

# 电磁场理论解题指导

冯亚伯 江志云 崔正勤 编著

电子工业出版社

## 内 容 简 介

本书内容包括静电场、静电场的边值问题、恒定电流场、静磁场、电磁感应、磁场能量和磁力、时变电磁场。平面电磁波、平面波的反射和折射、导行电磁波、电磁波的辐射和运动系统的电磁场等。每章均由基本内容和公式、解题示例、习题及答案三部分组成。是电磁场理论的辅助教材,适用于高等院校本科生。

### 电磁场理论解题指导

冯亚伯 江志云 崔正勤 编著

责任编辑: 洋溢

\*

电子工业出版社出版(北京海淀区万寿路)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

\*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 16.875 字数: 432 千字

1989 年 8 月第一版 1989 年 8 月第一次印刷

印数: 1—2,200 册 定价: 3.40 元

ISBN 7-5053-0591-3/TN·219

## 出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

## 前 言

本书由电子工业部电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论教材编审小组审定并推荐出版。

本书由西北电讯工程学院冯亚伯任主编,上海交通大学黎滨洪任主审。编审者均依据电磁场理论编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅。

本书是电磁场理论或电磁场与电磁波课程的辅助教材,用来帮助学生提高分析、解决问题的能力。可供电磁场与微波技术专业及开设电磁场课程的电子类其它专业的学生使用。

全书共 11 章,每章均由基本内容和公式、解题示例、习题及答案等三部分组成。第一部分是宏观电磁理论基本内容的简要归纳,给出了主要的结论并表达了前后内容的因果关系。例题与习题用来训练应用理论的能力。例题不单纯是列出算式与答案,其中许多题目在解题过程中根据不同情况,分别给出了对题意及解法的分析,计算结果的讨论等,以达举一反三的目的;此外,还针对同学在解题中常犯的错误,指出了应注意的方面。例题与习题的选编还考虑了学习中的难点及容易混淆的概念等,以期减少学习电磁场理论的困难。

本书由余恒清(1、4章)、江志云(2、3章)、崔正勤(5~7章、附录)、李缉熙(8章)、赵玉书(9~11章)执笔编写,冯亚伯修改定稿。编写时参考了西北电讯工程学院冯亚伯、赵玉书、李缉熙;成都电讯工程学院江志云、杨显清、余恒清、王圆;北京工业学院崔正勤各自编写的同名讲义。

本书用国际单位制。为简单计,对未涉及数字的量均略去单位。

编者感谢北京工业学院楼仁海教授对编写工作的支持与指导。编者希望使用本书的老师与同学提出批评意见,以进一步提高其质量。

编者 1988.8

0441.4-44/3

## 目 录

第一章	静电场 .....	1
第二章	静电场的边值问题 .....	31
第三章	恒定电流场 .....	63
第四章	静磁场 .....	78
第五章	电磁感应、磁场能量和磁力 .....	107
第六章	时变电磁场 .....	126
第七章	平面电磁波 .....	151
第八章	平面波的反射和折射 .....	187
第九章	导行电磁波 .....	211
第十章	电磁波的辐射 .....	234
第十一章	运动系统的电磁场 .....	250
附 录	.....	262
A	正交曲线坐标系 .....	262
B	矢量分析 .....	263

# 第一章 静 电 场

## 一、基本内容和公式

### 1. 真空中的静电场

由实验所得的库仑定律是静电场理论的基础,它给出点  $\mathbf{r}'$  处的点电荷  $Q'$  对点  $\mathbf{r}$  处的点电荷  $Q$  的作用力

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{QQ'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.1)$$

式中  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 。用上式及迭加原理可求得点电荷系以及体、面、线电荷对点电荷  $Q$  的作用力。

将  $Q$  看成试探电荷,对应于  $Q$  受的力,可定义电场强度  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{Q} \quad (1.2)$$

由此得点电荷、点电荷系及分布电荷的电场依次为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{Q'(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} & (a) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^n \frac{Q'_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dQ' \quad (1.4)$$

式(1.4)中的  $dQ'$  为分布电荷的电荷元,对体、面、线电荷,分别为

$$dQ' = \begin{cases} \rho dV' \\ \rho_s dS' \\ \rho_l dl' \end{cases} \quad \sigma \quad (1.5)$$

