随 机 场

〔英〕C. 蒲瑞斯顿 著

严士健 陈木法 丁万鼎 译

北京师范大学出版社

随　机　场

〔英〕C．蒲瑞斯顿著
严士健 陈木法 丁万鼎　译

北京师范大学出版社
1982年12月

随 机 场

〔英〕C. 蒲瑞斯顿 著

严士健 陈木法 丁万鼎 译

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

湖南省新华印刷二厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：6 字数：121千

1982年12月第1版 1982年12月第1次印刷

印数：1—8,000

统一书号：13243·29 定价：0.65元

Chris Preston

RANDOM FEILDS

(Lecture Notes in Mathematics 534)

Springer-Verlag 1976

内 容 简 介

本书包括了从1965 年以来发展起来的随机场的基本理论，它给出了一个用近代概率论语言统一描述统计物理中许多模型的平衡性质的一个框架，可以作为了解、学习和研究这一新的数学及数学物理分支的入门书。

全书共九节，除第1节导言外，分三部分，第 2、3、4 节在很一般的条件下讨论了 Gibbs 态(随机场)与不变Gibbs 态的存在性问题及其基本性质. 第 5、6 节讨论格点模型、连续模型及一些重要例子，介绍了一些结果. 第 7、8、9 节主要是针对格点模型讨论了Gibbs 态的热力学性质及唯一性的有关问题.

本书可供数学工作者(特别是概率论方面的科学工作者)、数学物理工作者、统计物理工作者及高等学校有关专业的师生阅读参考之用.

译 者 序

借这份译稿出版的机会，向读者介绍一些有关随机场的发展情况，希望这个新的概率论分支能在我国概率论、数学物理以及统计物理的某些发展中起到它应起的作用。

相变问题是统计物理中一个十分重要的问题，无论是方法还是问题，它都引起了很多深刻的研究，由于相变现象是一种在有穷粒子系统中不会出现的集体现象，它本质上是无穷粒子系统的一种属性。所以统计物理研究这种现象的通常途径是：对于给定的哈密顿量，让由它决定的有穷粒子系统按某种方式逐步扩大成无穷粒子系统，以考察系统的某些参数(如长程序(LRO)参数，比能等)的特性。六十年代中期，Griffiths(1964)，Добрушин(Dobrushin，1965)对Ising模型的相变问题用概率论的方法作了新的处理，随后Добрушин(1968)，Lanford与 Ruelle(1969)，用近代数学工具直接对无穷粒子系统给出了平衡态(Gibbs态)的定义，进一步的演变就成为本书中用条件期望的现代语言给出无穷系统的Gibbs态的抽象方式。

为了帮助读者对这种很抽象的Gibbs态的定义有一个较具体的理解，我们以Ising模型为例作一点解释：设S为一有限集，例如它是有限个二维(或三维)整点组成的集，它的点表示铁磁粒子所在的位置，对每一$u\in S$，有一集$Y_u=\{-1,1\}$，它表示在u处粒子的自旋(-1，1分别表示下、上自旋)。

$X \triangleq \prod_{u \in S} Y_u$表示集类

$$\{x: x=\{x_u: u\in S\}, x_u\in Y_u, u\in S\}.$$

于是$x=\{x_u: u\in S\}\in X$表示系统的一个组态，它在u处的粒子的状态是x_u。对任何u，$v\in S$，$u\neq v$，有一$J_{u,v}\geqslant 0$，它是在u,v处的粒子之间的交互作用的强度。于是系统的平衡态为

$$(1)\qquad P(\{x\})\triangleq \exp\left\{-\frac{1}{kT}U(x)\right\}\Big/Z,\quad x\in X,$$

