

本书是参照高等学校工科力学教材编审委员会审订的“理论力学教学大纲”编写而成的。根据因材施教的原则和今后发展的需要,在内容的深度和广度上有所扩展,并冠以“\*”号,供自学和选讲。

全书分静力学、运动学、动力学三篇,具体内容包括:静力学的基本概念和物体的受力分析、基本力系、一般力系、点的运动学、刚体的基本运动、刚体的平面运动、点的合成运动、质点运动微分方程、动量定理、动量矩定理、动能定理、碰撞、达朗贝尔原理、虚位移原理、动力学普遍方程和拉格朗日方程、机械振动基础。本书在概念的引出和理论的叙述中注意与工程实际问题的结合和联系,并强调力学模型的建立和力学问题的数学描述。在例题分析中突出解题的思路、方法、步骤和技巧。各章都编写了小结,以帮助读者归纳、总结、深化和复习。

本书可作为普通高等工科院校力学、机械、土建、水利等相关专业的教材和教学参考书,也可供工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

理论力学/牛学仁主编. —北京:机械工业出版社,2000.8  
高等学校教材

ISBN 7-111-08145-5

I. 理… II. 牛… III. 理论力学-高等学校-教材  
IV. 031

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第63842号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

责任编辑:曹俊玲 版式设计:霍永明 责任校对:张莉娟

封面设计:方 芬 责任印制:郭景龙

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2000年8月第1版·第1次印刷

787mm×1092mm<sup>1</sup>/<sub>16</sub>·21.25印张·523千字

0 001—5 000册

定价:29.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68993821、68326677-2527

# 目 录

## 前言 绪论

### 第一篇 静 力 学

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 引言 .....                   | 2  |
| 第一章 静力学的基本概念和物体的受力分析 ..... | 4  |
| 第一节 力的概念和静力学公理 .....       | 4  |
| 第二节 约束与约束反力 .....          | 6  |
| 第三节 物体的受力分析和受力图 .....      | 10 |
| 小结 .....                   | 13 |
| 思考题 .....                  | 13 |
| 习题 .....                   | 14 |
| 第二章 基本力系 .....             | 17 |
| 第一节 汇交力系合成与平衡的几何法 .....    | 17 |
| 第二节 汇交力系合成与平衡的解析法 .....    | 19 |
| 第三节 力矩 .....               | 22 |

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 第四节 力偶 .....             | 26 |
| 小结 .....                 | 29 |
| 思考题 .....                | 30 |
| 习题 .....                 | 32 |
| 第三章 一般力系 .....           | 36 |
| 第一节 力的平移定理 .....         | 36 |
| 第二节 一般力系的简化 .....        | 37 |
| 第三节 重心 .....             | 42 |
| 第四节 一般力系的平衡条件及平衡方程 ..... | 45 |
| 第五节 物体系统的平衡 .....        | 50 |
| 小结 .....                 | 60 |
| 思考题 .....                | 61 |
| 习题 .....                 | 63 |

### 第二篇 运 动 学

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 引言 .....                     | 70 |
| 第四章 点的运动学 .....              | 71 |
| 第一节 确定点的位置的方法 .....          | 71 |
| 第二节 点的速度和加速度的矢量表示法 .....     | 72 |
| 第三节 点的速度和加速度在直角坐标轴上的投影 ..... | 73 |
| 第四节 点的速度和加速度在自然坐标轴上的投影 ..... | 77 |
| 小结 .....                     | 83 |
| 思考题 .....                    | 84 |
| 习题 .....                     | 85 |
| 第五章 刚体的基本运动 .....            | 88 |
| 第一节 刚体的平动 .....              | 88 |
| 第二节 刚体绕定轴转动 .....            | 89 |

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 第三节 定轴转动刚体内各点的速度和加速度 .....             | 90  |
| 第四节 定轴轮系的传动比 .....                     | 93  |
| * 第五节 以矢量表示角速度和角加速度以矢积表示点的速度和加速度 ..... | 95  |
| 小结 .....                               | 98  |
| 思考题 .....                              | 98  |
| 习题 .....                               | 99  |
| 第六章 刚体的平面运动 .....                      | 103 |
| 第一节 刚体平面运动的概述和运动简化 .....               | 103 |
| 第二节 平面图形的运动方程及运动分解 .....               | 103 |
| 第三节 平面图形上各点的速度 .....                   |     |