任一矢量场,均可由其散度和旋度来确定,对静电场  $\mathbf{E}$  有

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 & (a) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

对于点电荷,式(1.6a)变为  $\nabla \cdot \mathbf{E} = Q'\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\epsilon_0$ ,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  为  $\delta$  函数;对于面电荷,则有  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \rho_s/\epsilon_0$  (见例 1.2)。式(1.6)的积分形式为

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= Q/\epsilon_0 & (a) \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

式(1.6)、(1.7)表明静电场是有源(发散源)、无旋场(保守场)。

因  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ,  $\nabla \times (\nabla\varphi) \equiv 0$ , 可引入电位函数  $\varphi$ , 使

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1.8)$$

如选点  $\mathbf{r}_0$  为电位参考点, 则点  $\mathbf{r}$  处的电位为

$$\varphi = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.9)$$

由此得点电荷及分布电荷的电位分别为(以无限远为参考点)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & (a) \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

将式(1.8)代入式(1.6a), 得电位  $\varphi$  的泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (a)$$

如果  $\rho = 0$ , 得拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (b)$$

(1.11)

电位  $\varphi(\mathbf{r})$  等于单位正点电荷在  $\mathbf{r}$  处的电位能,  $\varphi(\mathbf{r}) = W_e/Q$ , 或  $W_e = Q\varphi$ 。

电偶极子是一种重要的电荷分布, 以电偶极矩  $\mathbf{p} = Q\mathbf{l}$  表示其特性。若  $\mathbf{p} = \alpha_0\mathbf{p}$ , 则它产生的电位、电场为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (a) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\alpha_0 2 \cos\theta + \alpha_0 \sin\theta) & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

## 2. 静电场中的导体 介质中的静电场

就静电特性而论, 物质可分为导体和介质两大类。在静电平衡条件下

$$\left. \begin{aligned} \text{导体内} \quad \mathbf{E} &= 0, \quad \rho = 0, & (a) \\ \text{导体表面} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= \rho_s/\epsilon_0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

即导体为等位体, 其表面为等位面。式中  $\mathbf{n}$  为导体表面的外法线单位矢量。

如果在有限区域中有  $n$  个导体, 且只有导体上有电荷, 用  $Q_i$ 、 $\varphi_i$  表示第  $i$  个导体上的总电荷与电位, 则有

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.14)$$

式中  $p_{ij}$  为电位系数。或以  $\varphi$  表示  $Q$ :

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \varphi_j \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.15)$$

式中  $\beta_{ij}$  为电容系数。式(1.15)可改写成

$$Q_i = C_{ii}\varphi_i + \sum_{j=1}^n 'C_{ij}(\varphi_i - \varphi_j) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

式中  $C_{ii}$  为部分电容。

如果两个导体形成电容器, 则有

$$Q = CU \quad (1.17)$$

式中  $C$  为电容器的电容,  $U$  为两导体(电极)间的电位差,  $Q$  为一个电极上的电荷量。

介质的静电特性可以用极化强度  $\mathbf{P}$  描述:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}$$

式中  $\mathbf{p}$  为分子偶极矩。由  $\mathbf{P}$  可以确定介质中束缚电荷的体密度与面密度:

$$\left. \begin{aligned} \rho_p &= -\nabla \cdot \mathbf{P} & (a) \\ \rho_{sp} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

式中  $\mathbf{n}$  为介质体表面的外法线单位矢量。

极化介质产生的电位为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \int_s \frac{\rho_{sp}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \quad (1.19)$$

自由电荷和束缚电荷产生的总电场满足:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \quad (1.20)$$

如果定义电位移矢量  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.21)$$

则有

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (a)$$

旋度方程中不包括电荷,故仍有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (b)$$

式(1.22)的积分形式为

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q & (a) \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

式(1.22)、(1.23)为介质中静电场的基本方程。为解场方程,必须知道  $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$  间的本构关系,对于各向同性介质,有

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$\chi_e$  为介质的极化率,代入式(1.21)得

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.24)$$

$\epsilon$  为介质的介电常数,且

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.25)$$

$\epsilon_r$  为相对介电常数。

在均匀介质中,电位仍满足

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \quad \text{或} \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

