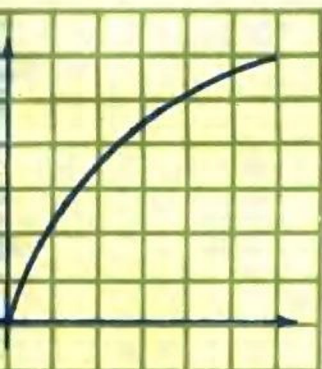


高等学校教学用书

非线性电路理论与分析



宋亚民 编著

北京邮电学院出版社

内 容 简 介

本书是一本介绍非线性电路基本理论与分析方法的教材。全书分五章：电路的代数元件，非线性电阻电路，非线性电阻电路的分段线性分析，非线性动态电路，弱非线性动态电路的沃尔泰拉级数分析。主要内容有代数元件的分类与性质，电阻电路和动态电路的性质，方程的列写与求解算法，电阻电路的分段线性模型与算法，沃尔泰拉级数，非线性传递函数的生成算法。

本书要求读者有电路分析、信号分析和线性代数基础。

本书可作为本科高年级和研究生非线性电路课的教材，也可供电气工程、通信、电子和自控专业的教师、科技工作者和工程技术人员参考。

非线性电路理论与分析

编 著 宋 亚 民

责任编辑 杨 自 辰

*

北京邮电学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

*

850×1168毫米 1/32 印张 11.5 字数 297 千字

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

印数：1—3500册

ISBN 7-5635-0022-7/TM·2 定价：2.75元

前 言

非线性电路理论与分析是信号、电路与系统专业的一门重要课程。随着新型器件的不断出现，微电子与集成电路技术的发展，以及电子计算机在电子系统设计领域中的广泛应用，非线性电路理论越来越显示出它的重要性，并日益受到重视，国内外已有不少大学开设此类课程。本书就是为适应这种需要而编写的。

作者从1981年开始先后为研究生和本科高年级讲授非线性电路课程。本书是在多年从事本课程的教学实践基础上编写而成。全书共分五章。第一章是电路的代数元件，介绍二端代数元件和代数 n 端口的定义、分类、表示式、性质和基本定理。该章还介绍了几种线性变换电路。第二章是非线性电阻电路，介绍电阻电路方程的列写方法，解的存在和唯一性问题，非线性代数方程的迭代算法以及策动点特性和转移特性的基本算法。第三章是非线性电阻电路的分段线性分析，介绍标准分段线性模型与算法，状态模型与算法和规范型模型与算法。第四章是非线性动态电路，介绍标准状态方程的列写与存在性，解的存在和唯一性问题，自治电路的平衡点和稳定性，还扼要介绍一阶和二阶自治电路的性质，此外还介绍了非线性微分方程的数值解以及动态 n 端口。第五章是弱非线性动态电路的沃尔泰拉级数分析，介绍动态非线性电路的输入—输出的时域和复频域表示，电路元件的非线性增量模型和方程的列写，非线性传递函数及其生成算法。

本书每章后附有习题，供学习参考。本书作为研究生教材，大约50学时可以授完。

由于水平所限，错误和不妥之处请读者批评和指正。

编著者

1988年9月

于北京邮电学院

目 录

第一章 电路的代数元件

- 1—1 电路的基本物理量与模型..... (1)
- 1—2 二端代数元件..... (5)
- 1—3 多端代数元件..... (16)
- 1—4 线性变换电路..... (52)
- 习 题..... (68)

第二章 非线性电阻电路

- 2—1 方程的列写..... (71)
- 2—2 晶体管电路的 DC 方程..... (89)
- 2—3 电路方程解的存在和唯一性..... (96)
- 2—4 方程的数值解法..... (107)
- 2—5 策动点特性图和转移特性图..... (115)
- 习 题..... (124)

第三章 非线性电阻电路的分段线性分析

- 3—1 分段线性标准模型与算法..... (126)
- 3—2 分段线性状态模型与算法..... (140)
- 3—3 分段线性规范型模型与算法..... (173)
- 习 题..... (300)

