高等代数思想方法及应用

卢 博　田双亮　张 佳 编著

科 学 出 版 社

高等代数思想方法及应用

卢 博 田双亮 张 佳 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书较为全面、系统地通过经典结论、典型例子等方式, 一方面归纳了高等代数中所蕴含的数学思想方法, 另一方面探讨了高等代数在数学以及其他学科的应用. 内容包括: 公理化思想、分解思想、递推思想、归纳与演绎方法、矩阵方法等思想方法与行列式、矩阵、多项式、线性空间等在数学及其他学科中的应用.

本书可作为数学专业高年级本科生的选修课教材, 也可供其他专业的教师和学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数思想方法及应用/卢博, 田双亮, 张佳编著. —北京: 科学出版社, 2016.11

ISBN 978-7-03-050872-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①卢… ②田… ③张… Ⅲ. ①高等代数-思想方法 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 280473 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 1 月第一次印刷 印张: 13 3/4
字数: 267 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

高等代数是数学与应用数学专业最主要、最基础的课程之一, 是初等代数的延伸和拓展, 该课程以各种代数结构及其性质为主要研究对象, 体现着丰富而又深刻的思想方法. 学习高等代数的思想方法及应用对于掌握高等代数的知识和发展规律、加深对高等代数的理解、培养代数学能力有着重要的作用.

本书在高等代数的基础上, 结合作者的学习、教学和科研, 并查阅资料、咨询同行, 通过经典结论、典型例子等提炼, 较为全面、系统地总结了高等代数中所蕴含的常见数学思想方法和独特数学思想方法, 也探索了高等代数在数学以及其他学科的应用. 主要包括:

(1) 数学思想方法: 公理化思想方法, 分解思想方法, 递推思想方法, 归纳与演绎思想方法, 矩阵思想方法, 线性方程组思想方法, 降阶思想方法, 同构的思想方法, 矩阵初等变换的方法.

(2) 应用: 行列式的应用, 如行列式与体积的关系; 矩阵的应用; 多项式的应用, 如多项式在密码中的应用; 线性空间与线性映射的应用; 模型中高等代数的应用.

本书具有以下特征:

(1) 本书内容由专题组成, 内容编排以思想方法为线索, 旨在让学生对思想方法的掌握更具整体性.

(2) 本书通过具体实例来阐述相关思想方法, 从而使读者易于理解和掌握.

(3) 部分专题的内容具有较强的启发性, 有助于读者理解数学的本质和内在的数学思想方法; 部分专题是关于高等代数的应用, 具有一定实际背景, 能体现数学的科学价值和应用价值.

非常感谢西北民族大学数学与计算机科学学院的鼓励与支持; 本书的编写与出版得到了国家民委应用数学重点学科 (项目编号:1001672219), 西北民族大学科研创新团队, 西北民族大学研究生教育教学改革研究项目和国家自然科学基金 (项目编号:11501451) 的资助, 在此一并表示感谢.

由于作者水平有限, 书中定有许多不足之处, 敬请读者批评指正.

作　者

2016 年 10 月 1 日

目　录

第 1 讲　公理化的思想方法

1.1　概　　念

公理化思想方法, 就是从尽可能少的、无定义的原始概念 (基本概念) 和一组不证自明的命题 (基本公理) 出发, 利用纯逻辑推理法则, 去定义其他概念, 证明其他命题, 把一门理论建成演绎系统的思想方法. 公理化方法在近代数学的发展中起着巨大的作用，对现代数学的各个分支有着极其深刻的影响. 公理化思想方法的出发点是给出的基本原始概念和一组基本公理, 这就要求这些基本原始概念和基本公理要符合以下要求.

相容性: 也称为无矛盾性或和谐性, 是指同一系统中的公理不能自相矛盾. 而且由这些公理推出的所有结论中, 也不能含有两个相互矛盾的命题.

独立性: 是指公理系统中的每个公理, 都不能由其他公理用逻辑推导的方法导出, 从而保证公理系统尽可能简洁, 使得公理系统中的公理数目尽可能少.