在两种介质的边界面上,场矢量满足:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \rho_s & (a) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

这就是静电场的边界条件。对电位则相应地有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \rho_s & (a) \\ \varphi_1 &= \varphi_2 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

其中  $\mathbf{n}$  自介质 1 指向介质 2。通常介质分界面无自由面电荷,即  $\rho_s = 0$ , 则  $\mathbf{D}$  的法向分



量连续

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad \text{或} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

若以  $\theta_1, \theta_2$  表  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  与  $\mathbf{n}$  的夹角, 则有

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (1.28)$$

### 3. 静电场的能量和静电力

从建立点电荷系统时, 外加源作的功, 可求得点电荷系的电位能为

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i, \quad \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{r_{ij}} \quad (1.29)$$

对于分布电荷, 电场能为

$$W_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \rho_s \varphi dS \quad (1.30)$$

变换上式, 可得用场矢量表示能量的公式

$$W_c = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (1.31)$$

上式表明静电能储存在整个场域内。被积函数

$$w_c = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (1.32)$$

定义为电能密度。

对于  $n$  个带电导体系统, 其总电能为

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i \quad (1.33)$$

电容器的储能为

$$W_c = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \quad (1.34)$$

电场力除用库仑定律计算外, 还可用虚位移法由能量的变化来计算。真空中的导体系统中, 如果各导体上的电荷不变(孤立系统), 则导体受力

$$F_r = - \left( \frac{\partial W_c}{\partial r} \right)_q \quad (1.35)$$

式中的负号表示静电力有减少系统能量的趋势。如果各导体由外源(电池)维持一定的电位, 则

$$F_r = \left( \frac{\partial W_c}{\partial r} \right)_\varphi \quad (1.36)$$

式中的正号表示静电力有增加系统能量的趋势。类似可以求力矩。简单情况下的介质体所受的力, 也可使用虚位移法计算。

## 二、解题示例

**例 1.1**  $xy$  平面上半径为  $a$ , 圆心在原点的圆环上, 有密度为  $\rho_l(\phi)$  的线电荷, 求轴

线上的  $E$ 。

**解:** 对于简单的电荷分布,可以利用公式(1.4)求其电场,积分是在电荷分布区域对源点坐标计算的,场点固定,所得结果为场点坐标的函数。这里给出的是线电荷,所以用

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_l d l'$$

由图 1-1 可见

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{a}_z, & \mathbf{r}' &= a \cos \phi' \mathbf{a}_x + a \sin \phi' \mathbf{a}_y, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, & \rho_l d l' &= \rho_l(\phi') a d\phi' \end{aligned}$$

将以上关系代入  $\mathbf{E}$  的积分式,得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{(z\mathbf{a}_z - a \cos \phi' \mathbf{a}_x - a \sin \phi' \mathbf{a}_y) a \rho_l(\phi')}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' \end{aligned} \quad (1)$$

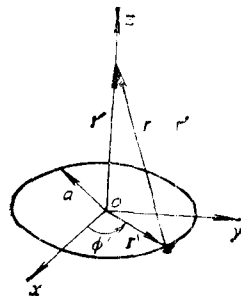


图 1-1

只要给定  $\rho_l(\phi')$ , 即可算出  $\mathbf{E}$ 。如设  $\rho_l(\phi') = \rho_l$  为常量,即电荷对称分布,积分后得

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_y = 0 \\ E_z &= \frac{a \rho_l z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

可见电场只有  $z$  分量。这是由于对  $z$  轴对称的各电荷元在轴上产生的电场的  $x$  和  $y$  分量均相互抵消了。若事先分析电荷及场的分布,可只计算  $E_z$ 。

当  $z \gg a$  时,  $E_z$  的表达式可以简化为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(\mathbf{r}) \mathbf{a}_z = \pm \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 z^2} \mathbf{a}_z \quad (3)$$

式中  $Q' = 2\pi a \rho_l$  为圆环上的总电荷,  $z > 0$ ,  $z < 0$  时分别取式中的正、负号。可见,在远离圆环处,圆环的电场与放在原点的点电荷的场相同,点电荷的电量等于圆环上的总电荷。