其中

$$(2)\qquad U(x)=-\sum_{\substack{u,v\in S\\ u\neq v}} J_{uv}x_u x_v,$$

$$(3)\qquad Z=\sum_{x\in X}\exp\left\{-\frac{1}{kT}U(x)\right\}.$$

对任何$\Lambda\subset S$，我们可以如上定义$X(\Lambda)=\prod_{u\in\Lambda} Y_u$，$x\in X(\Lambda)$可写成$\{x_u: u\in\Lambda\}$，$x_u\in Y_u$，对于任何$x=\{x_u: u\in S\}\in X$，称$x_\Lambda \triangleq \{x_u: u\in\Lambda\}$为$x$在$X(\Lambda)$上的投影，用物理语言就是：若$S$上的系统的组态为$x$，则$x_\Lambda$表示此时$\Lambda$中那一部分系统（即子系统）的组态。对任何$y=\{y_u: u\in\Lambda\}\in X(\Lambda)$，$z=\{z_u: u\in S\setminus\Lambda\}\in X(S\setminus\Lambda)$，$y\times z$表示$\{x_u: x_u=y_u,\ u\in\Lambda;\ x_u=z_u, u\in S\setminus\Lambda\}\in X$。

不难证明：对任何$y\in X(\Lambda)$，$z\in X(S\setminus\Lambda)$，系统在$S\setminus\Lambda$上的子系统的组态为$z$的条件下，$\Lambda$上的子系统的组态为$y$的条件概率

$$(4)\qquad P(\{x\in X: x_\Lambda=y\}\mid\{x\in X: x_{S\setminus\Lambda}=z\})=\sigma_\Lambda^z(\{y\})$$

其中

$$(5)\qquad \sigma_\Lambda^Z(\{y\}) \triangleq \exp\left\{-\frac{1}{kT}U_\Lambda(y;z)\right\}\Big/ Z_\Lambda(z),$$

$$(6)\qquad U_\Lambda(y;z) \triangleq -\sum_{\{u,\ v\}\cap\Lambda\neq\phi} J_{uv}(y\times z)_u(y\times z)_v,$$

$$(7)\qquad Z_\Lambda(z) = \sum_{y_1\in X(\Lambda)} \exp\left\{-\frac{1}{kT}U_\Lambda(y_1;z)\right\}$$

它们可以分别理解为：系统在Λ外的组态为z的条件下，Λ中的系统的平衡态、内能及配分函数。

事实上，由(1)知

$$(8)\qquad (4)\text{的左边} = \frac{P(\{y\times z\})}{\sum\limits_{y_1\in X(\Lambda)} P(\{y_1\times z\})}$$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{kT}U(y\times z)\right\}}{\sum\limits_{y_1\in X}\exp\left\{-\frac{1}{kT}U(y_1\times z)\right\}},$$

而由(2),(6)知

$$U(y_1\times z) = U_\Lambda(y_1;z) - \sum_{\substack{\{u,\ v\}\cap\Lambda=\phi\\ u\neq v}} J_{uv}(y_1\times z)_u(y_1\times z)_v$$

$$= U_\Lambda(y_1;\ z) - \sum_{\substack{u,\ v\bar{\in}\Lambda\\ u\neq v}} J_{uv}z_uz_v.$$

将此式代入(8)式右边并应用(5)式即得(4)式。

另一方面，由(4)式及全概率公式立得

$$(9)\qquad P(\{x\in X: x_\Lambda = y\}) =$$

$$\sum_{z\in X(S\setminus\Lambda)} \sigma^z_\Lambda(\{y\})P(\{x\in X:\quad x_{S\setminus\Lambda}=z\}),\qquad y\in X(\Lambda).$$

当 S 为可数集时，由于X是不可数集，所以系统的平衡态不能由(1)来定义。但是只要J_{uv}满足一定的条件，对S的任何有限子集Λ及任何$z\in X(S\setminus\Lambda)$来说，可以按(5) 定义 $X(\Lambda)$上概率σ^z_Λ，$z\in X(S\setminus\Lambda)$。于是由(9) 的启发，$S$上具有吸引强度$J_{uv}$，$u$，$v\in S$，$u\neq v$，的无穷铁磁系统的Gibbs态(平衡态)可以考虑定义为$(X,\mathscr{F})$ ($\mathscr{F}$为Y_u赋散拓扑，X赋予相应的乘积拓扑时的Borel σ-代数)上的概率测度μ，且满足条件：对S的任何有限子集Λ及任何$y\in X(\Lambda)$，