第四章 非线性动态电路

- 4—1 标准状态方程..... (202)
- 4—2 解的存在性及其状态空间轨道的表示..... (217)
- 4—3 自治电路的稳定性..... (233)
- 4—4 一阶和二阶自治电路解的性质..... (246)
- 4—5 动态 n 端口..... (260)

4—6 标准状态方程的数值解法.....	(268)
习 题.....	(273)
第五章 弱非线性动态电路的沃尔泰拉级数分析	
5—1 输入—输出的时域模型.....	(275)
5—2 输入—输出的复频域模型.....	(289)
5—3 非线性电路元件的增量模型和电路方程.....	(309)
5—4 非线性电路传递画数生成的算法.....	(322)
习 题.....	(356)
参考文献.....	(359)

第一章 电路的代数元件

1-1 电路的基本物理量与模型

1-1-1 基本物理量间的关系

在电路理论中，常用电流*i*、电压*v*、电荷*q*和磁链 φ 四个基本物理量来描述电路元件和电路的性质。这四个物理量并不完全是相互独立的。根据定义，*i*与*q*、*v*与 φ 有以下关系：

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (1-1-1)$$

$$v = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1-1-2)$$

根据电磁学理论

$$v = \frac{dw}{dq}, \quad (1-1-3)$$

式中*w*代表能量。式(1-1-1)与式(1-1-3)相乘，得

$$vi = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dw}{dt} = p. \quad (1-1-4)$$

式中， $\frac{dw}{dt}$ 代表能量的变化率或功率，以*p*表示。式(1-1-4)

变为

* 本书所研究的电路元件都是集总的和时不变的。

$$p = vi. \quad (1-1-5)$$

综合上述，我们找到了电路理论中的六个重要物理量。它们是：电荷 q 、电压 v 、电流 i 、磁链 φ ，功率 p 和能量 w 。任何时间 t ，这些量之间存在着下面的普遍关系：

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (1-1-6)$$

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (1-1-7)$$

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{dw(t)}{dt}, \quad (1-1-8)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v(\tau) i(\tau) d\tau, \quad (1-1-9)$$

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau, \quad (1-1-10)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau. \quad (1-1-11)$$

1-1-2 器件模型的概念

大家知道，任何一种电气和电子设备都是由各种实际器件按一定方式联接而成的。这些器件，有的只有两个端子，称为二端器件。例如各种商用电阻器、电容器、电感器，电池以及二极管等。有的有三个或三个以上端子，称为三端或多端器件。例如各种三级管，包括双极型晶体管、结型场效应管、MOS场效应管；各种集成电路块，例如运算放大器，模拟乘法器等模拟集成电路，各种门电路，触发器，存储器等数字集成电路。随着半导体工业和微电子技术的飞跃发展，新的器件层出不穷，如何分析和设计由这些器件构成的设备的功能和特性是电路工作者面临的一个非常实际和迫切的课题。

为了能对电路进行分析和计算，先要找出器件各端子基本物理量间的关系，建立能反映器件端子间基本物理量（ v 、 i 、 q 、

φ) 关系的数学表达式, 即所谓器件的数学模型。例如, 面触型半导体二极管在直流工作状态, 在一定范围内可近似用通过二极管的电流 i_D 与管子两端电压 v_D 的指数函数表示, 即

$$i_D = I_S(e^{qv_D/kT} - 1). \quad (1-1-12)$$

上式可以认为是面触型二极管在一定范围内的直流数学模型。又如, 双极型晶体管在直流工作状态下可近似用以下表达式表示:

$$i_E = I_{ES}(e^{qv_{EB}/kT} - 1) - \alpha_r I_{CS}(e^{qv_{CB}/kT} - 1), \quad (1-1-13)$$

$$i_C = -\alpha_f I_{ES}(e^{qv_{EB}/kT} - 1) + I_{CS}(e^{qv_{CB}/kT} - 1), \quad (1-1-14)$$