如设  $\rho_l(\phi') = \rho_{l0} \cos \phi'$ , 其中  $\rho_{l0}$  为常量,代入式(1),得

$$\left. \begin{aligned} E_y &= E_z = 0 \\ E_x &= - \frac{a^2 \rho_{l0}}{4\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

若  $\rho_l = \rho_{l0} \sin \phi'$ , 则

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_z = 0 \\ E_y &= - \frac{a^2 \rho_{l0}}{4\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

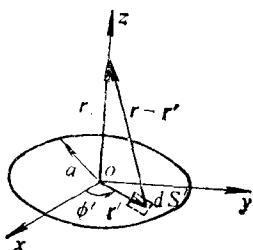


图 1-2

可见这时电场分别只有  $x$  或  $y$  分量,从电荷分布的特点,不难看出这一结果。读者还可以考虑能否仍和电荷均匀分布于圆环时一样,在  $z \gg a$  处,将带电圆环看成置于原点的点电荷?

**例 1.2** 求均匀带电圆盘轴线上的  $\mathbf{E}$ 。

**解:** 设圆盘位于  $xy$  平面,圆心在原点,半径为  $a$ ,面电荷

构思

密度为  $\rho_s$  (常量)。仍通过积分来求  $z$  轴上的电场。

解法 1: 因是面电荷, 所以用

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho_s dS'$$

由图 1-2 可见

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{a}_z, & \mathbf{r}' &= r' \cos \phi' \mathbf{a}_x + r' \sin \phi' \mathbf{a}_y, \\ dS' &= r' dr' d\phi', & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (r'^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

代入  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  的积分式, 得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z\mathbf{a}_z - r' \cos \phi' \mathbf{a}_x - r' \sin \phi' \mathbf{a}_y}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} r' d\phi' dr'$$

积分后得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_z(\mathbf{r})\mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \mathbf{a}_z \quad (1)$$

当然也可以从电荷分布的对称性推知只有  $E_z$  分量, 从而只计算  $E_z$ , 如上例中指出的那样。

解法 2: 利用例 1.1 的结果来计算。在盘上取半径为  $r$ 、宽为  $dr'$  的圆环, 环上的电荷密度为  $\rho_l = \rho_s dr'$ 。由例 1.1 的式(2), 得此圆环在其轴线上产生的电场为

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{zr' \rho_s dr'}{2\epsilon_0 (r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{a}_z$$

上式对  $r'$  从 0 到  $a$  积分, 便得带电圆盘在其轴线上产生的电场, 如式(1)。

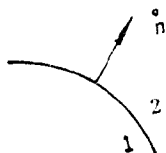
利用式(1), 可以方便地求出无限大均匀带电平面的电场。为此令此式中  $a \rightarrow \infty$  ( $\rho_s$  不变), 得

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0 |z|} \mathbf{a}_z \quad (2)$$

上式是由式(1), 即圆盘轴线上的  $\mathbf{E}$  得来的, 但无限大平面电荷对任意选的  $z$  轴均是对称分布的, 所以式(2)适用于任意点, 即无限大均匀平面电荷的电场的量值与场点位置无关, 但在带电面两侧,  $\mathbf{E}$  的方向相反。

由(2)式可得带电面两侧电场的关系

$$E_z|_{z=0^+} - E_z|_{z=0^-} = \rho_s/\epsilon_0 \quad (3)$$



这虽然是从无限大平面电荷这一特殊情况下得到的结果, 但由高斯定理不难证明, 对于任意形状的带电面, 不论面外有无其它电荷, 在越过带电面时,  $\mathbf{E}$  的法向分量有一个突变

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \rho_s/\epsilon_0 \quad (4)$$

其中  $\mathbf{n}$  为带电面上任一点处的单位法向矢量, 由带电面的“1”侧指向“2”侧, 如图 1-3。

式(4)是  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  在电荷分布于无限薄层中时所取的极限形式。

**例 1.3** (a) 在  $r \leq 5\text{cm}$  的无限长柱形区域中, 有密度为  $\rho = 12\text{mC/m}^3$  的体电荷。求  $r = 2, 5, 6\text{cm}$  处的  $\mathbf{E}$ 。