完备性: 是指公理系统的所有模型都同构. 而模型的同构是指公理系统的两个模型 (X, R) 与 (Y, S)(X, Y 是两个集合, R, S 分别是这两个集合中的关系), 如果它们之间存在一个双射 $f : X \to Y$, 使得 $x_1 R x_2$ 时有 $y_1 S y_2$, 反之也成立 (其中 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$). 模型同构意味着它们的元素之间的关系结构是一样的, 仅仅是元素的名称与具体含义不同而已.

公理化思想的源泉可追溯到毕达哥拉斯时代, 当时人们从明确的原始假设出发, 通过一定的演绎推理, 推出所要证明的判断. 一般认为, 公理化的雏形形成标志是公元前 2 世纪左右. 古希腊数学家欧几里得 (约公元前 330~前 275) 搜集了当时已有的几何材料, 继承和发扬了毕达哥拉斯、亚里士多德等的公理化思想, 提炼出一些基本概念与公理 (5 条公设和 9 条公理), 按照逻辑的规则, 运用演绎的方法, 构成一个有机的整体, 编撰成《几何原本》一书.

20 世纪以来, 公理化思想在数学中得到了广泛的应用, 现代代数学、现代概率论等各数学分支都是用公理化方法建立起来的. 物理学的公理化作为希尔伯特第六问题, 自 20 世纪初提出以来也获得了很大进展. 时至今日, 公理化方法已经成为现代数学中一个重要的思想方法. 当然, 公理化思想也不是数学所专有的思想方法, 在其他学科中也有广泛的应用.

代数学中的主要研究对象是代数结构. 例如：群、环、域、模等. 高等代数是

代数学的一个重要组成部分. 线性 (向量) 空间作为特殊的模类是高等代数中最基本的概念之一, 也是高等代数中一个重要的内容. 线性空间体现着许多公理化的思想方法.

1.2 应　用

线性空间是度量空间的基础, 也是几何空间的推广, 是众多研究对象共同的抽象化产物, 其理论方法在数学的其他分支及物理、化学、计算机科学、管理学等领域都有着广泛的应用.

线性空间是在研究大量数学对象的基础上, 提取它们的共性, 最后以公理化形式给出的一个定义. 具体定义如下.

定义 1.2.1　设 V 是一个非空集合, F 是一个数域. 如果 V 中定义了一个加法运算 (即 $V \times V$ 到 V 的一个映射), V 的元素与 F 的元素之间定义了一个纯量乘法运算 (即 $F \times V$ 到 V 的一个映射), 并且满足下述 8 条运算法则 ($\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in F$):

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (加法交换律);

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (加法结合律);

(3) V 中有一个元素, 记作 0, 使得对任意的 $\alpha \in V$, 有

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

具有该性质的元素 0 称为 V 的零元素;

(4) 对于 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in V$, 使得

$$\alpha + \beta = 0,$$

具有该性质的元素 β 称为 α 的负元素;

(5) $1\alpha = \alpha$, 其中 1 是 F 的单位元;

(6) $(kl)\alpha = k(l\alpha)$;

(7) $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$,

那么称 V 是数域 F 上的一个线性空间.

线性空间这一概念具有高度的抽象性. 首先, 它的元素是抽象的, 就是对一个具体的线性空间而言, 它的元素不一定是数, 可以是向量、矩阵、多项式、函数等; 其次, 它的运算也是抽象的, 加法未必就是通常的加法, 更不必是数的加法, 数乘也不必是通常的乘法. 在线性空间的定义中, 两种运算并没有具体规定, 只要能满足定义中的 8 条运算公理即可.