(10) $$\mu(\{x_\Lambda=y\})=\int_{X(S\setminus\Lambda)} \sigma^z_\Lambda(\{y\})d(P_{S\setminus\Lambda}(\mu))(z),$$

其中$P_{S\setminus\Lambda}(\mu)$为$\mu$在$X(S\setminus\Lambda)$上的投影(参看引言)。这就是书中(1.1)式(即$DLR$—方程)的一个特例。如果按照(4)式来考虑，那么$S$上铁磁系统的Gibbs态自然就应该是$(X,\mathscr{F})$上满足下列条件的概率测度$\mu$：

(11) $$\mu(\{x_\Lambda=y\}|\mathscr{F}(S\setminus\Lambda))=\sigma_\Lambda^{(\cdot)S\setminus\Lambda}(\{y\}),\ \mu\text{—}a.\ e.$$

其中 $\mathscr{F}(S\setminus\Lambda)$ 的定义见书中§1的定义，不再赘述。这就是书中(1.5)的一个特例。

一个无穷粒子系统，如果它的Gibbs态存在且不唯一，则认为此系统发生相变。

用条件期望的现代语言来描述无穷粒子系统的平衡态，使统计力学的很多模型的平衡性质可以统一地纳入一个数学框架。它不但可以包括离散模型(本书§5)，而且可以包括连续模型(§6)。这可能给这类问题的研究增加了近代数学的工具，同时也向概率论提出了一些值得探讨的问题，特别是

Gibbs 态存在但不唯一的问题（即相变问题的条件）。也许正是这些原因，从六十年代末期开始，无穷粒子系统的Gibbs态引起了一批数学、数学物理及统计物理工作者的研究兴趣，他们在这方面获得了一系列的成果，俨然形成了一个新的概率论分支——随机场。但是无论从整体还是具体问题来看，很多问题没有解决或没有圆满解决。因此这方面的研究在很多国家继续进行着。除了散见在各学术杂志的论文及本书外，带总结性的资料还有Georgii H. O., Canonical Gibbs Measures, Lecture Notes in Mathematics, 760(1979)，该书叙述清楚，值得向有兴趣的读者推荐。

正象本书的导言中所说："要识别平衡态的这种定义（即(10)或(11)）是正确的，唯一现实的途径是构造一个适当的动力系统，并且验证所假定的平衡态恰好是这个系统的不变态。"书中还提到一些从动力系统角度解决这个问题的研究成果。另一方面，从随机过程的角度也提出一些解决这个问题的模型，这就是无穷粒子马氏过程。Spitzer(1970)及 Добрущин(1971)首先分别提出了一些模型。在过去十余年中，不断提出了一些新的模型和研究方法，而且也不再限于考虑以平衡态为不变测度的马氏过程，进而考虑非平衡的情形。这方面的研究同样是蓬勃发展，俨然成为新的分支。限于篇幅，我们只在此向读者介绍几份带有总结性的资料（它们后面附有文献目录）。对此有兴趣的读者可以参阅：(1) F. Spitzer, Interaction of Markov Processes, Advances in Maths. 5 (1970), 249—290；(2) T. M. Liggett, The Stochastic Evolution of Infinite Systems of Interacting Particles, in Lecture Notes in Maths. 589 (1977), 187—248. (3) D. Griffeath, Additive and Cancellotive Interacting Particle systems, Lecture Notes in Maths., 724 (1979). (4) R. Durrett, An Introduction to Infinite Particle Systems, Stochastic processes and Their applications, 11 (1981) 109—150. (5) 严士健，无穷质点马氏过程(I),北京师范大学讲义，1981. (6) 丁万鼎、朱作宾，无穷质点马氏过程 (II)，安徽师范大学讲义，1981。

本书是我们1978年在讨论班报告时集体翻译的，其中严士健译§1—§3，陈木法译§4—§6，丁万鼎译§7—§9。最后由丁万鼎整理。根据讨论班对原书讨论的结果，我们对原文有错或觉得不明确的地方加了"译者注"。在此我们向参加本书讨论班的严加安、陈培德、刘秀芳等同志致谢。有些名词还没有中文译名，我们作了试译。为了便于读者阅读外文文献，列了中英名词对照表.由于我们水平所限,定有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