(b) 若电荷均匀分布于  $r = 5\text{cm}$  的圆柱面上, 但单位长柱面上的总电荷与 (a) 中并

给的柱体中的相同,重求  $r = 2, 5, 6\text{cm}$  处的  $\mathbf{E}$ 。

**解:** 对于某些对称分布的电荷产生的电场,可以直接用高斯定理来计算。就此例而言,由对称性知,  $\mathbf{E}$  只有  $E_r$  分量,且  $E_r$  只与  $r$  有关,所以如果在高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0$$

中,取半径为  $r$  的单位长圆柱面为高斯面,因柱面的两端面上  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ , 侧面  $\mathbf{E}_r$  为常量,所以

(a) 当  $r \leq r_0$  ( $r_0 = 5\text{cm}$ ) 时,

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= 2\pi r E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^r 2\pi r' dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 \rho \\ \mathbf{E} &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

当  $r \geq r_0$  时,

$$\begin{aligned} 2\pi r E_r &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^{r_0} 2\pi r' dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r_0^2 \rho \\ \mathbf{E} &= \frac{r_0^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

将  $\rho$  和不同的  $r$  代入,得

$$\begin{array}{ll} r = 2\text{cm} & E_r = 1.355 \times 10^7 \text{ V/m} \\ r = 5\text{cm} & E_r = 3.388 \times 10^7 \text{ V/m} \\ r = 6\text{cm} & E_r = 2.824 \times 10^7 \text{ V/m} \end{array}$$

(b) 当  $r < r_0$  时,

$$Q = 0, \quad \mathbf{E} = 0$$

当  $r > r_0$  时,

$$\begin{aligned} 2\pi r E_r &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_S dS = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r_0^2 \rho \\ \mathbf{E} &= \frac{r_0^2 \rho}{2\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

代入不同的  $r$ , 得

$$\begin{array}{ll} r = 2\text{cm} & E_r = 0 \\ r = 6\text{cm} & E_r = 2.824 \times 10^7 \text{ V/m} \end{array}$$

$r = 5\text{cm}$  为带电面,所以应分别计算其两侧的场:

$$\begin{array}{ll} \text{内侧} & r = 5^- \text{cm} \quad E_r = 0 \\ \text{外侧} & r = 5^+ \text{cm} \quad E_r = 3.388 \times 10^7 \text{ V/m} \end{array}$$

不难验证,所得结果满足例 1.2 的式(4),此外,我们还看到,在  $r \leq 5\text{cm}$  的区域内的电荷分布方式虽然不同,但在  $r > 5\text{cm}$  的区域中的电场是相同的。

**例 1.4** 半径为  $a, b$  ( $b < a$ ) 的两个球面的球心相距为  $d$ , 且  $d + b < a$ 。两球面间有密度为  $\rho$  的体电荷,如图 1-4。求半径为  $b$  的球形,空腔中的电场。

**解:** 看起来电荷分布不对称, 似乎不能直接应用高斯定理求解。但如果将所给的电荷分布设想为在半径为  $a$  的整个球体内部都充满密度为  $\rho$  的体电荷, 而在半径为  $b$  的球体内又有密度为  $-\rho$  的体电荷。对于这样两个对称的分布电荷, 可以分别用高斯定理求它们在空腔内产生的电场, 再迭加, 便得所求的解。可见, 将高斯定理和迭加原理结合起来, 可以扩大用高斯定理解题的范围。参看图 1-4, 用

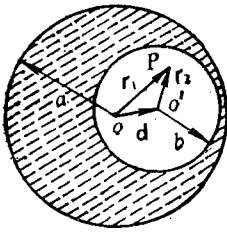


图 1-4

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0$$

可求得密度为  $\pm\rho$  的电荷在空腔内点  $P$  的电场分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho \mathbf{r}_1}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho \mathbf{r}_2}{3\epsilon_0}$$

$P$  点总电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

由图 1-4 知,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{d} + \mathbf{r}_2$ 。  $\mathbf{d}$  为自  $o$  指向  $o'$  的矢径, 若  $\mathbf{a}_{oo'}$  为其单位矢量, 则上式变为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{d} = \frac{\rho \mathbf{d}}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_{oo'}$$