例 1.2.2 设 $\mathbb{R}$ 为实数域, $\mathbb{R}^+$ 是所有正实数构成的集合. 规定: 加法 $a\oplus b=ab$, 数量乘法 $k\cdot a=a^k(a,b\in\mathbb{R}^+,k\in\mathbb{R})$, 则 $\mathbb{R}^+$ 对于规定的加法和数量乘法作成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

证明 加法满足下面四条规则:

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$;

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus bc=a\oplus(b\oplus c)$;

(3) $\mathbb{R}^+$ 中有零元素 1, 对任意的 $a\in\mathbb{R}^+$, 都有 $a\oplus 1=a$;

(4) 任意的 $a\in\mathbb{R}^+$ 都有负元素 $a^{-1}\in\mathbb{R}^+$, 使得 $a\oplus a^{-1}=1$.

数量乘法满足下面两条规则:

(1) $1\cdot a=a^1=a$;

(2) $k\cdot(l\cdot a)=k\cdot(a^l)=(a^l)^k=a^{lk}=(kl)\cdot a$.

数量乘法与加法满足下面两条规则:

(1) $(k+l)\cdot a=a^{k+l}=a^k\cdot a^l=a^k\oplus a^l=(k\cdot a)\oplus(l\cdot a)$;

(2) $k\cdot(a\oplus b)=k\cdot(ab)=(ab)^k=a^kb^k=(a^k)\oplus(b^k)=(k\cdot a)\oplus(k\cdot b)$. 这里, $k,l\in\mathbb{R}$, $a,b,c\in\mathbb{R}^+$.

因此, $\mathbb{R}^+$ 对于规定的加法和数量乘法作成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

注记 任意非 1 的正实数都可作为基, 如 2, 3, 故 $\dim\mathbb{R}^+=1$.

例 1.2.3 实数集

全体实数集对于实数的加法, 以及有理数和实数的乘法是否形成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间?

解 由于 $(-1)\sqrt{3}=-\sqrt{3}\notin\mathbb{R}^+$, 所以有理数和实数的乘法不是 $\mathbb{R}^+$ 的数量乘法. 从而 $\mathbb{R}^+$ 对于实数的加法以及有理数和实数的乘法不是 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

线性映射、同构映射、线性变换、(双) 线性函数等基本概念都包含着丰富的公理化思想.

定义 1.2.4 设 V 与 V' 是数域 F 上两个线性空间. 如果 V 到 V' 的一个映射 f 保持加法运算和数量乘法运算, 即

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta),\quad \forall\ \alpha,\beta\in V; \tag{1.2.1}$$

$$f(k\alpha)=kf(\alpha),\quad \forall\ \alpha\in V,\quad k\in F, \tag{1.2.2}$$

那么称 f 是 V 到 V' 的一个线性映射. 进一步, 若 f 是一一映射, 则称 f 是同构映射.

线性空间 V 到自身的线性映射通常称为线性变换. 数域 F 上的线性空间 V 到 F 的线性映射称为 V 上的线性函数.

例 1.2.5　用 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上所有实连续函数组成的集合, 它对于函数的加法和数量乘法构成 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间. 函数的定积分 (记作 J) 是 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射:

$$J(f(x)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

根据定积分的性质立即得出, J 是 $C[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个线性映射.

例 1.2.6　在 V_3 中, 设 x 轴, y 轴, z 轴正方向的三个单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 V_3 的一个基. 对 V_3 的任一向量 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$, 规定 $\sigma(\alpha) = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$. 那么, 容易验证映射 σ 是 V_3 的线性变换. σ 的几何意义是把 V_3 的向量 α 投影到由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 所决定的 Oxy 平面上. 如图 1.2.1 所示.

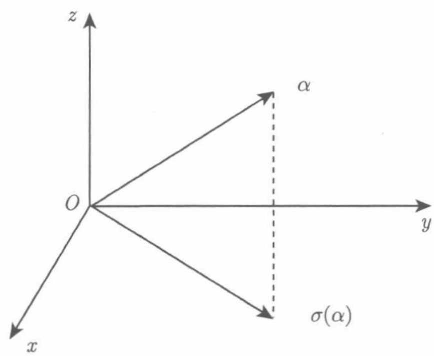

图 1.2.1

公理化思想方法是贯穿高等代数的一种重要方法, 其他的留给读者去探索发现.