严士健

于北京师范大学　1982年4月1日

序

过去十年里，在经典平衡态统计力学的模型中，出现了许多有数学兴趣的模型；本书叙述这些工作的一部分。它们涉及到用条件概率定义的平衡态的性质。这种定义平衡态的方法是属于 Dobrushin，Lanford及Ruelle 的，在此叙述的方式主要属于Föllmer。

这里采用的陈述方法是相当抽象的，并将使用概率论的语言和基本技巧。因此将假定读者对诸如标准测度论，条件期望，鞅的收敛定理及概率核等知识有一定的熟悉。某些较深入的结果将使用标准Borel空间得到，但并不要求与它有关的预备知识。

本书是在1974年以后陆续写成的；前六节是1974—75学年在牛津Brasenose学院写成的；其余部分是在剑桥King学院写成的。近三年来作者与Hans Föllmer的交谈对本书的选材有很大影响，作者对他十分感谢。

C. Preston

1976年2月于剑桥

目　　录

§1 导　言

本书的意图是建立一个框架，在它里面，经典统计力学的许多模型的平衡性质大部分能够得以描述，这样做的主要目的是为了确定那些为平衡统计力学的几乎所有的模型所共有的特性，这将强调哪些类型的性质同特殊模型的结果相比较是“一般”的（因此，我们可考虑的这类性质将是定性的而不是定量的）．这种方法也将有助于将通常是分别加以处理的内容统一起来；特别，这个框架将包罗格点系统和连续系统．

这个框架看起来很像是研究用任一偏序集作指标集（而不是通常地用实直线的某一子集作指标集）的随机过程．这暗示着采用随机过程的概念与技巧以给出关于统计力学模型的结果的可能性．特别地，我们将使用概率论的语言，并将假定读者对于概率论的基本定义和结果（例如见 Meyer (1966)的第I，II章）是熟悉的．

本书所采用的陈述方法是以Dobrushin (1968a)(1968b)(1968c) (1969)，Lanford 和 Ruelle (1969)，以及 Ruelle (1970)的工作为基础的．这几篇论文论述各种不同模型的平衡态的定义及其性质，我们极力鼓励读者去研究它们．本书中所考虑的结构——它属于Föllmer (1975a) (1975b)——是Dobrushin-Lanford-Ruelle 的工作的自然拓广。我们将要介绍的许多材料取自较早的笔记 (Preston (1974))，它们论述了 Föllmer 的工作的特殊情形．

也许，最好的方法是从描述一个相当简单的例子，并用它导出一般结构着手．这个例子就是格点模型，给出如下：有一可数集 S，它表示一位置集（或定位集）；在大多数模型中，S将是Z^d，$d\geqslant 1$是某个自然数（此处 Z^d 表示d维空间中具有整数坐标的点集）．在每一位置 $t\in S$上，有一实体，它的各种状态由一个集Y_t描述；为了简单起见，设所有的Y_t都是同一空间Y的复制品，而且Y是有限的．例如，Y可以只有两点，用0和1表示，其中0表示粒子不出现，而1表示粒子出现；或者换一种方式，用＋和－表示这两个点，其中＋（相应地：－）表示实体处于正的（相应地：负的）负荷状态．基本相空间是卡氏积 $X=\prod\limits_{t\in S}Y_t$，将其看作是一个紧Hausdorff 空间（赋每一Y_t以离散拓扑，X以乘积拓扑）．令$\mathscr{F}$表示X上的 Borel σ-代数．

设有某个以X 作为其相空间演化着的系统．这个系统的演化是由某种哈密顿量所支配的．平衡统计力学的首要目的之一是由哈密顿量来决定：$(X, \mathscr{F})$ 上什么样的概率测度表示这个系统的平衡态（作出这种决定并不要求明显地构造模型的动力学）．本书中所述的解决这个问题的方法属于 Dobrushin，Lanford 及 Ruelle（在上面所引的论文中阐述的）．所谓平衡态就是那些具有相容条件概率族的概率测度，而这些条件概率是由哈密顿量导出的公式给出的．我们将就我们的例子来解释这是什么意思．为此需要若干记号．