式中, i_E , i_C 分别为发射极电流和集电极电流; v_{EB} , v_{CB} 分别为射—基电压和集—基电压。 α_f 和 α_r 为正向放大系数和反向放大系数, $0 < \alpha_f < 1$, $0 < \alpha_r < 1$ 。 I_{ES} 为集—基短路时, 发射极的反向电流, I_{CS} 为射—基短路时, 集电极的反向电流。式 (1-1-13) 和 (1-1-14) 就是有名的埃伯尔斯—莫尔 (Ebers-Moll) 方程。它是双极晶体管的一个重要的直流模型。在实际应用中, 也可以用图表、曲线、算法等形式来近似表征器件的直流特性, 它们也属于数学模型的范畴。

随着工作频率的提高, 必须考虑二极管 PN 结的结电容和扩散电容的影响, 显然式 (1-1-12) 已不能反映实际二极管的特性。考虑到电容效应后, 二极管的端子电流和端子间电压的关系已不能用式 (1-1-12) 那样的函数式来表征了, 表征其特性的关系必将含有微分或积分运算的数学表达式。

另一种常用的方法是用一些具有某种函数关系表达式所定义的理想电路元件构成的电路, 近似地模拟器件的特性, 这就是器件的电路模型。组成电路模型的各种理想电路元件的联接应服从电路的拓扑定律。例如, 考虑到电容效应的二极管可以用图 (1-1-1) 所示的具有某种函数表达式的理想二端电阻器 R 和理想二端电容器 C 并联构成。前者电流 i_D 是电压 v_D 的函数, 即 $i_R = g_R(v_D)$,

后者电荷 q_C 是电压 v_D 的函数, 即 $q_C = q_C(v_D)$ 。考虑到 $i_C = \frac{dq_C}{dt}$,

于是得

$$\begin{aligned} i_D &= i_R + i_C = g_R(v_D) + \frac{dq_C}{dt} \\ &= g_R(v_D) + \frac{dq_C}{dv_D} \frac{dv_D}{dt} = f(v_D, \dot{v}_D), \end{aligned} \quad (1-1-15)$$

式中, $\dot{v}_D = \frac{dv_D}{dt}$ 。

建立能在一定条件下近似反映器件特性的模型, 是分析和计算由这种器件构成的电路的特性首先要做的基础工作。任何模型都是实际器件特性的近似, 要求越精确, 模型就越复杂。如果要

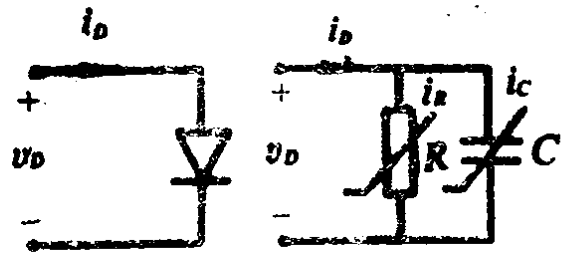


图 1-1-1 二极管及其动态模型

求在所有的情况下都能普遍地、正确地反映器件的特性, 必然会把模型搞得非常复杂, 甚至不可能实现。在常规的手工分析和计算情况下, 模型必须力求简单、明了, 否则计算将无法进行。即使是采用电子计算机分析, 也应该在满足一定精度下尽量采用简单的模型, 以避免对计算机的存贮量提出过高的要求和增加计算的时间。因此, 建立模型的基本原则是根据运用条件、分析对象、目的和精度要求选取合适的模型, 也就是在一定条件下抓住问题的实质, 要求做到简单性与真实性的折衷。

最近十年来, 随着微电子技术的飞快发展, 集成电路的规模日益增大, 在一个芯片上集成了成千上万支晶体管, 对含有这样多管子的电路, 即使用计算机模拟, 所需的内存和计算时间也是大到难以实现的地步。如何建立子电路级或象运算放大器、门

电路等功能块级的宏模型是减小内存和计算时间的重要途径之一。怎样系统地建立这类子电路的宏模型是计算机辅助设计中的一个薄弱环节。系统的建立器件和各级子电路的动态模型仍然是非线性电路理论中尚未解决和需要研究的重要课题。

1-2 二端代数元件

1-2-1 基本二端代数元件

构成器件和电路模型的各种理想二端元件（象二端电阻器、二端电容器、二端电感器等），可以通过赋与四个基本物理量（ v 、 i 、 q 、 φ ）中两两相互独立的变量对间的函数关系来定义。