|                  |     |
|------------------|-----|
| 分析 .....         | 105 |
| 第四节 平面图形上各点的加速度  |     |
| 分析 .....         | 111 |
| 小结 .....         | 114 |
| 思考题 .....        | 115 |
| 习题 .....         | 116 |
| 第七章 点的合成运动 ..... | 121 |
| 第一节 绝对运动 相对运动 牵连 |     |
| 运动 .....         | 121 |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 第二节 点的速度合成定理 .....  | 124 |
| 第三节 牵连运动为平动时点的加速度合成 |     |
| 定理 .....            | 127 |
| 第四节 牵连运动为定轴转动时点的加速度 |     |
| 合成定理 .....          | 130 |
| 第五节 运动学综合应用举例 ..... | 137 |
| 小结 .....            | 140 |
| 思考题 .....           | 141 |
| 习题 .....            | 141 |

### 第三篇 动 力 学

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 引言 .....              | 147 |
| 第八章 质点运动微分方程 .....    | 148 |
| 第一节 质点动力学基本方程 .....   | 148 |
| 第二节 质点运动微分方程 .....    | 149 |
| 第三节 质点动力学的两类问题 .....  | 150 |
| * 第四节 质点相对运动动力学的基本    |     |
| 方程 .....              | 154 |
| 小结 .....              | 157 |
| 思考题 .....             | 158 |
| 习题 .....              | 159 |
| 第九章 动量定理 .....        | 162 |
| 第一节 动量与冲量 .....       | 162 |
| 第二节 质点系的动量定理 .....    | 164 |
| 第三节 动量定理在流体中的应用 ..... | 168 |
| 第四节 质心运动定理 .....      | 170 |
| * 第五节 变质量质点的运动微分      |     |
| 方程 .....              | 175 |
| 小结 .....              | 178 |
| 思考题 .....             | 178 |
| 习题 .....              | 180 |
| 第十章 动量矩定理 .....       | 183 |
| 第一节 质点和质点系的动量矩 .....  | 183 |
| 第二节 质点和质点系的动量矩        |     |
| 定理 .....              | 184 |
| * 第三节 定常流动流体对叶轮的      |     |
| 转矩 .....              | 187 |
| 第四节 刚体绕定轴的转动微分        |     |
| 方程 .....              | 188 |
| 第五节 刚体对轴的转动惯量 .....   | 191 |
| * 第六节 转动惯量的转轴公式 惯性积   |     |
| 及惯性主轴 .....           | 195 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| * 第七节 质点系相对于质心的动量矩    |     |
| 定理 .....              | 199 |
| 第八节 刚体的平面运动微分方程 ..... | 200 |
| * 第九节 质点系相对于动矩心的动量矩   |     |
| 定理 .....              | 203 |
| 小结 .....              | 205 |
| 思考题 .....             | 207 |
| 习题 .....              | 208 |
| 第十一章 动能定理 .....       | 213 |
| 第一节 力的功 .....         | 213 |
| 第二节 动能 .....          | 216 |
| 第三节 动能定理 .....        | 218 |
| 第四节 功率和功率方程 .....     | 222 |
| 第五节 势力场和势能及其性质 .....  | 225 |
| 第六节 机械能守恒定律 .....     | 227 |
| 第七节 动力学普遍定理的综合        |     |
| 应用 .....              | 229 |
| 小结 .....              | 233 |
| 思考题 .....             | 234 |
| 习题 .....              | 236 |
| 第十二章 碰撞 .....         | 243 |
| 第一节 碰撞现象的特征及其假定 ..... | 243 |
| 第二节 恢复系数 .....        | 244 |
| 第三节 用于碰撞过程的基本定理 ..... | 245 |
| 第四节 两物体对心碰撞 .....     | 246 |
| 第五节 碰撞冲量对绕定轴转动刚体的     |     |
| 作用 撞击中心 .....         | 251 |
| 第六节 碰撞冲量对平面运动刚体的      |     |
| 作用 .....              | 254 |
| 小结 .....              | 256 |
| 思考题 .....             | 257 |

