ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТ

Я. С. БУГРОВ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей вузов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1982

22.1
Б 90
УДК 51

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 192 с.

Задачник составлен применительно к учебникам тех же авторов «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Илл. 105.

Яков Степанович Бугров
Сергей Михайлович Никольский

Высшая математика

ЗАДАЧНИК

Редактор *А. Ф. Лапко.*
Технический редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *Н. Б. Румянцева.*

ИБ № 12010

Сдано в набор 08.07.81. Подписано к печати 12.03.82. Формат 84×108[1]/32. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 10,55. Тираж 200 000 экз. Заказ № 10. Цена 35 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15

Б $\frac{1702000000-049}{053(02)-82}$ 2-82

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник составлен применительно к нашим учебникам по высшей математике. При этом принято следующее обозначение учебников:

[1] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление».

[2] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».

[3] — Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

В начале каждого параграфа задачника указаны глава и параграф из названных выше учебников, где можно найти соответствующий теоретический материал.

Как правило, число задач по разделу минимально и соответствует числу учебных часов, отведенных на изучение данного материала. Можно рекомендовать задачи с нечетными номерами решать в аудитории, а с четными номерами студенты должны решать самостоятельно дома.

На практических занятиях можно также использовать задачи, вошедшие в учебники [1]—[3]. В задачник эти задачи не включены.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Действительные числа. Множества

Применяя метод математической индукции, доказать следующие соотношения:

1. $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$.

3. $(1+x)^n \geqslant 1+nx, \quad x>-1$.

4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Для решения нижеследующих задач необходимо изучить главу 1 из [1].

5. Пусть множество A состоит из юношей данной группы, а B — из девушек той же группы. Найти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда A или B пустые множества.

6. Пусть $A=\{2n\}$, $B=\{2n+1\}$. Найти $A+B$, AB, $A\setminus B$ (n — натуральное).

7. Какие числа больше, a или b:

$$a=1,(1234512), \qquad b=1,(12345);$$

$$a=1,(12302),\ b=1,(123); \quad a=1,(123412),\ b=1,(1234).$$

8. Выяснить, к какому числу a стабилизируется последовательность действительных чисел:

$$a_1=0,1010101010\ldots,$$
$$a_2=0,1100110011\ldots,$$
$$a_3=0,111000111000\ldots,$$
$$a_4=0,111100001111\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=0,\underbrace{11\ldots1}_{n\text{-раз}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-раз}}1\ldots10\ldots0\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. Найти сумму действительных чисел $a=0,(12)$ и $b=0,(13)$.

10. Даны множества $A=[2,\ 5]$, $B=(3,\ 6)$. Найти $A+B$, AB, $A\setminus B$.

11. Решить неравенства:

а) $|x+3|<0,1$; б) $|x-3|\geqslant 10$;

в) $|x|>|x+3|$; г) $|3x-1|<|x-1|$;

д) $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right|\leqslant 1$.

12. Какое из чисел больше: a или $(-a)$?

13. Пусть $a\geqslant 0$. Для каких чисел b имеют место соотношения:

а) $|a+b|=|a|+|b|$; б) $|a-b|=|a|+|b|$;

в) $|a+b|<|a|+|b|$; г) $|a-b|<|a|+|b|$.

14. Найти модуль числа: а) $\ln(1/e)$; б) $\sin(3\pi/2)$; в) $\cos(7\pi/4)$.

§ 2. Предел последовательности

(см. [1], глава 2)

15. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

и определить для каждого $\varepsilon>0$ число $n_0=n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad n>n_0.$$

Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,001	0,00001	...
n_0				

Найти пределы:

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^6 n}{n^2+1}$. **17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha\sin(n!)}{n+1}$ $(0\leqslant\alpha<1)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

20. Доказать, что переменная α_n есть бесконечно малая, если

$$\alpha_n=\frac{n}{n^3+1};\quad \alpha_n=\frac{1}{n!};\quad \alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

21. Доказать, что переменная β_n является бесконечно большой, если

$$\beta_n=(-1)^n n^2;\quad \beta_n=2^{\sqrt{n}};\quad \beta_n=\ln(n+1).$$

22. Будет ли последовательность

$$x_n=n^{(-1)^n/2}$$

бесконечно большой?

Доказать равенства

23. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+10}-\sqrt{3n})=0$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+3n+1}=\frac{3}{2}$.

Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

25. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

26. $x_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{n+1}{2n-1}$.

27. Найти наибольший элемент последовательностей:

$$x_n=\frac{n^2}{2^n};\qquad x_n=\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}.$$

28. Найти наименьший элемент последовательностей:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\qquad x_n=n^2-9n-10.$$

29. Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$ $(n\in\mathbf{N})$, $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, если

$$x_n=1-\frac{1}{n};\qquad x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{2+(-1)^n}{3}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

30. Какие числа являются частичными пределами последовательности

$$1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 1,\ \ldots.$$

Под *частичным пределом* произвольной ограниченной последовательности мы понимаем предел ее сходящейся подпоследовательности. Существование таких подпоследовательностей у ограниченной последовательности вытекает из теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательностей:

31. $x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{2^n} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k^2}{2^k}$.

32. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. **33.** $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$.

§ 3. Функция. Предел функции

(см. [1], глава 3)

Найти область E задания функции $y=f(x)$ и образ $E_1=f(E)$ множества E при помощи функции f

34. $y=\frac{1}{1+x^2}$. **35.** $y=\sqrt{2+3x-x^2}$.

36. Найти $f(0)$, $f(x+2)$, $f(1/x)$, $f(x)+1$, $1/f(x)$, если

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Построить графики функций:

37. $y=8x-2x^2$. **38.** $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

39. $y=-x^2+2x-1$. **40.** $y=\frac{1-x}{1+x}$. **41.** $y=\frac{3x+4}{4x-3}$.

42. Определить нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$, если

$$f(x)=x^2 \text{ на } [-2,\ 5]; \qquad \varphi(x)=x+\frac{1}{x} \text{ на } (0,\ 3].$$

Указание. На множестве $(0,\ 3]$ $\varphi(x)\geq 2$.

43. Построить графики функций:

$$f(x)=\sup_{0\leq t\leq x}\{\sin t\}; \qquad \varphi(x)=\inf_{0\leq t\leq x}\{\sin t\}.$$

Найти пределы функций:

44. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+3x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{2x^2-x+4}\right)^x$;

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; з) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

и) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

к) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right]$.

45. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

Исследовать на непрерывность, изобразить графически функции и определить характер точек разрыва.

49. $f(x)=|x-1|$. **50.** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ A, & x=1.\end{cases}$

51. $f(x)=\operatorname{sign}(x^2-2x-3)$. **52.** $y=\frac{1+x}{1+x^3}$.

53. $y=\frac{x}{1+x}$. **54.** $y=\operatorname{sign}(\cos x)$.

55. $y=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ **56.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0,\\ a+x, & x>0.\end{cases}$

Доказать, что функции $f(x)$ равномерно непрерывны на $[a, b]$, т. е. $\forall\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)>0$ (не зависящее от точек промежутка) такое, что

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

как только

$$|x_1-x_2|<\delta.$$

57. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 20-8x, & 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$

58. $f(x)=x^3,\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$

59. Найти обратную функцию для функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad (ad-bc\neq 0).$$

Пусть $x\to 0$. Выделить главный член вида Ax^m.

60. $f(x)=3x+x^4$. **61.** $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$.

§ 4. Производная

(см. [1], глава 4)

62. Найти $f'(0)$, $f'(2)$, если $f(x)=2-2x+x^3$.

63. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, если $f(x)=x\arcsin\frac{x}{x+1}$.

Найти производные функций:

64. $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

65. а) $y=x+\sqrt[3]{x}$; б) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; г) $y=x\sqrt{1+x^2}$;

д) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; е) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

ж) $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$; з) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

и) $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$; к) $y=\frac{1}{\cos^n x}$;

л) $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$; м) $y=e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$; н) $y=x^{a^a}+a^{x^a}$ $(a>0)$;

о) $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$; п) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

66. $y=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. **67.** $y=e^{-x^2}$.

68. а) $y=\sin x^2$; б) $y=\sin^2 x$; в) $y=\sin^3 x^7$;

г) $y=\cos(\sin x)$; д) $y=\cos x^2$; е) $y=\cos^2 x^4$.

69. а) $y=\arcsin(x/a)$; б) $y=\operatorname{arctg}(x/a)$;

в) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$; г) $y=\arcsin(\sin x)$;

д) $y=\arccos(x/a)$; е) $y=e^{x^2+x}$.

70. $y=\ln\operatorname{tg}(x/2)$.

71. а) $y=x\operatorname{arctg} x$; б) $y=\ln^3 x^2$;

в) $y=\ln(\ln(\ln x))$; г) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

д) $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$; е) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

ж) $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$;

з) $y=\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^2})$;

и) $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; к) $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

л) $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$;

м) $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}+\operatorname{arctg} x^6$; н) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

о) $y=x\operatorname{arctg} x-0{,}5\ln(1+x^2)-0{,}5(\operatorname{arctg} x)^2$;

п) $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

р) Имеет место формула

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1}(x) & \dots & a_{k-1,n}(x) \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ a_{k+1,1}(x) & \dots & a_{k+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x)\end{vmatrix},$$

где элементы определителя $a_{ij}(x)$ дифференцируемые функции. Таким образом производная определителя n-го порядка равна сумме n определителей n-го порядка, каждый из которых отличается от исходного определителя тем, что в нем соответствующая строка заменена строкой из производных элементов этой строки.

Доказать формулу дифференцирования для определителей второго и третьего порядков.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

72. $y=\begin{cases} 1-x, & -2<x<1, \\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ -(2-x), & 2<x<4.\end{cases}$

73. $y=\begin{cases} x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

Найти логарифмические производные (т. е. y'/y) функций y:

74. $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

75. $y = \operatorname{ch}^2 x$.