第 2 讲　矩阵的思想方法

矩阵是数学中一个重要的基本概念，是代数学的重要研究对象之一，也是数学与其他领域研究与应用的一个重要工具.

所有矩阵对矩阵的运算 (加、减、乘、数乘、转置、逆) 可以构造出多种代数结构. 例如：

数域 F 上的所有 n 阶矩阵及相关数域 F 对于矩阵的加法和数量乘法构成线性空间；

数域 F 上的所有 n 阶矩阵对于矩阵的加法构成 Abel 群；

数域 F 上的所有 n 阶数量矩阵及相关数域 F 对于矩阵的加法和乘法构成域.

所谓矩阵思想，就是指利用转化的思想、同构的方法，把研究的问题转化成相应的矩阵问题，相应的矩阵问题解决后，利用反演的思想还原成原问题解的一种思想方法. 矩阵思想是高等代数中非常重要的一个思想方法，并且这一思想方法贯穿整个高等代数. 因此，矩阵及其表示不仅是一种重要的数学思想，而且是一种有效的解题方法.

2.1　多项式理论中矩阵的思想方法

下面 $F[x]$ 表示数域 F 上的全体多项式.

设 $f(x) \in F[x]$，且 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$，即有

$$f(x) = (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0)\begin{pmatrix} x^n \\ x^{n-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

则称 $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0)$ 为多项式 $f(x)$ 的矩阵表示. 由此不难得到：

多项式环 $F[x]$ 与向量空间 F^{n+1} 之间是同构的，即它们之间可以建立一一对应关系：

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \leftrightarrow (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0).$$

设 $g(x) \in F[x]$, 且 $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, 即

$$g(x) = (b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0)\begin{pmatrix} x^m \\ x^{m-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的运算有:

(1) 多项式加法和减法的矩阵表示:

$$f(x) \pm g(x) = (a_m \pm b_m, a_{m-1} \pm b_{m-1}, \cdots, a_1 \pm b_1, a_0 \pm b_0)\begin{pmatrix} x^m \\ x^{m-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中不妨设 $m \geqslant n$, $a_m = a_{m-1} = \cdots = a_{n+1} = 0$.

(2) 多项式乘法的矩阵表示:

$$f(x)g(x) = (a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0)C\begin{pmatrix} x^{m+n} \\ x^{m+n-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(m+n+1)}.$$

2.2　行列式中矩阵的思想方法

行列式在高等代数中可谓贯穿始终. 行列式的性质包括行列式的转置、行列式的分解、零值行列式和行列式的初等变换. 值得注意的是行列式的初等变换与矩阵的初等变换是完全相同的, 而这个性质是行列式最基本也是最重要的性质.

于是, 行列式的计算、证明都可以转化成矩阵来处理, 只要相应的矩阵问题能够解决, 那么原行列式问题也就迎刃而解了 (注意: 这里也是利用了转化的思想).

例 2.2.1　计算行列式 $D=|a_{ij}|_n$, 其中 $a_{ij}=j+a_i$, $i,j\in[1,n]$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & \cdots & n+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & \cdots & n+a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 2+a_n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}.$$

行列式 D 所对应的矩阵记为

$$A=\begin{pmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & \cdots & n+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & \cdots & n+a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_n & 2+a_n & \cdots & n+a_n \end{pmatrix}.$$

通过计算知秩 $A<n$, 从而可得矩阵 A 不可逆, 故 $D=0$.

例 2.2.2　证明: n 阶循环行列式

$$|D_n|=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1}),$$

其中 $1,\varepsilon$, ε^2, $\cdots$, ε^{n-1} 为全部 n 次单位根 (其中 ε 为 n 次本原单位根), $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$.

