

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Я. С. БУГРОВ

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ЗАДАЧНИК

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
инженерно-технических специальностей вузов



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1982

22.1
Б 90
УДК 51

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 192 с.

Задачник составлен применительно к учебникам тех же авторов «Дифференциальное и интегральное исчисление», «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов.
Илл. 105.

*Яков Степанович Бугров
Сергей Михайлович Никольский*

Высшая математика

ЗАДАЧНИК

Редактор А. Ф. Лапко.

Технический редактор С. Я. Шкляр. Корректор Н. Б. Румянцева.

ИБ № 12010

Сдано в набор 08.07.81. Подписано к печати 12.03.82. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Услови. печ. л. 10.08. Уч.-изд. л. 10.55. Тираж 200 000 экз. Заказ № 10. Цена 35 коп.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Б 1702000000—049
053(02)-82 2-82

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Введение в анализ	7
§ 1. Действительные числа. Множества	7
§ 2. Предел последовательности	8
§ 3. Функция. Предел функции	10
§ 4. Производная	12
Глава 2. Интегралы	20
§ 1. Неопределенный интеграл	20
§ 2. Определенный интеграл	23
§ 3. Приложения определенного интеграла	24
§ 4. Несобственные интегралы	27
Глава 3. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	28
§ 1. Определители и матрицы	28
§ 2. Системы линейных уравнений	29
§ 3. Векторы	30
§ 4. Деление отрезка в данном отношении	31
§ 5. Прямая линия	31
§ 6. Плоскость	32
§ 7. Прямая в пространстве	33
§ 8. Ориентация системы векторов. Векторное и смешанное произведение векторов	34
§ 9. Зависимые и независимые системы векторов	38
§ 10. Линейные операторы. Базис	39
§ 11. Линейные подпространства	43
§ 12. Самосопряженные операторы. Квадратические формы	44
§ 13. Кривые второго порядка	45
§ 14. Поверхности второго порядка	48
Глава 4. Функции многих переменных	52
§ 1. Основные понятия	52
§ 2. Предел функции. Непрерывность	53
§ 3. Частные производные. Дифференциалы	55
§ 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков	56
§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности	57
§ 6. Формула Тейлора	57
§ 7. Экстремумы	58
§ 8. Неявные функции, Условный экстремум	58

Глава 5. Ряды	59
§ 1. Числовые ряды	59
§ 2. Функциональные ряды	62
§ 3. Степенные ряды	63
Глава 6. Дифференциальные уравнения	64
§ 1. Общие понятия	64
§ 2. Уравнения первого порядка	64
§ 3. Метрические пространства. Сжимающие операторы. Теорема существования решения	65
§ 4. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения	67
§ 5. Понижение порядка дифференциального уравнения	68
§ 6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	69
§ 7. Уравнение Эйлера. Уравнения с переменными коэффициентами	70
§ 8. Метод вариации постоянных	71
§ 9. Системы дифференциальных уравнений	72
§ 10. Решение уравнений с помощью степенных рядов	72
§ 11. Устойчивость по Ляпунову	73
Глава 7. Кратные интегралы	74
§ 1. Интегралы, зависящие от параметра	74
§ 2. Кратные интегралы	75
§ 3. Замена переменных в кратном интеграле	76
§ 4. Применение кратных интегралов	77
§ 5. Несобственные интегралы	80
Глава 8. Векторный анализ	81
§ 1. Криволинейные интегралы первого рода	81
§ 2. Интеграл от вектора вдоль кривой	83
§ 3. Потенциал. Ротор вектора	84
§ 4. Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах	85
§ 5. Формула Грина	86
§ 6. Интеграл по поверхности первого рода	87
§ 7. Поток вектора через ориентированную поверхность (поверхностный интеграл второго рода)	89
§ 8. Формула Гаусса—Остроградского	93
§ 9. Формула Стокса	94
Глава 9. Ряды и интеграл Фурье	96
§ 1. Тригонометрические ряды	96
§ 2. Ряд Фурье	96
§ 3. Ортогональные системы функций	98
§ 4. Интеграл Фурье	100
Глава 10. Уравнения математической физики	101
Глава 11. Функции комплексного переменного	103
§ 1. Общие понятия	103
§ 2. Предел функции. Производная	105