Найти производные от гиперболических функций:

76. а) $y = \operatorname{sh}(x^2+1)$; б) $y = \operatorname{sh}^3 x^6$.

77. $y = \operatorname{ch}^2(x^2+x+1)$.

78. а) $y = \operatorname{th}^2 x$; б) $y = \operatorname{th} x^2$.

79. а) $y = \operatorname{th}(\ln x + 1)$; б) $y = \operatorname{Arsh} x$;
в) $y = \operatorname{Arsh}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; г) $y = \ln \operatorname{sh} x$;
д) $y = \operatorname{ch} \ln x$; е) $y = e^{\operatorname{th} x}$; ж) $y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x}$ $(x > 0)$;
з) $y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}$; и) $y = \operatorname{th}\frac{x}{2} - \operatorname{cth}\frac{x}{2}$.

80. Для функции $f(x) = x^2 + x + 1$, определить дифференциал и приращение в точке $x = 1$ для $\Delta x = 0{,}1$.

Найти дифференциалы функций:

81. $d(xe^x)$. **82.** $d(\operatorname{sh} x)$.

83. $d(\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x)$. **84.** $d(\ln(1-x^2))$.

Найти производные второго порядка от следующих функций:

85. а) $y = e^{-x^2} \equiv \exp(-x^2)$; б) $y = x\sqrt{1+x^2}$.

86. Пусть дан определитель (Вронского)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

где функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ непрерывны на (a, b) вместе со своими производными до n-го порядка включительно.

Доказать, что

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

87. $y = x^5$, найти d^4y.

88. $y = e^x \ln x$, найти d^3y.

Найти производные y'_x и y''_{x^2} от функций $y=y(x)$, заданных параметрически, если:

89. $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3$. **90.** $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.

91. $x=f'(t),\ y=tf'(t)-f(t)$.

92. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$.

93. а) Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$$y=2+x-x^3$$

в точке $A=(2,\ -4)$.

б) Выяснить, имеют ли общую касательную графики функций $y=\operatorname{sh}x$ и $y=\ln(1+2x)$ в точке $(0,\ 0)$?

Углом между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в их точке пересечения с абсциссой $x=x_0$ называется угол φ между касательными к этим кривым в этой точке. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\,f_2'(x_0)},$$

где φ_1, φ_2 — углы, образованные указанными касательными с осью x (рис. 1).

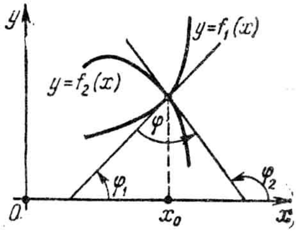

Рис. 1

94. Под каким углом пересекаются кривые $y=\sin x$ и $y=\cos x$ $(0<x<\pi)$?

95. Под каким углом пересекаются кривые $y=x^{\alpha}$ и $y=x^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ $(0<\alpha<1)$ в точке $(1,\ 1)$?

96. Под каким углом кривая $y=\ln\left(1+\left(x/\sqrt{3}\right)\right)$ пересекает ось x?

97. а) Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=(x-1)(x-2)$ на $[1,\ 2]$.

б) Многочлен $P_4(x)=x^4-x^3+x^2-x$ имеет корень $x=1$. Доказать, что многочлен $\frac{d}{dx}P_4(x)$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу $(0,\ 1)$.

в) Доказать, что все корни многочлена $P_n(x)=$ $=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$ действительны и принадлежат к интервалу $(-1,\ 1)$.

98. Проверить справедливость теоремы Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ для функции

а) $y=1+x+x^3$;

б) $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$, A, B, C — действительные числа;

в) $f(x)=Ax^3+Bx+C$ на $[0, 1]$. Найти точку c.

99. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на (a, b) $(|f'(x)|\leqslant M)$, то

а) $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

б) Если a и b — конечные числа, то $f(x)$ ограничена на (a, b).

Указание. Пусть x — произвольная точка, а x_0 — фиксированная точка (a, b). Тогда

$$|f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)|=|f'(c)||x-x_0|+|f(x_0)|,$$

где c находится между точками x и x_0.

в) Если интервал (a, b) бесконечный, то функция $f(x)$ может быть неограниченной. Рассмотреть функцию $f(x)=\ln x$ на $(1, \infty)$.

100. Определить промежутки монотонности у функций

а) $y=3+x-x^2$; б) $y=4x-x^4$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (отрицательную) производную на (a, b), то она возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Этот факт можно использовать при доказательстве неравенств.

Например, функция $\varphi(x)=e^x-1-x$ непрерывна на $[0, \infty)$. Она возрастает на $[0, \infty)$, так как $\varphi'(x)=e^x-1>0$ на $(0, \infty)$. Далее $\varphi(0)=0$, поэтому

$$e^x-1-x>0, \qquad \forall x\in(0, \infty).$$

На $(-\infty, 0)$ функция $\varphi(x)$ убывает, поэтому $e^x-1-x>\varphi(0)=0$. Таким образом, $\forall x\neq 0$

$$e^x>1+x.$$

Доказать неравенства:

101. $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x \quad (x>0)$.

102. $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad (x>0)$.