证明　设 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $D_n=a_1E+a_2A+\cdots+a_nA^{n-1}=f(A)$, 且 A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\lambda^n-1$, 即 A 的特征值为全部 n 次单位根: $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 矩阵 $f(A)$ 的特征值为 $f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),\cdots,f(\varepsilon_n)$, 所以

$$|D_n| = |f(A)| = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n).$$

2.3 线性方程组中矩阵的思想方法

所谓一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.3.1}$$

的方程组, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示未知量, m 是方程的个数. 上述方程组是由 m 个含有 n 个未知量的线性方程组成的线性方程组, 其中 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的系数, $b_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为常数项.

线性方程组 (2.3.1) 是否存在解及存在什么形式的解, 完全取决于其未知量的系数和常数项. 因此, 在讨论线性方程组是否可解时, 主要研究它的系数和常数项的变化, 即研究方程组 (2.3.1) 的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

和增广矩阵

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

如果秩 A 等于秩 $\bar{A}$, 那么方程组 (2.3.1) 有解, 且若秩 A 等于未知量的个数, 则 (2.3.1) 有唯一解; 若秩 A 小于未知量的个数, 则 (2.3.1) 有无穷多个解; 如果秩 A 与秩 $\bar{A}$ 不相等, 那么方程组 (2.3.1) 无解.

解线性方程组 (2.3.1) 的方法是利用转化的方法把方程组对应成矩阵形式, 然后利用矩阵的初等变换和第一种初等列变换化为约化阶梯矩阵求解.

利用矩阵求解线性方程组的方法深刻渗透着矩阵的思想方法. 此方法的理论依据是矩阵与线性方程组之间可以建立一一对应的同构关系.

例 2.3.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3-x_4-3x_5=-2, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1, \\ 4x_1+6x_2-2x_3-4x_4+3x_5=7, \\ 2x_1-2x_2+4x_3-7x_4+4x_5=1, \end{cases}$$

且将其通解用对应的齐次线性方程组的基础解系来表示.

解 该方程组的增广矩阵为

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -4 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 4 & -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

对 $\bar{A}$ 施行初等行变换可化为约化阶梯形矩阵, 即

$$\begin{aligned} \bar{A} &\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & -2 & 2 & -5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -4 - t_1 + 6t_2, \\ x_2 = \dfrac{5}{2} + t_1 - \dfrac{5}{2}t_2, \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = -2 + 3t_2, \\ x_5 = t_2. \end{cases}$$

令 $t_1 = 0, t_2 = 0$, 则易得方程组的一个特解

$$\xi_0 = \left(-4, \frac{5}{2}, 0, -2, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

故该方程组的通解可表示为

$$\xi = \begin{pmatrix} -4 \\ \dfrac{5}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -\dfrac{5}{2} \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 t_1, t_2 为任意常数.

至此, 我们用具体的例子说明了运用矩阵理论解线性方程组的思想方法, 从而为解线性方程组提供了新的思想方法和技巧.

2.4　二次型中矩阵的思想方法

定义 2.4.1　设 F 是一个数域, F 上 n 元二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

叫做 F 上的一个 n 元二次型.

在定义 2.4.1 中令 $a_{ij} = a_{ji} (1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 因为 $x_ix_j = x_jx_i$, 所以 (2.4.1) 式可以写成以下形式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.4.2}$$

令 $A=(a_{ij})$ 是 (2.4.2) 式右端系数所构成的矩阵, 称为二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵. 注意到 $a_{ij}=a_{ji}$, 则 A 是 F 上一个 n 阶对称矩阵. 进而由矩阵的乘法, (2.4.2) 式可写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

综上, 二次型通过二次型的矩阵与对称矩阵之间建立一一对应关系:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

一般地, 二次型问题都可以转化成相应的对称矩阵问题. 如果相应的对称矩阵问题得以解决, 则原二次型问题也就顺利解决.

问题 二次型与上三角矩阵有何关系?

例 2.4.2 将下列二次型

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4$$

化成规范形, 并求出所用的非退化 (可逆) 线性变换.

解 二次型 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4$ 所对应的对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

故