2004年上海大学博士学位论文 43

两类特殊矩阵相关问题研究

作　者：王广彬
专　业：计算数学
导　师：蒋尔雄

上海大学出版社
·上　海·

2004 年上海大学博士学位论文

两类特殊矩阵相关问题研究

作 者：王广彬
专 业：计算数学
导 师：蒋尔雄

上海大学出版社
· 上 海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

The Research on the Relative Problems of Two Classes of Special Matrices

Candidate: Wang Guang-bin
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Prof. Jiang Er-xiong

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	徐利治	教授，大连理工大学数学研究所	116024
委员：	曹志浩	教授，复旦大学数学研究所	200433
	陈果良	教授，华东师范大学数学系	200062
	王国荣	教授，上海师范大学数理信息学院	200234
	马和平	教授，上海大学数学系	200444
导师：	蒋尔雄	教授，上海大学数学系	200444

评阅人名单：

曹志浩	教授，复旦大学数学研究所	200433
魏木生	教授，华东师范大学数学系	200062
王国荣	教授，上海师范大学数理信息学院	200234

评议人名单：

薛军工	教授，复旦大学数学研究所	200433
詹兴致	教授，华东师范大学数学系	200062
黄廷祝	教授，电子科技大学应用数学学院	610054
刘仲云	教授，长沙理工大学数学与计算科学学院	410076

答辩委员会对论文的评语

王广彬同学的博士论文“两类特殊矩阵相关问题研究”，首先对有广泛实际应用的 H 矩阵，给出两种新的、实用的判据，其中的一些证明有较大难度。并用例子显示：已知的判据不能判定时，本文的判据能判定。

其次利用 H 矩阵的判据，导出估计线性定常系统稳定度的方法。并对逆 H 矩阵进行了研究，给出了一些新的性质。

最后深入讨论了非奇异 H 阵为系数矩阵的方程组的交替迭代法的收敛性，并探讨了奇异 H 矩阵和 Hermite 半正定矩阵迭代法的收敛性。

这些结果都有所创新，反映作者在数值代数方面有较坚定的基础和较强的科研能力。特别在 M 矩阵、H 矩阵方面研究比较深入，掌握文献比较全面。论文达到了博士论文水平，是一篇良好的博士论文。

答辩委员会表决结果

通过无记名投票，答辩委员会一致同意通过王广彬同学的博士学位论文答辩，并建议授予理学博士学位。

答辩委员会主任：徐利治

2004 年 5 月 27 日

摘 要

本文研究了在理论和实际应用中有重要用途的 H 矩阵和 Hermite 正半定矩阵的相关问题，包括非奇 H 矩阵的判据、非奇 H 矩阵在线性系统的稳定性中的应用、逆 H 矩阵的基本性质以及系数矩阵分别为 H 矩阵和奇异 Hermite 正半定矩阵的线性代数方程组迭代法的收敛性. 全文共分为八章.

第一章为前言，介绍了选题背景. 第二章给出了非奇 H 矩阵的判据，并给出了数值例子以表明所给判据的优越性. 第三章讨论了非奇 H 矩阵在线性定常系统的稳定性中的应用，给出了线性定常系统稳定度的判据. 第四章在文 [16] 给出的逆 H 矩阵定义的基础上，进一步得到了逆 H 矩阵的新的性质. 第五章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组广义交替迭代法的收敛性定理，并给出了当系数矩阵为非奇 M 矩阵 (非奇 H 矩阵的子类) 时迭代矩阵的谱半径的比较定理. 第六章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组并行交替迭代法的收敛性定理，并给出了当系数矩阵为非奇 M 矩阵 (非奇 H 矩阵的子类) 时迭代矩阵的谱半径的比较定理. 第七章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组两级多分裂迭代法的收敛性定理. 第八章给出了系数矩阵分别为奇异 H 矩阵和奇异 Hermite 正半

定矩阵的线性代数方程组外插迭代法的收敛性定理.