可见空腔内为一均匀电场。

**例 1.5** 在半径为  $a$  的球形区域内、外的电场为

$$\mathbf{E} = \begin{cases} A \left( \frac{r}{3\epsilon_0} - \frac{r^3}{3a^2\epsilon_0} \right) \mathbf{a}_r & r < a \\ \frac{B a^2}{\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & r > a \end{cases}$$

求产生此电场的电荷分布。

**解:** 与前面的例题相反, 这是由电场求其源分布的问题。应用微分形式的高斯定理

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$$

可以求体电荷密度, 但由  $\mathbf{E}$  的表达式可见,  $r = a$  为  $\mathbf{E}$  的突变面, 根据例 1.2 的结果, 知此面上必存在面电荷。

先求体电荷密度:

$$\left. \begin{aligned} r < a, \quad \rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = A \left( 1 - \frac{5r^2}{3a^2} \right) \\ r > a, \quad \rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

再由例 1.2 的式(4)求  $r = a$  处的面电荷密度:

$$\rho_S = \epsilon_0 (E_r|_{r=a^+} - E_r|_{r=a^-}) = B \quad (2)$$

式(1)、(2)所示的体电荷及面电荷密度就是所求的源分布。

**例 1.6** 如图 1-5 所示, 半径为  $a$ , 长为  $2l$  的带电圆柱面上的面电荷密度为  $\rho_S$  (常量), 求  $z$  轴上的电位及电场。

解: 已知电荷, 可以用式 (1.10b) 求电位, 此处为面电荷, 有

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

由图 1-5 可见

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= z\mathbf{a}_z, & \mathbf{r}' &= z'\mathbf{a}_z + a\mathbf{a}_r, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= [a^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \\ \rho_S dS' &= \rho_S a d\phi' dz' \end{aligned}$$

将它们代入  $\varphi(\mathbf{r})$  的积分式, 得

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\rho_S a d\phi' dz'}{[a^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\rho_S a}{2\epsilon_0} \ln \frac{z + l + \sqrt{a^2 + (z + l)^2}}{z - l + \sqrt{a^2 + (z - l)^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

由于电荷分布对称,  $z$  轴上的电场只有  $E_z$  分量, 它可由式(1) 求出

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_z \mathbf{a}_z = -\mathbf{a}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= \mathbf{a}_z \frac{a\rho_S}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (z - l)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[a^2 + (z + l)^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

从这个例题可以看到, 由电荷分布按式 (1.10b) 求出电位后, 再由  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  求  $\mathbf{E}$ , 常比直接由电荷分布按式(1.4)积分求  $\mathbf{E}$  要方便。

**例 1.7** 两同心球壳构成的区域内均匀分布有电荷, 其总电量为  $Q$ , 设内、外球壳半径各为  $a$ 、 $b$ , 试求空间(介电常数为  $\epsilon_0$ ) 任一点的电场  $\mathbf{E}$  和电位  $\varphi$ 。

解: 因为电荷分布具有对称性, 故较简便的方法是用高斯定理先求  $\mathbf{E}$ , 再由  $\mathbf{E}$  求  $\varphi$ 。

(a) 电场强度

以半径为  $r$  的球面作高斯面, 则有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r = Q'/\epsilon_0$$

式中  $Q'$  为  $S$  面内的总电荷, 由此得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= 0 & r < a \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{Q(r^3 - a^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2 (b^3 - a^3)} \mathbf{a}_r & a < r < b \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r & r > b \end{aligned}$$

(b) 电位

对已知的  $\mathbf{E}$ ,  $\varphi(\mathbf{r}) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。选参考点  $\mathbf{r}_0$  在无限远处, 以参考点为准, 按由近及远的次序求各区域的电位。在球坐标系中:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_r \mathbf{a}_r) \cdot (\mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin\theta d\phi) = E_r dr$$

当  $r < b$  时

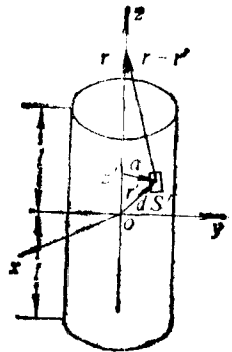


图 1-5

$$\varphi_3 = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\varphi(b) = \varphi_3|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