§ 3. Условия Коши—Римана. Гармонические функции	105
§ 4. Простейшие конформные отображения	106
§ 5. Интегрирование функций комплексного переменного	108
§ 6. Формула Коши	109
§ 7. Ряды в комплексной области	110
§ 8. Изолированные особые точки. Вычеты	112
§ 9. Вычисление интегралов с помощью вычетов	114
Глава 12. Операционное исчисление	118
§ 1. Изображения простейших функций	118
§ 2. Отыскание оригинала по изображению	119
§ 3. Приложения операционного исчисления	120
Ответы	122

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник составлен применительно к нашим учебникам по высшей математике. При этом принято следующее обозначение учебников:

[1]—Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление».

[2]—Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии».

[3]—Я. С. Бугров, С. М. Никольский. «Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного».

В начале каждого параграфа задачника указаны глава и параграф из названных выше учебников, где можно найти соответствующий теоретический материал.

Как правило, число задач по разделу минимально и соответствует числу учебных часов, отведенных на изучение данного материала. Можно рекомендовать задачи с нечетными номерами решать в аудитории, а с четными номерами студенты должны решать самостоятельно дома.

На практических занятиях можно также использовать задачи, вошедшие в учебники [1]—[3]. В задачник эти задачи не включены.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Действительные числа. Множества

Применяя метод математической индукции, доказать следующие соотношения:

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$.

2. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

3. $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x > -1$.

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Для решения нижеследующих задач необходимо изучить главу I из [1].

5. Пусть множество A состоит из юношей данной группы, а B — из девушек той же группы. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$. Рассмотреть также случаи, когда A или B пустые множества.

6. Пусть $A = \{2n\}$, $B = \{2n+1\}$. Найти $A+B$, AB , $A \setminus B$ (n — натуральное).

7. Какие числа больше, a или b :

$$a = 1, (1234512), \quad b = 1, (12345);$$

$$a = 1, (12302), \quad b = 1, (123); \quad a = 1, (123412), \quad b = 1, (1234).$$

8. Выяснить, к какому числу a стабилизируется последовательность действительных чисел:

$$a_1 = 0, 1010101010 \dots,$$

$$a_2 = 0, 1100110011 \dots,$$

$$a_3 = 0, 111000111000 \dots,$$

$$a_4 = 0, 111100001111 \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = 0, \underbrace{11 \dots 100}_{n\text{-раз}} \dots \underbrace{01 \dots 10}_{n\text{-раз}} \dots 0 \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

9. Найти сумму действительных чисел $a = 0,(12)$ и $b = 0,(13)$.

10. Даны множества $A = [2, 5]$, $B = (3, 6)$. Найти $A + B$, AB , $A \setminus B$.

11. Решить неравенства:

а) $|x+3| < 0,1$; б) $|x-3| \geq 10$;

в) $|x| > |x+3|$; г) $|3x-1| < |x-1|$;

д) $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$.

12. Какое из чисел больше: a или $(-a)$?

13. Пусть $a \geq 0$. Для каких чисел b имеют место соотношения:

а) $|a+b| = |a| + |b|$; б) $|a-b| = |a| + |b|$;

в) $|a+b| < |a| + |b|$; г) $|a-b| < |a| + |b|$.

14. Найти модуль числа: а) $\ln(1/e)$; б) $\sin(3\pi/2)$; в) $\cos(7\pi/4)$.

§ 2. Предел последовательности

(см. [1], глава 2)

15. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

и определить для каждого $\varepsilon > 0$ число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ если } n > n_0.$$

Заполнить таблицу:

ε	0,1	0,001	0,00001	...
n_0				

Найти пределы:

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n n}{n^2 + 1}$. 17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha \sin(n!)}{n+1}$ ($0 \leq \alpha < 1$).