关键词: 非奇 H 矩阵, 逆 H 矩阵, 奇异 H 矩阵, 奇异 Hermite 正半定矩阵, 迭代法

Abstract

In this dissertation, some criteria of nonsingular H-matrix, some new basic properties of inverse H-matrix and the convergence theorems of some iterative methods for the system of linear equations are given. There are eight chapters altogether.

In chapter 1, the background of this dissertation is introduced. In chapter 2, some criteria for nonsingular H-matrix are given and some examples are presented to show the superiority of the criteria. In chapter 3, the criteria for the degree of stability of linear ordinary system are given. In chapter 4, some new basic propeties of inverse H-matrix are studied on the basis of paper [16]. In chapter 5, the convergence of generalized alterating iterative method for the system of linear equations is studied when the coefficient matrix is a nonsingular H-matrix and some comparison theorems of spectral radius of the iterative matrix are given when the coefficient matrix is a nonsingular M-matrix (a subclass of nonsingular H-matrix). In chapter 6, the convergence of parallel alterating iterative method for the system of linear equations is studied when the coefficient matrix is a nonsingular H-matrix and some comparison theorems of spectral radius of the iterative matrix are given when the coefficient matrix is a nonsingular M-matrix (a subclass of nonsingular H-matrix). In chapter 7, the convergence of two-stage multisplitting iterative method for the system of linear equations is studied when the coefficient matrix is a nonsingular H-matrix. In chapter 8, the convergence of the extrapolated iterative methods for the system of linear equations is studied when the coefficient matrix is a singular H-matrix and a singular Hermitian positive semidefinite matrix, respectively.

Keywords: nonsingular H-matrix, inverse H-matrix, singular H-matrix, singular Hermitian positive semidefinite matrix, iterative method.

目　录

第一章 前 言

1.1 选题背景

现代科技的发展让数学理论和方法发生了很大的变化，计算机应用的普及和算法的多样性，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景. 在实践中，常会遇到一些具有某种特殊形式或具有某些数值特征的矩阵. 例如：在均衡论、投入产出分析的研究中产生的 M 矩阵；在控制论及神经网络大系统的稳定性、线性时滞系统的稳定性研究中需要 H 矩阵、Hermite 正半定矩阵的理论. 对这些特殊矩阵进行专门细致地研究不仅会推动矩阵论的发展，而且也会补充数学理论本身，这在很多数学问题中将会产生很大影响.

由于 H 矩阵对稳定性的研究非常重要，所以对它的研究经久不衰，并且越来越多地引起更多数学工作者的重视. 目前对它的研究主要集中在两个方面：一是研究它本身的数学性质；二是研究与它有关的一些算法. 自 1937 年由 A. Ostrowski 在文 [1] 中引入 H 矩阵的概念并研究了 H 矩阵的一些简单性质以来，对它本身性质的研究已较为深刻. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}$ 为 H 矩阵的

最为直观的定义是其比较矩阵 $\langle \boldsymbol{A} \rangle = (\tilde{a}_{ij})$ 为 M 矩阵 [2], 其中

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |\, a_{ii} \,|, & i = j; \\ -\,|\, a_{ij} \,|, & i \neq j. \end{cases}$$

这样一来, 对 H 矩阵的研究有助于 M 矩阵的研究, 从而也会促进对均衡论、投入产出分析的研究. 在研究对角占优矩阵时定义了广义对角占优矩阵 [3], 后来证明其与 H 矩阵等价. 这样从不同的角度、不同的问题背景提出的两种概念在纯数学上是等价的. 这就为 H 矩阵理论的研究与发展奠定了宽厚的基础. 1969 年, F. Robert 在文 [4] 中研究线性代数方程组的块迭代解法及算法的收敛性问题时提出了块 H 矩阵的概念. 1987 年, B. Polman 在文 [5] 中研究 H 矩阵的不完全因子分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} - \boldsymbol{R}$ 时又对块 H 矩阵的定义进行了改进. 此后有许多数学工作者对此作了大量深入细致地研究, 并提出了 I 型块 H 矩阵、 II 型块 H 矩阵等概念. H 矩阵的研究之所以能引起许多数学工作者的重视, 另外一个重要的原因是因为对于线性代数方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 当其系数矩阵为 H 矩阵时, 一些经典的迭代算法如: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, AOR 等均是收敛的, 并且就目前提出的许多广义及修正的迭代算法如: GJ, GSOR, GAOR, MSOR, MAOR 等以及相关的多重分裂并行算法也收敛.