二端电阻器 能用 $v-i$ 平面上的一条曲线来表征其特性的理想二端元件称为二端电阻器。二端电阻器 $v-i$ 间的关系可表为以下隐形式：

$$f(v, i) = 0.$$

若以 v 为自变量， i 可表为 v 的函数关系，即

$$i = i(v),$$

该二端电阻器是压控型的。若以 i 为自变量， v 可表为 i 的函数关系，即

$$v = v(i),$$

该二端电阻器是流控型的。两者均属显形式。半导体二极管在直流工作情况下就是一种典型二端电阻器。

二端电容器 能用 $v-q$ 平面上的一条曲线来表征其特性的理想二端元件称为二端电容器。二端电容器 $v-q$ 间的关系可表为以下隐形式：

$$f(v, q) = 0,$$

亦可表为显形式：

$$v = v(q), \quad \text{或} \quad q = q(v).$$

前者称为荷控型电容器，后者称为压控型电容器。晶体管PN结电容就是一种二端电容器。

二端电感器 能用*i*— φ 平面上一条曲线表征其特性的理想二端元件称为二端电感器。二端电感器*i*— φ 间的关系可表为以下隐形式：

$$f(i, \varphi) = 0,$$

亦可表为显形式：

$$i = i(\varphi), \quad \text{或} \quad \varphi = \varphi(i).$$

前者称为链控型电感器，后者称为流控型电感器。铁心线圈就是一种二端电感器。

二端忆阻器 能用*q*— φ 平面上一条曲线来表征其特性的理想二端元件称为二端忆阻器。二端忆阻器*q*— φ 间的关系可表为隐形式：

$$f(q, \varphi) = 0,$$

亦可表为显形式：

$$q = q(\varphi) \quad \text{或} \quad \varphi = \varphi(q),$$

前者称为链控型忆阻器，后者称为荷控型忆阻器。忆阻器可以认为是一种有记忆的电阻器。荷控忆阻器的电流和电压的关系是

$$v = \frac{d\varphi(q)}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt} = M_R(q)i.$$

式中， $M_R(q)$ 具有电阻量纲，是电荷*q*的函数，因此，荷控忆阻器可解释成一种荷控电阻器。由于电荷代表了电流的积分，因此， $M_R(q)$ 的值反映了*i*(*t*)过去的历史。因此，忆阻器是个有记忆的电阻器。库仑电池就是一种具有类似忆阻器性能的物理器件。文献[5]还列举一些用忆阻器来建模或具有类似于忆阻器特性的物理器件。

以上四种基本二端元件与四个基本物理量构成的独立变量对的对应关系，如图1-2-1所示。表征基本二端元件变量对间的依赖关系称为元件的赋定关系。为了便于统一研究四种基本二端元

件的赋定关系，现用 (ξ, η) 代表二端电阻器中的 (v, i) ，二端电容器中的 (v, q) ，二端电感器中的 (i, φ) 和二端忆阻器中的 (q, φ) 。由于这些元件的赋定关系只是两变量间的函数关系，故称为基本二端代数元件，以区别第四章中介绍的动态元件。用 (ξ, η) 变量对表征的基本二端代数元件的隐式表达式为