对S的每一子集A，令 $X(A)=\prod\limits_{t\in A}Y_t$，将其看作紧Hausdorff 空间，并且令$\mathscr{F}_0(A)$ 表示 $X(A)$上的 Borel σ-代数，

P_A是从X到$X(A)$上的投影。再令$\mathscr{F}(A)=P_A^{-1}(\mathscr{F}_0(A))$，于是$\mathscr{F}(A)$是$\mathscr{F}$的一个子$\sigma$-代数，它表示从$A$的内部可测量(或可观察的)的诸事件。注意若$A\subset B\subset S$，则$\mathscr{F}(A)\subset\mathscr{F}(B)$。$\mathscr{C}$表示$S$的有限子集类，对$\Lambda\in\mathscr{C}$，令$\mathscr{F}_\Lambda=\mathscr{F}(S-\Lambda)$，于是$\mathscr{F}_\Lambda$是从$\Lambda$的外部可测量的事件集。

在上述记号之下，Dobrushin，Lanford 及 Ruelle 的假定是：对每一$\Lambda\in\mathscr{C}$及$y\in X(S-\Lambda)$，哈密顿量定义$(X(\Lambda),\mathscr{F}_0(\Lambda))$上的一个概率测度$\sigma_\Lambda^y$，而平衡态是那些以$\{\sigma_\Lambda^y\}$为其(适当的)条件概率族的概率测度。因为对每个$F\in\mathscr{F}_0(\Lambda)$，$\sigma_\Lambda^y(F)$是$y$的一个$\mathscr{F}_0(S-\Lambda)$-可测函数，概率测度$\mu$有相容的条件概率族当且仅当对一切$\Lambda\in\mathscr{C}$，

$$(1.1)\qquad P_\Lambda(\mu)=\int\sigma_\Lambda^y dP_{S-\Lambda}(\mu)(y)$$

虽然方程(1.1)常常以不同的形式出现，往往称其为DLR-方程。

应该把概率测度σ_Λ^y想象成由同一哈密顿量支配的系统在“有限容器”Λ中的平衡态，而它在Λ外部的组态是y。因为$X(\Lambda)$是有限集，所以我们可以将σ_Λ^y与它的密度(关于计数测度)等同起来，通常σ_Λ^y取$Z^{-1}\exp g^\Lambda(y,\cdot)$的形式，其中对$w\in X(\Lambda)$，$g^\Lambda(y,w)$是在$\Lambda$外部的组态为$y$的条件下，$X(\Lambda)$中组态$w$的能量（这里选取$Z$使得$\sigma_\Lambda^y$是一概率测度，因此$Z=$
$=\sum_{w\in X(\Lambda)}\exp g^\Lambda(y,w)$)。在$Y$由两个点0和1组成的情况下，显然，$X(A)$与$A$的子集之集可以等同起来，此时$g^\Lambda$将取$g^\Lambda(F,G)$
$=\sum_{\substack{B\subset F\cup G\\ B\cap\Lambda\neq\phi}}\Phi(B)(F\subset S-\Lambda,\ G\subset\Lambda)$ 的形式，其中Φ：$\mathscr{C}\to R$是

相应于哈密顿量的相互作用势。

在此，读者可能会问，为什么上述定义是正确的。这是一个很难满意地回答的问题。要识别平衡态的这种定义是正确的，唯一现实的途径是构造一个适当的动力系统，并且验证所假定的平衡态恰好是这个系统的不变态。然而对于大多数模型来说，构造其动力模型是极端困难的，仅在最近才对这个问题的特殊情形做了一些工作（例如参看 Lanford (1975)，Marchioro，Pellegrinotti及 Presutti (1975)）。我们要作的仅有的判断是：这个定义在直观上是合理的；多数物理学家会同意它是正确的；而且所能证明的结果表明这些平衡态具有在物理实验的基础上所应该有的性质。