既然 H 矩阵的用处如此广泛, 那么自然要考虑满足哪些条件的矩阵是 H 矩阵, 即其判据. 本文在这方面做些研究. 文中具体的数值例子可说明本文所给判据的优越性.

由于求解偏微分方程的差分法、有限元法、边界元法、区域

分解法等都是通过适当的离散化，把原方程化成系数矩阵为大型稀疏矩阵的线性代数方程组，然后通过求解线性代数方程组来完成计算. 因此大型稀疏线性代数方程组的求解问题一直是数值代数的的主攻课题之一. 许多数学工作者对此作了深入细致地研究，并提出了一些算法. 本文研究了当系数矩阵分别为 H 矩阵和奇异 Hermite 正半定矩阵时的某些算法的收敛性.

1.2 论文的主要工作

本文研究了在理论和实际应用中有重要用途的 H 矩阵和 Hermite 正半定矩阵的相关问题，包括非奇 H 矩阵的判据、非奇 H 矩阵在线性系统的稳定性中的应用、逆 H 矩阵的基本性质以及系数矩阵分别为非奇 H 矩阵、奇异 H 矩阵和奇异 Hermite 正半定矩阵的线性代数方程组迭代法的收敛性. 主要工作共分为七章.

第二章给出了非奇 H 矩阵的判据. 第三章给出了线性定常系统稳定度的判据. 第四章在文 [12] 给出的逆 H 矩阵定义的基础上，进一步得到了逆 H 矩阵的新的性质. 第五章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组广义交替迭代法的收敛性定理. 第六章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组并行交替迭代法的收敛性定理. 第七章给出了系数矩阵为非奇 H 矩阵的线性代数方程组两级多分裂迭代法的收敛性定理. 第八章给出了系数矩阵分别为奇异 H 矩阵和奇异 Hermite 正半定矩阵的线性代数方程组外插迭代法的收敛性定理.

第二章 非奇 H 矩阵的判据

2.1 基本概念

记 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 表示 n 阶实方阵的集合， $\mathrm{C}^{n\times n}$ 表示 n 阶复方阵的集合， $R_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, N=\{1,2,\cdots,n\}, i,j\in N$.

定义 2.1.1 [2] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}$. 若 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$. 其中 $\boldsymbol{B}\geq 0$. $s\geq\rho(\boldsymbol{B})$. 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M 矩阵. 若 $s>\rho(\boldsymbol{B})$. 则 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 M 矩阵.

定义 2.1.2 [2] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathrm{C}^{n\times n}$. $\boldsymbol{A}$ 为非奇 H 矩阵的定义是其比较矩阵 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=(\tilde{a}_{ij})$ 为非奇 M 矩阵，其中

$$\tilde{a}_{ij}=\begin{cases}|\,a_{ii}\,|, & i=j;\\ -|\,a_{ij}\,|, & i\neq j.\end{cases}$$

需要指出 $\boldsymbol{A}$ 为非奇 H 矩阵的一个等价定义是 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵 [3].

定义 2.1.3 [6] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathrm{C}^{n\times n}$. 若 $|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A}), i\in N$. 则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵，并记为 $\boldsymbol{A}\in D$; 若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$. 使得 $\boldsymbol{AX}\in D$. 则称 $\boldsymbol{A}$ 是广义严格对角占优矩阵，并记为 $\boldsymbol{A}\in GD$.