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad (1-2-1)$$

显式表达式为

$$\xi = \xi(\eta), \quad (1-2-2)$$

或

$$\eta = \eta(\xi). \quad (1-2-3)$$

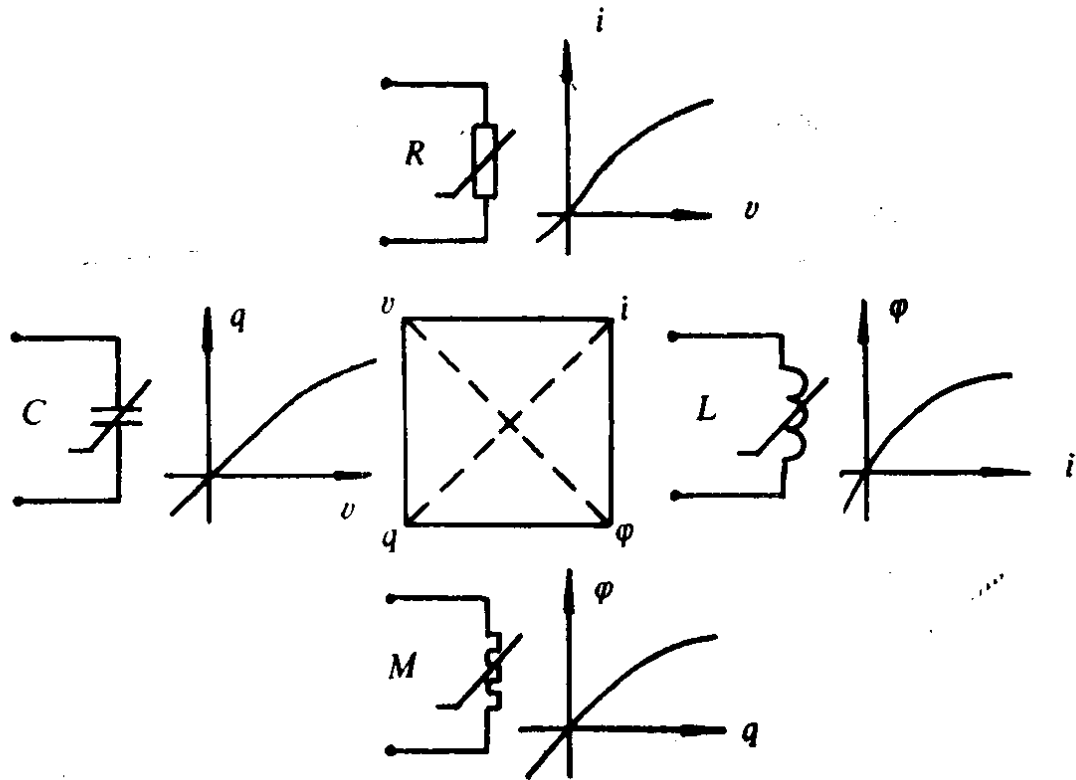


图 1-2-1 四种基本二端代数元件

由于电路元件的两个独立物理量 (ξ, η) 通常是时间的函数，可以认为它们是两个信号 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 。但 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 在任何时间都必需满足二端代数元件的赋定关系，为此，可以把满足赋定关系的 $\xi(t)$ ， $\eta(t)$ 定义为允许信号对。换句话说，对于相同的初始时间 t_0 ，测得基本二端代数元件 N 的所有允许信号对 $(\xi(t), \eta(t))$ 的集合称为代数元件的赋定关系，即

$$f(\xi(t), \eta(t)) = 0,$$

$$\text{或} \quad \xi(t) = \xi(\eta(t)), \quad \eta(t) = \eta(\xi(t))$$

基本二端代数元件可分为线性与非线性两大类。设赋定关系为 $f(\xi, \eta) = 0$ 的元件。取任意两组变量 (ξ', η') , (ξ'', η'') ，任意两个标量 α, β ，如果 $f(\xi', \eta') = 0$, $f(\xi'', \eta'') = 0$ ，总有 $f(\alpha\xi' + \beta\xi'', \alpha\eta' + \beta\eta'') = 0$ ，则称该元件是线性的，否则是非线性的。简言之，满足叠加关系的二端代数元件是线性的，否则是非线性的。线性与非线性也可以用允许信号对间的关系来定义。一个基本二端代数元件，如果对任意两组允许信号对 $(\xi'(t), \eta'(t))$, $(\xi''(t), \eta''(t))$ 和任意两个标量 α, β ， $(\alpha\xi'(t) + \beta\xi''(t), \alpha\eta'(t) + \beta\eta''(t))$ 仍为一组允许信号对，则称该元件是线性的，否则是非线性的。