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right).$$

20. Доказать, что переменная α_n есть бесконечно малая, если

$$\alpha_n = \frac{n}{n^3+1}; \quad \alpha_n = \frac{1}{n!}; \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

21. Доказать, что переменная β_n является бесконечно большой, если

$$\beta_n = (-1)^n n^2; \quad \beta_n = 2\sqrt{n}; \quad \beta_n = \ln(n+1).$$

22. Будет ли последовательность

$$x_n = n^{(-1)^{n/2}}$$

бесконечно большой?

Доказать равенства

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+10} - \sqrt{3n}) = 0.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5}{2n^2+3n+1} = \frac{3}{2}.$$

Пользуясь теоремой существования предела монотонной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

$$25. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

$$26. x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{n+1}{2n-1}.$$

27. Найти наибольший элемент последовательностей:

$$x_n = \frac{n^2}{2^n}; \quad x_n = \frac{\sqrt{n+1}}{10+n}.$$

28. Найти наименьший элемент последовательностей:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad x_n = n^2 - 9n - 10.$$

29. Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\lim x_n$, $\overline{\lim} x_n$, если

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{2+(-1)^n}{3} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

30. Какие числа являются частичными пределами последовательности

$$1, \frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{3}, -1, 1, \frac{1}{4}, -1, 1, \dots$$

Под *частичным пределом* произвольной ограниченной последовательности мы понимаем предел ее сходящейся подпоследовательности. Существование таких подпоследовательностей у ограниченной последовательности вытекает из теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательностей:

$$31. x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2}{2^n} \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\sin k^2}{2^k}.$$

$$32. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \quad 33. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{k(k+1)}.$$

§ 3. Функция. Предел функции

(см. [1], глава 3)

Найти область E задания функции $y=f(x)$ и образ $E_1=f(E)$ множества E при помощи функции f

$$34. y = \frac{1}{1+x^2}. \quad 35. y = \sqrt{2+3x-x^2}.$$

36. Найти $f(0)$, $f(x+2)$, $f(1/x)$, $f(x)+1$, $1/f(x)$, если

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Построить графики функций:

$$37. y = 8x - 2x^2. \quad 38. y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

$$39. y = -x^2 + 2x - 1. \quad 40. y = \frac{1-x}{1+x}. \quad 41. y = \frac{3x+4}{4x-3}.$$

42. Определить нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$, если

$$f(x) = x^2 \text{ на } [-2, 5]; \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{x} \text{ на } (0, 3].$$

Указание. На множестве $(0, 3]$ $\varphi(x) \geq 2$.

43. Построить графики функций:

$$f(x) = \sup_{0 \leq t \leq x} \{\sin t\}; \quad \varphi(x) = \inf_{0 \leq t \leq x} \{\sin t\}.$$



Найти пределы функций:

44. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + 3x^3}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{2x^2 - x + 4} \right)^x$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$; з) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$;

и) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$;

к) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}]$.

45. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$.

46. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}$.

47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

48. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0)$.

Исследовать на непрерывность, изобразить графически функции и определить характер точек разрыва.

49. $f(x) = |x - 1|$. 50. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

51. $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 2x - 3)$. 52. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$.

53. $y = \frac{x}{1+x}$. 54. $y = \operatorname{sign}(\cos x)$.