当  $a < r < b$  时

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_b^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^b \frac{Q(r^3 - a^3)}{4\pi\epsilon_0 r^2(b^3 - a^3)} dr + \varphi(b) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b^3 - a^3)} \left[ \left( \frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) - \left( \frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} \right) \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \\ \varphi(a) &= \varphi_1|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(b^3 - a^3)} \left( \frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} - \frac{3a^2}{2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{aligned}$$

当  $r < a$  时:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^a \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \int_b^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_r^a \mathbf{E}_1 d\mathbf{r} + \varphi(a) = \varphi(a) \end{aligned}$$

注意: 对  $\mathbf{E}$  积分求电位时, 如果积分路径通过  $\mathbf{E}$  的表达式不同的几个区域, 则必须分段积分, 在不同的区域中用对应的  $\mathbf{E}$ , 如本例所示。此外, 按例题所示的次序求电位, 可利用已得结果, 故较为简便。

**例 1.8** 三个同心导体球壳的半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ , 已知球壳 2 上等效电荷面密度为  $\rho_{S2}$ , 内球壳上的电位  $\varphi_1$  等于外球壳上的电位  $\varphi_3$ 。

(a) 求球壳 2 与内、外球壳间的电场  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_3$ ;

(b) 求内球壳的外表面及外球壳的内表面的面电荷密度  $\rho_{S1}$ 、 $\rho_{S3}$ 。

**解:** 根据题意, 可设导体球壳 2 连接于外加电源的正极, 内、外球壳则接于负极, 如图 1-6 所示。并设各球壳带电量分别为  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ , 显然有  $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ 。

(a) 因场具有对称性, 可用高斯定理求解:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad r_1 < r < r_2$$

$$U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad r_2 < r < r_3$$

$$U_{23} = \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_2}^{r_3} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

因为  $\varphi_1 = \varphi_3$ , 所以  $U_{23} = -U_{12}$ , 即

$$\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

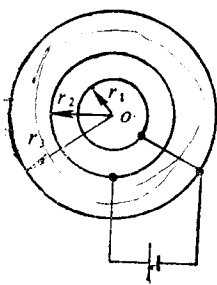


图 1-6

于是

$$Q_1 = -Q_2 \frac{r_1(r_3 - r_2)}{r_2(r_3 - r_1)} = -4\pi r_1 r_2 \rho_{S2} \frac{(r_3 - r_2)}{(r_3 - r_1)}$$

式中  $Q_2 = 4\pi r_2^2 \rho_{S2}$ , 将  $Q_1, Q_2$  代入  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  中, 得

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\rho_{S2} r_1 r_2 (r_3 - r_2)}{\epsilon_0 (r_3 - r_1) r^2} \mathbf{a}_r, \quad r_1 < r < r_2$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{\rho_{S2} r_2 r_3 (r_2 - r_1)}{\epsilon_0 (r_3 - r_1) r^2} \mathbf{a}_r, \quad r_2 < r < r_3$$

(b) 由内球壳外表面带电量  $Q_1$  可得面电荷密度

$$\rho_{S1} = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} = -\frac{r_2(r_3 - r_2)}{r_1(r_3 - r_1)} \rho_{S2}$$

外球壳内表面的电荷密度

$$\rho_{S3} = \frac{Q_3}{4\pi r_3^2} = -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r_3^2} = -\frac{r_2(r_2 - r_1)}{r_3(r_3 - r_1)} \rho_{S2}$$

读者可考虑, 若球壳 2 接负极, 1、3 接正极, 结果又如何?