根据上述定义，线性基本二端代数元件的赋定关系式应为

$$\xi = K\eta, \quad (1-2-4)$$

赋定关系可用一条通过原点的直线来表征。因此线性二电阻器、电容器、电感器和忆阻器的赋定关系式分别为

$$v = Ri, \quad \text{或} \quad i = Gv;$$

$$v = Sq, \quad \text{或} \quad q = Cv;$$

$$i = \Gamma\varphi, \quad \text{或} \quad \varphi = Li;$$

$$\varphi = M_R q, \quad \text{或} \quad q = M_G \varphi.$$

事实上，线性忆阻器就是线性电阻器， $M_R = R$ ， $M = G$ 。

以上定义的四种基本元件都具有独立性和封闭性。所谓独立性是指四种元件彼此独立，一种元件不可能由另外几种元件来实现。例如不可能由二端电容器，二端电感器或它们的组合实现二端电阻器。所谓封闭性是指同一类型元件的联接仍为该类型的元件。例如二端电阻器串并联后仍为二端电阻器。

基本二端代数元件按其赋定关系曲线形状来分，有单调型和非单调型两大类。常见的几种典型曲线如图1-2-2所示。

设函数 $\xi = f(\eta)$ ， $\eta \in \mathbb{R}^1$ ， \mathbb{R}^1 为实数域。如果对任何 η_1, η_2

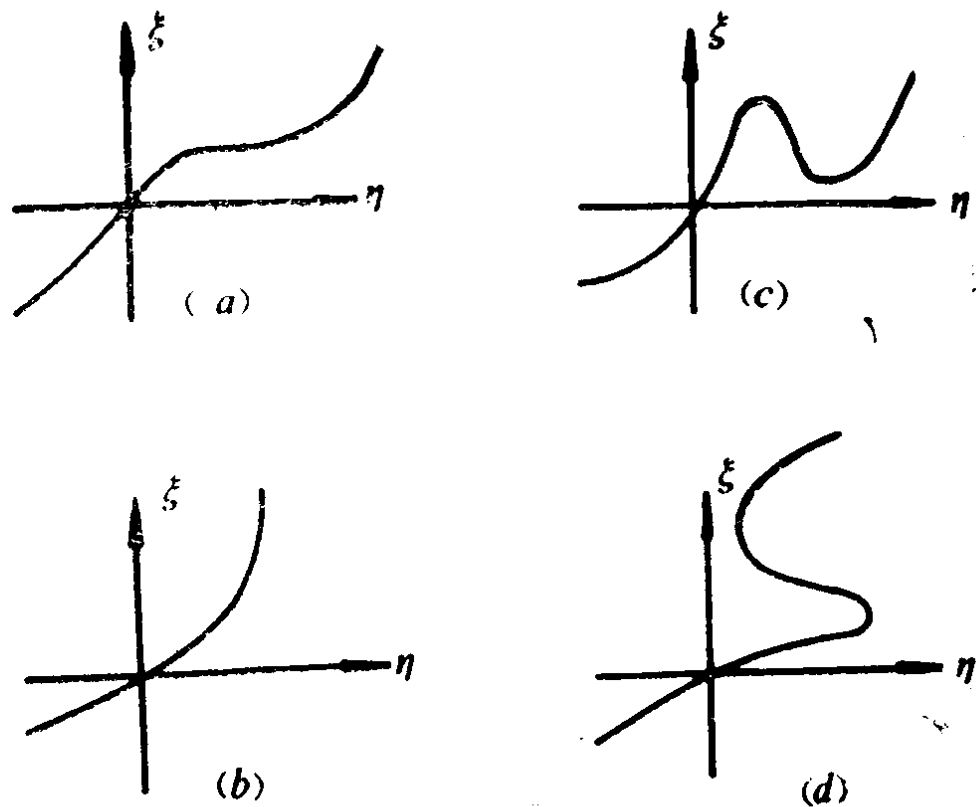


图 1-2-2 单调递增函数与非单调递增函数

$\in \mathbb{R}^1$, 且 $\eta_1 < \eta_2$, 有 $f(\eta_1) \leq f(\eta_2)$, 则称 $f(\eta)$ 是实数域上的递增函数; 如果 $f(\eta_1) < f(\eta_2)$, 则称 $f(\eta)$ 是实数域上的严格递增函数。图 1-2-2(a) 和图 1-2-2(b) 分别为递增函数和严格递增型函数。反之, 如果对任何 $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^1$, 且 $\eta_1 < \eta_2$, 有 $f(\eta_1) \geq f(\eta_2)$, 则称 $f(\eta)$ 是递减函数; 如果 $f(\eta_1) > f(\eta_2)$, 则称为严格递减函数。递增函数和递减函数统称单调型函数, 严格递增和严格递减函数统称严格单调型函数。凡不属单调型函数称为非单调型函数, 图 1-2-2(c) 和图 1-2-2(d) 就是非单调型函数。需要说明的是, 在图 1-2-2(c) 中, 每一个 $\eta \in \mathbb{R}^1$, 都有唯一的一个 ξ 值与之对应, 即 $\xi = f(\eta)$; 反之, 每一个 $\xi \in \mathbb{R}^1$, 则可能有一个以上 η 值与之对应, 因此, $\eta \neq f^{-1}(\xi)$, 无反函数。具有这样特性的元件称为 η 控元件。在图 1-2-2(d) 中, 每一个 $\xi \in \mathbb{R}^1$, 都有唯一的一个 η 值与之对应, 即 $\eta = g(\xi)$; 反之, 每一个 $\eta \in \mathbb{R}^1$, 则可能有一个以上 ξ 值与之对应, 因此, $\xi \neq g^{-1}(\eta)$, 无反函数。具有这样特性的元件称为 ξ 控元件。以上两种情况都属于非一一对应的。