55. $y = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 56. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a + x, & x > 0. \end{cases}$

Доказать, что функции $f(x)$ равномерно непрерывны на $[a, b]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ (не зависящее от точек промежутка) такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

как только

$$|x_1 - x_2| < \delta.$$

$$57. f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 20 - 8x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$58. f(x) = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

59. Найти обратную функцию для функции

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Пусть $x \rightarrow 0$. Выделить главный член вида Ax^m .

$$60. f(x) = 3x + x^4. \quad 61. f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}.$$

§ 4. Производная

(см. [1], глава 4)

$$62. \text{Найти } f'(0), f'(2), \text{ если } f(x) = 2 - 2x + x^3.$$

$$63. \text{Найти } f'(0), f'(1), \text{ если } f(x) = x \arcsin \frac{x}{x+1}.$$

Найти производные функций:

$$64. y = \frac{2x}{1-x^2}.$$

$$65. \text{а) } y = x + \sqrt[3]{x}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{в) } y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}; \quad \text{г) } y = x\sqrt{1+x^2};$$

$$\text{д) } y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \text{е) } y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

$$\text{ж) } y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}; \quad \text{з) } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$\text{и) } y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}; \quad \text{к) } y = \frac{1}{\cos^n x};$$

$$\text{л) } y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}; \quad \text{м) } y = e^{e^x} + e^{e^{e^x}}; \quad \text{н) } y = x^{a^2} + a^{x^2} \quad (a > 0);$$

$$\text{о) } y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad \text{п) } y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

$$66. y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x. \quad 67. y = e^{-x^2}.$$

$$68. \text{а) } y = \sin x^2; \quad \text{б) } y = \sin^2 x; \quad \text{в) } y = \sin^3 x^2;$$

$$\text{г) } y = \cos(\sin x); \quad \text{д) } y = \cos x^2; \quad \text{е) } y = \cos^3 x^4.$$

$$69. \text{а) } y = \arcsin(x/a); \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg}(x/a);$$

$$\text{в) } y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}); \quad \text{г) } y = \arcsin(\sin x);$$

$$\text{д) } y = \arccos(x/a); \quad \text{е) } y = e^{x^2+x}.$$

$$70. y = \ln \operatorname{tg}(x/2).$$

71. а) $y = x \operatorname{arctg} x$; б) $y = \ln^3 x^2$;
 в) $y = \ln(\ln(\ln x))$; г) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
 д) $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$; е) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;
 ж) $y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$;
 з) $y = \frac{3}{2} (1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$;
 и) $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; к) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$;
 л) $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}$;
 м) $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} + \operatorname{arctg} x^6$; н) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;
 о) $y = x \operatorname{arctg} x - 0,5 \ln(1+x^2) - 0,5 (\operatorname{arctg} x)^2$;
 п) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.
 р) Имеет место формула

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{k1}(x) & \dots & a'_{kn}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1,1}(x) & \dots & a_{k+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

где элементы определителя $a_{ij}(x)$ дифференцируемые функции. Таким образом производная определителя n -го порядка равна сумме n определителей n -го порядка, каждый из которых отличается от исходного определителя тем, что в нем соответствующая строка заменена строкой из производных элементов этой строки.

Доказать формулу дифференцирования для определителей второго и третьего порядков.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

$$72. y = \begin{cases} 1-x, & -2 < x < 1, \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & 2 < x < 4. \end{cases}$$

$$73. y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти логарифмические производные (т. е. y'/y) функций y :

$$74. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$75. y = \operatorname{ch}^2 x.$$

Найти производные от гиперболических функций:

$$76. \text{ а) } y = \operatorname{sh}(x^2 + 1); \quad \text{ б) } y = \operatorname{sh}^3 x^3.$$

$$77. y = \operatorname{ch}^2(x^2 + x + 1).$$

$$78. \text{ а) } y = \operatorname{th}^3 x; \quad \text{ б) } y = \operatorname{th} x^2.$$

$$79. \text{ а) } y = \operatorname{th}(\ln x + 1); \quad \text{ б) } y = \operatorname{Arsh} x;$$

$$\text{ в) } y = \operatorname{Arsh}(x + \sqrt{1+x^2}); \quad \text{ г) } y = \ln \operatorname{sh} x;$$

$$\text{ д) } y = \operatorname{ch} \ln x; \quad \text{ е) } y = e^{\operatorname{th} x}; \quad \text{ ж) } y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x} \quad (x > 0);$$

$$\text{ з) } y = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 x}; \quad \text{ и) } y = \operatorname{th} \frac{x}{2} - \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

80. Для функции $f(x) = x^2 + x + 1$, определить дифференциал и приращение в точке $x=1$ для $\Delta x = 0,1$.