对于上述模型，有两种途径考察满足(1.1)的概率测度。第一，可以将这些概率测度看成这样的测度：它在任何有限集内部的分布与其在该有限集的外部的分布是平衡的。这是因为$P_{S-\Lambda}(\mu)$是其在Λ外部的分布，所以(1.1)的右边表示系统（在Λ内部）的平衡态，条件是它在Λ外部的态限定是$P_{S-\Lambda}(\mu)$。第二，不太难验证：满足(1.1)的测度恰好是形如$\sigma^{y_n}_{\Lambda_n}$, $n\geqslant 1$序列的弱极限，其中Λ_n上升到S, $y_n\in X(S-\Lambda_n)$。*) 这相当于让容器不断扩大，同时改变边界条件而得到的某种"热力学极限"。第二种考察方法也许有助于使一些物理学家相信现在的方法与平衡统计力学中的"经典"方法并无实质上的不同。

---

*)更确切的结论是：满足(1.1)的概率测度是μ_{Λ_n}，$n\geqslant 1$，的弱极限，其中μ_{Λ_n}属于$\{\sigma^y_{\Lambda_n}, y\in X(S-\Lambda_n)\}$的弱凸闭包，而$\Lambda_n\in\mathscr{C}$, $\Lambda_n\uparrow S$。

——译者注

有一种(至少在数学上)更好的方法来陈述上面所描述的模型。对每一$\Lambda\in\mathscr{C}$，定义π_Λ：$X\times\mathscr{F}\to R$ 如下：

(1.2) $\pi_\Lambda(x,F)=\sigma_\Lambda^{P_{S-\Lambda}(x)}(\{w\in X(\Lambda):P_{S-\Lambda}(x)\times w\in F\})$,

(这里将X与$X(S-\Lambda)\times X(\Lambda)$ 看成是等同的)，则π_Λ 是一概率核，即对每一 $F\in\mathscr{F}$，$\pi_\Lambda(\cdot,F)$ 是$\mathscr{F}$-可测的，而对每个 $x\in X$,$\pi_\Lambda(x,\cdot)$是概率测度。显然π_Λ还满足：

(1.3) 对一切$F\in\mathscr{F}$,$\pi_\Lambda(\cdot,F)$是$\mathscr{F}_\Lambda$-可测的；

(1.4) 若$F\in\mathscr{F}_\Lambda$，则$\pi_\Lambda(\cdot,F)=\chi_F$；

(其中 $\chi_F(x)=1$，若$x\in F$；$\chi_F(x)=0$，其它情形。)用 π_Λ 来表达，概率测度μ满足(1.1)当且仅当

(1.5) 对一切$\Lambda\in\mathscr{C}$，$F\in\mathscr{F}$,

$$E_\mu(\chi_F|\mathscr{F}_\Lambda)=\pi_\Lambda(\cdot,F)\quad \mu-a.e.$$

其中$E_\mu(f|\mathscr{B})$表示在给定 σ-代数$\mathscr{B}$之下 f(关于μ) 的条件期望；因此(1.5)可以重新写成

(1.6) 对一切$\Lambda\in\mathscr{C}$，$G\in\mathscr{F}_\Lambda$，$F\in\mathscr{F}$,

$$\mu(F\cap G)=\int_G\pi_\Lambda(x,F)d\mu(x).$$

由哈密顿量给出的测度族$\{\sigma_\Lambda^y\}$将满足一个相容性条件。借助于π_Λ，此条件可以写成

(1.7) 若$\Lambda\subset\tilde{\Lambda}\in\mathscr{C}$，则 $\pi_{\tilde{\Lambda}}\pi_\Lambda=\pi_{\tilde{\Lambda}}$,

(其中$\pi_{\tilde{\Lambda}}\pi_\Lambda$是由

$$(\pi_{\tilde{\Lambda}}\pi_\Lambda)(x,F)=\int\pi_\Lambda(y,F)\pi_{\tilde{\Lambda}}(x,dy)$$

定义的概率核)。注意，不管物理解释如何，如果π_Λ 解释成条件概率，(1.7)是一个应该作出的自然假设,因为它恰恰相当于通常的法则