在图1-2-2(b)中, 严格单调型函数虽然属于一一对应的, 但在整个实数域内仍无反函数存在。这是因为对每一个 $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\xi = f(\eta)$, 但 $\xi \in D \subset \mathbb{R}^1$, D 是实数域中的一个子域, 因此, 对每一个 $\xi \in \mathbb{R}^1$, 可能无 η 值与 ξ 对应, 所以 $\eta \neq f^{-1}(\xi)$, 无反函数。如果 ξ 限制在 D 域内, 这种情况可认为有反函数。

和线性元件一样, 二端非线性元件也可用元件参数来表征其特性。

设 $\xi = \xi(\eta)$, 令 $\xi = \xi_0 + \delta\xi$; $\eta = \eta_0 + \delta\eta$, 这里, ξ_0 、 η_0 表示DC量, 通常称为元件的工作点, $\xi_0 = \xi(\eta_0)$ 。若 $\xi(\cdot)$ 是个 C^1 函数*, $|\delta\eta|$ 充分小, 由泰勒级数有

$$\delta\xi = \Lambda(\eta_0)\delta\eta, \quad (1-2-5)$$

式中, $\Lambda(\eta_0) = \left. \frac{d\xi}{d\eta} \right|_{\eta = \eta_0}$ 称为元件在工作点 Q 的增量参数, 若

$$\begin{aligned} \widehat{\xi} = \delta\xi, \quad \widehat{\eta} = \delta\eta, \quad \text{则式 (1-2-5) 可改写成} \\ \widehat{\xi} = \Lambda \widehat{\eta} \end{aligned} \quad (1-2-6)$$

表 1-1

元件种类	赋定关系	增量参数	线性化方程
非线性电阻器	流控电阻器 $v = v(i)$	增量电阻 $R(i_0) = \left. \frac{dv}{di} \right _{i_0}$	$\widehat{v} = R(i_0)\widehat{i}$
	压控电阻器 $i = i(v)$	增量电导 $G(v_0) = \left. \frac{di}{dv} \right _{v_0}$	$\widehat{i} = G(v_0)\widehat{v}$
非线性电容器	荷控电容器 $v = v(q)$	增量倒电容 $S(q_0) = \left. \frac{dv}{dq} \right _{q_0}$	$\widehat{v} = S(q_0)\widehat{q}$
	压控电容器 $q = q(v)$	增量电容 $C(v_0) = \left. \frac{dq}{dv} \right _{v_0}$	$\widehat{q} = C(v_0)\widehat{v}$
非线性电感器	链控电阻器 $i = i(\varphi)$	增量倒电感 $\Gamma(\varphi_0) = \left. \frac{di}{d\varphi} \right _{\varphi_0}$	$\widehat{i} = \Gamma(\varphi_0)\widehat{\varphi}$
	流控电感器 $\varphi = \varphi(i)$	增量电感 $L(i_0) = \left. \frac{d\varphi}{di} \right _{i_0}$	$\widehat{\varphi} = L(i_0)\widehat{i}$