Найти дифференциалы функций:

$$81. d(xe^x). \quad 82. d(\operatorname{sh} x).$$

$$83. d(\operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x). \quad 84. d(\ln(1-x^2)).$$

Найти производные второго порядка от следующих функций:

$$85. \text{ а) } y = e^{-x^2} \equiv \exp(-x^2); \quad \text{ б) } y = x\sqrt{1+x^2}.$$

86. Пусть дан определитель (Вронского)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix},$$

где функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ непрерывны на (a, b) вместе со своими производными до n -го порядка включительно.

Доказать, что

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

$$87. y = x^5, \text{ найти } d^4 y.$$

$$88. y = e^x \ln x, \text{ найти } d^3 y.$$

Найти производные y'_x и y'_{x^2} от функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

89. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$. 90. $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

91. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

92. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

93. а) Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = 2 + x - x^3$$

в точке $A = (2, -4)$.

б) Выяснить, имеют ли общую касательную графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \ln(1 + 2x)$ в точке $(0, 0)$?

Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их точке пересечения с абсциссой $x = x_0$ называется угол φ между касательными к этим кривым в этой точке. Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) f'_2(x_0)},$$

где φ_1 , φ_2 — углы, образованные указанными касательными с осью x (рис. 1).

94. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ($0 < x < \pi$)?

95. Под каким углом пересекаются кривые $y = x^\alpha$ и $y = x^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ ($0 < \alpha < 1$) в точке $(1, 1)$?

96. Под каким углом кривая $y = \ln(1 + (x/\sqrt{3}))$ пересекает ось x ?

97. а) Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = (x-1)(x-2)$ на $[1, 2]$.

б) Многочлен $P_4(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$ имеет корень $x = 1$. Доказать, что многочлен $\frac{d}{dx} P_4(x)$ имеет действительный корень, принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

в) Доказать, что все корни многочлена $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n$ действительны и принадлежат к интервалу $(-1, 1)$.

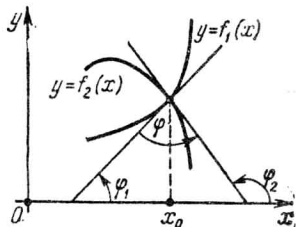


Рис. 1

98. Проверить справедливость теоремы Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ для функции

а) $y = 1 + x + x^3$;

б) $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, A, B, C — действительные числа;

в) $f(x) = Ax^3 + Bx + C$ на $[0, 1]$. Найти точку c .

99. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную производную на (a, b) ($|f'(x)| \leq M$), то

а) $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b) .

б) Если a и b — конечные числа, то $f(x)$ ограничена на (a, b) .

Указание. Пусть x — произвольная точка, а x_0 — фиксированная точка (a, b) . Тогда

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq \\ \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| = |f'(c)| |x - x_0| + |f(x_0)|,$$

где c находится между точками x и x_0 .

в) Если интервал (a, b) бесконечный, то функция $f(x)$ может быть неограниченной. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$ на $(1, \infty)$.

100. Определить промежутки монотонности у функций

а) $y = 3 + x - x^2$; б) $y = 4x - x^4$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (отрицательную) производную на (a, b) , то она возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Этот факт можно использовать при доказательстве неравенств.

Например, функция $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ непрерывна на $[0, \infty)$. Она возрастает на $[0, \infty)$, так как $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$ на $(0, \infty)$. Далее $\varphi(0) = 0$, поэтому

$$e^x - 1 - x > 0, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

На $(-\infty, 0)$ функция $\varphi(x)$ убывает, поэтому $e^x - 1 - x > \varphi(0) = 0$. Таким образом, $\forall x \neq 0$

$$e^x > 1 + x.$$

Доказать неравенства:

101. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ ($x > 0$).

102. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ ($x > 0$).