**例 1.9** 长为  $l$  的直线电荷, 密度  $\rho_l$  为常量, 求它所产生的电位的等位面。

**解:** 先求出电位。取坐标, 使线电荷沿  $z$  轴, 中点在坐标原点, 如图 1-7 所示。

由式 (1.10b), 可得此线电荷的电位为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + l/2 + \sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}{z - l/2 + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

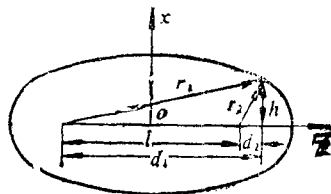


图 1-7

令上式等于常量, 便可得等位面方程。设

$$\begin{aligned} r_1 &= [x^2 + y^2 + (z + l/2)^2]^{\frac{1}{2}}, & d_1 &= z + l/2 \\ r_2 &= [x^2 + y^2 + (z - l/2)^2]^{\frac{1}{2}}, & d_2 &= z - l/2 \end{aligned}$$

于是式(1)可改写成

$$\varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_1 + r_1}{d_2 + r_2} \quad (2)$$

注意  $d_1, d_2$  是代数量。取  $xz$  平面为包含线电荷的一个代表性平面, 各参量均示于图 1-7。显然, 由式(2)知等位面亦可用下式来定义

$$\frac{d_1 + r_1}{d_2 + r_2} = k \quad (3)$$

式中  $k$  为常量。由图 1-7 可见

$$\begin{aligned} r_1^2 - d_1^2 &= r_2^2 - d_2^2 = h^2 \\ d_1 - d_2 &= l \end{aligned}$$

由以上两式及式(3), 可得

$$r_1 + r_2 = l \frac{k+1}{k-1} \quad (4)$$



上式表明,从线电荷的端点到等位面上任一点的距离之和为常量。可见等位面与  $xz$  面的交线为椭圆,焦点为线电荷的端点。此椭圆绕  $z$  轴旋转便得椭球。即所论线电荷产生的电位的等位面为椭球面,其焦点就是线电荷的端点。

**例 1.10** 已知  $\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda}$ , 求对应的电场及电荷分布。

**解:** (a) 在球坐标系中求电位的梯度便得电场  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\varphi = -\mathbf{a}_r \frac{d}{dr} \left( \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda} \right) \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} e^{-r/\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\lambda} \right) \mathbf{a}_r\end{aligned}\quad (1)$$

(b) 电荷分布:

已知电位,由  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$  可以求体电荷分布,因上面已求出电场,所以要解的问题和例 1.5 类似,不过现在  $r=0$  为  $\mathbf{E}$  的奇点,当  $r \neq 0$  时:

$$\begin{aligned}\rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) \\ &= -\frac{Q_0}{4\pi\lambda^2 r} e^{-r/\lambda}\end{aligned}\quad (2)$$

$r=0$  处应有点电荷,为确定其电量  $q$ , 先用高斯定理求出半径为  $r$  的球面内的总电荷  $Q$ ,再由式(2)及  $\int \rho dV$  求出比球面内的总体电荷  $Q'$ , 则  $q = Q - Q'$ 。

$$Q = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E = Q_0 e^{-r/\lambda} \left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned}Q' &= \int_V \rho dV = -\int_0^r \frac{Q_0}{4\pi\lambda^2 r'} e^{-r'/\lambda} \cdot 4\pi r'^2 dr' \\ &= -\frac{Q_0}{\lambda^2} \int_0^r r' e^{-r'/\lambda} dr'\end{aligned}$$

用分部积分法,可得

$$\begin{aligned}Q' &= Q_0 e^{-r/\lambda} \left( 1 + \frac{r}{\lambda} \right) - Q_0 \\ q &= Q - Q' = Q_0\end{aligned}\quad (3)$$

应用  $\delta$  函数,可将式(2)、(3)合写成

$$\rho = -\frac{Q_0}{4\pi r \lambda^2} e^{-r/\lambda} + Q_0 \delta(\mathbf{r})$$

**例 1.11** 由半径为  $a$  的导体球及内半径为  $b$  的导体球壳构成球形电容器。

(a) 求电容  $C$ ;

(b) 如外加电压  $U = 100\text{kV}$ ,  $a = 100\text{mm}$ ,  $b = 500\text{mm}$ , 求电容器中的最大电场;

(c) 设  $U$ 、 $b$  一定,确定电场的最大值为最小时的  $a$  及相应的电场最大值。

**解:** (a) 求电容器的电容时,通常可以假设电极上带一定的电荷,由此求出电极间的电场,进而求得两电极间的电压,按  $C = Q/U$ , 得电容。

设内导体带电荷  $Q$ ,由高斯定理,得