* C^1 函数是指一阶导数连续的函数。

这是一个线性方程，称为二端非线性元件在Q点的线性化方程。
表1-1列出二端非线性电阻器、电容器和电感器的增量参考及其线性化方程。

1-2-2 高阶二端代数元件

在1-2-1节中曾定义了四种基本二端代数元件，它们分别用 (i, v) 、 (v, q) 、 (i, φ) 和 (q, φ) 独立变量间的赋定关系来表征，鉴于 i, v 能用电流表和电压表来测量，所以实际电路都希望以 $i(t)$ 、 $v(t)$ 为变量进行研究，这也是可以做到的，因为 $q(t)$ 可以用 $i(t)$ 对时间 t 的积分表示， $\varphi(t)$ 可以用 $v(t)$ 对 t 的积分表示。若令

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \triangleq i^{(-1)}(t), \quad (1-2-7)$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \triangleq v^{(-1)}(t), \quad (1-2-8)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } i^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \\ &= i^{(-1)}(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (1-2-9)$$

$$\begin{aligned} v^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \\ &= v^{(-1)}(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (1-2-10)$$

如果假设 $i^{(-1)}(t_0) = q(t_0) = 0,$
 $v^{(-1)}(t_0) = \varphi(t_0) = 0,$

于是有

$$i^{(-1)}(t) = \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad t \geq t_0, \quad (1-2-11)$$

$$v^{(-1)}(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad t \geq t_0. \quad (1-2-12)$$

这样，二端电容器、电感器和忆阻器的代数赋定关系式可分别改

写为

$$f(v, i^{(-1)}) = 0,$$

$$f(i, v^{(-1)}) = 0,$$

$$f(v^{(-1)}, i^{(-1)}) = 0.$$

如果用 $i(t)$, $v(t)$ 的高阶积分(多重积分)或高阶导数作为元件的独立变量,则可以定义一类二端元件,称为高阶代数元件。

$$\text{设 } v^{(k)}(t) = \frac{d^k v(t)}{dt^k} \quad k = 1, 2, \dots, \alpha, \quad (1-2-13)$$

$$i^{(k)}(t) = \frac{d^k i(t)}{dt^k} \quad k = 1, 2, \dots, \beta. \quad (1-2-14)$$

式(1-2-13)和(1-2-14)是 $v(t)$ 和 $i(t)$ 对 t 的 k 阶导数。又令

$$v^{(-k)}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_k} \dots \int_{-\infty}^{\tau_2} v(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k,$$

$k = 1, 2, \dots, \alpha$, 并假定 $v^{(-1)}(t_0) = v^{(-2)}(t_0) = \dots = v^{(-k)}(t_0) = 0$, 于是

$$v^{(-k)}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_k} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} v(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad t \geq t_0 \quad (1-2-15)$$

同样, $i^{(-k)}(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_k} \dots \int_{-\infty}^{\tau_2} i(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad k = 1, 2,$

\dots, β , 并假定 $i^{(-1)}(t_0) = i^{(-2)}(t_0) = \dots = i^{(-k)}(t_0) = 0$,

于是

$$i^{(-k)}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_k} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} i(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad t \geq t_0 \quad (1-2-16)$$

式(1-2-15)和(1-2-16)是 $v(t)$ 和 $i(t)$ 对 t 的 k 重积分。

高阶二端代数元件是指能用 $v^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$ 平面上一条曲线来表征其特性的理想二端元件,这里 α, β 为整数,用图1-2-3所示的符号表示。高阶二端代数元件 $v^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$ 的赋定关系可表为隐形式 $f(v^{(\alpha)}, i^{(\beta)}) = 0$, 亦可表为显形式, $v^{(\alpha)} = z(i^{(\beta)})$ 或 $i^{(\beta)} = y(v^{(\alpha)})$ 。显然, $\alpha = 0, \beta = 0$ 是二端电阻器; $\alpha = -1, \beta = 0$ 是二