的相对性. 如两个相对平动的惯性参考系  $S$  和  $S'$ , 对质点  $P$  的运动,将分别给出不同的描述.

在  $S$  和  $S'$  系中,时间和空间的测量都是相同的,与参考系无关,称为时空的绝对性.  $t=0$  时刻两参考系的原点  $O$  和  $O'$  重合,  $S$  和  $S'$  系的相应坐标轴分别平行,称  $S$  系为静系,  $S'$  系为动系. 如图 1.4-1 所示,在任一时刻  $t$ ,  $S'$  系相对  $S$  系的速度为  $u$ . 物体在  $S$  系的位矢为  $r$ , 在  $S'$  系中的位矢为  $r'$ ,  $O'$  在  $S$  系的位矢为  $r_0$ .

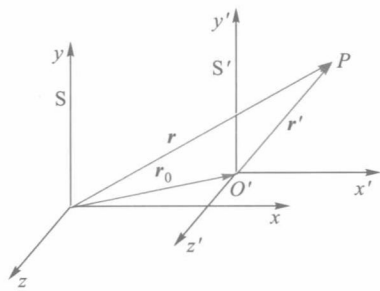


图 1.4-1 质点  $P$  相对于  $S$  和  $S'$  系的运动

质点  $P$  在  $S$  和  $S'$  系中的位矢之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} r' &= r - r_0 \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (1.4-1)$$

由于  $t'=t$ , 可将 (1.4-1) 式对时间  $t$  求一阶导数, 有

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{dr_0}{dt} \quad (1.4-2)$$

其中  $\frac{dr'}{dt} = v'$  为质点相对于  $S'$  系的速度, 称为相对速度,  $\frac{dr}{dt} = v$  为质点相对于  $S$  系的速度, 称为绝对速度,  $\frac{dr_0}{dt} = u$  为动系  $S'$  相对于静系  $S$  的速度, 也称牵连速度. 于是得到质点  $P$  在  $S$  系与  $S'$  系中的速度变换关系:

$$v' = v - u \quad (1.4-3)$$

它们之间满足矢量叠加关系. 不同参考系间的速度变换关系是经典时空观的实验基础. 对于高速的物理过程, 这个速度变换关系不成立, 其变换关系遵从爱因斯坦相对论的时空观.

对 (1.4-3) 式求时间的一阶导数, 得到质点  $P$  相对于两个参考系的加速度变换为

$$a' = a - a_0 \quad (1.4-4)$$

$a$  是质点相对于  $S$  系的加速度,  $a'$  是质点相对于  $S'$  系的加速度,  $a_0$  为  $S'$  系相对  $S$  系



的加速度,它们之间满足矢量叠加关系.当S系相对于S'系做匀速直线运动时, $a_0=0$ ,则

$$a' = a \quad (1.4-5)$$

质点的加速度相对于做匀速直线运动的参考系是个绝对量.

**例 1.4-1** 下雨天一辆汽车在平直的路上以 30 m/s 的速度向东行驶,雨滴在空中以 15 m/s 的速度竖直下落,求车厢中的人看到的雨的速度是多少?

**解:** 研究对象为雨滴,设雨滴相对于地面的速度为  $v$  (相对静系的速度),相对于汽车的速度为  $v'$  (相对动系的速度),车相对于地面的速度为  $u$  (牵连速度),三者的速度关系如图 1.4-2 所示.据(1.4-3)式,有  $v' = v - u$ ,故

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{15^2 + 30^2} \text{ m/s} = 33.5 \text{ m/s}$$

汽车中的人看到雨滴与水平方向的夹角为  $\theta$

$$\tan \theta = \frac{v}{u} = 0.5$$

于是

$$\theta = \arctan 0.5 = 26.57^\circ = 26^\circ 34'$$

故雨滴相对车运动方向为南偏西  $64^\circ 26'$ .

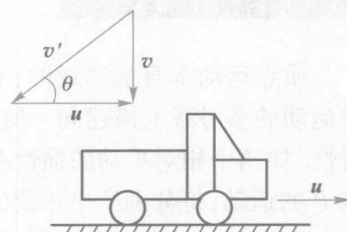


图 1.4-2 例题 1.4-1 图

**例 1.4-2** 一人骑自行车沿直线前进,当速率为  $v_0$  时,看见雨滴竖直落下;当他的速率增加一倍,为  $2v_0$  时,看见雨滴向后倾斜,与竖直方向成  $\alpha = 45^\circ$ . 求雨滴的速度及方向.

**解:** 本问题中,涉及骑车人、雨滴和地面的相对运动.雨滴是研究对象,雨滴的速度随人的运动而变,骑车人便作为运动参考系——动系,地面是静系.

用  $v'$  表示雨滴相对于人的速度, $v$  表示雨滴相对于地面的速度,骑车人对地的速度为  $v_0$ ,有

$$v = v' + v_0$$

图 1.4-3 所示为速度的矢量合成图,图(a)和图(b)分别对应两次看到雨滴速度的情形.

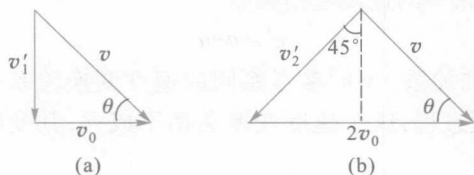


图 1.4-3 例题 1.4-2 图

从图(a)可以得到

$$v = v_1 + v_0$$