|                              |     |                                 |     |
|------------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| 习题 .....                     | 258 | 习题 .....                        | 292 |
| 第十三章 达朗贝尔原理 .....            | 261 | * 第十五章 动力学普遍方程和拉格朗日<br>方程 ..... | 295 |
| 第一节 惯性力 质点的达朗贝尔<br>原理 .....  | 261 | 第一节 动力学普遍方程 .....               | 295 |
| 第二节 质点系的达朗贝尔原理 .....         | 262 | 第二节 拉格朗日方程 .....                | 298 |
| 第三节 刚体惯性力系的简化 .....          | 264 | 第三节 拉格朗日方程的首次积分 .....           | 303 |
| * 第四节 定轴转动刚体的轴承动<br>反力 ..... | 269 | 小结 .....                        | 308 |
| 第五节 消除轴承动反力的条件 .....         | 273 | 思考题 .....                       | 308 |
| 小结 .....                     | 274 | 习题 .....                        | 309 |
| 思考题 .....                    | 275 | 第十六章 机械振动基础 .....               | 313 |
| 习题 .....                     | 276 | 第一节 引言 .....                    | 313 |
| 第十四章 虚位移原理 .....             | 279 | 第二节 振动问题的力学建模 .....             | 314 |
| 第一节 引言 .....                 | 279 | 第三节 单自由度系统的自由振动 .....           | 315 |
| 第二节 约束及其分类 .....             | 280 | 第四节 阻尼对自由振动的影响 .....            | 321 |
| 第三节 自由度与广义坐标 .....           | 281 | 第五节 单自由度系统的受迫振动 .....           | 323 |
| 第四节 虚位移与虚功 .....             | 282 | 第六节 振动的消减和隔离 .....              | 325 |
| 第五节 虚位移原理及其应用 .....          | 284 | 小结 .....                        | 327 |
| * 第六节 平衡位置的稳定性 .....         | 287 | 思考题 .....                       | 329 |
| 小结 .....                     | 290 | 习题 .....                        | 330 |
| 思考题 .....                    | 291 | 参考文献 .....                      | 331 |

# 绪 论

## 一、力学的发展与作用

力学同数、理、化、天、地、生并列为七大基础学科。力学与数学关系尤为密切，而且支撑了整个物理学科。力学起源于物理学科，直到 19 世纪末期，随着欧洲产业革命、大机器和航空运输的需要，力学和物理学才有了明确的分工。力学研究宏观，面向工程技术，而物理研究微观和宇宙现象。力学又是处于前沿的应用技术学科。历经 20 世纪，尤其是解放后，我国高新技术的重大成就，如原子弹、氢弹、火箭与人造卫星、飞机、潜艇、高层建筑、万吨巨轮等等，都有力学的指导和参与。现代战争很大程度上是高技术的竞争，无论是攻防装备还是快速调动给养补给，严格说都离不开力学。力学对经济建设、国防建设和科学技术发展起着至关重要的作用。

## 二、理论力学的研究对象和特点

力学是研究物体机械运动规律的科学。**机械运动**是指物体的空间位置随时间的变化。固体的移动和变形、气体和液体的流动都属于机械运动。大至宇宙，小至基本粒子，无处不存在这种机械运动。对各种不同形态的机械运动的研究产生了不同的力学分支学科。理论力学的研究对象是运动速度远远小于光速的宏观物体。原子、电子等微观粒子的运动属于量子力学的研究对象，而速度接近于光速的物体的运动则是相对论力学的研究对象。

理论力学所研究的内容属于经典力学的范畴，它以牛顿运动基本定律为基础，将牛顿定律紧密地同工程实际联系起来，成为工科学生接触工程计算的第一门课程。

理论力学起源于物理学的一个独立分支，但它的深度和广度都大大超出了物理学的内容。一方面，理论力学的研究对象包括质点、质点系、刚体和刚体系统，它以静力学公理、牛顿运动基本定律等为出发点，应用数学工具进行数学演绎，推导出各种以数学形式表达的结论和定理，例如刚体和质点系平衡的充要条件；质点系的动量定理、动量矩定理和动能定理；拉格朗日方程等。另一方面，理论力学要求能运用理论知识对于实际问题中抽象出来的力学模型进行分析和计算，所以理论的高度严密性与联系实际的广泛性是理论力学的显著特点。

## 三、学习理论力学的目的

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。通过本课程的学习，为学习有关的后继课程，如材料力学、机械原理、机械零件、结构力学、弹性力学、振动理论等打好必要的基础。通过学习，学会应用理论力学的基本理论与研究方法，分析、解决一些较简单的工程实际问题；通过学习，培养正确分析问题和解决问题的能力，为今后解决生产实际问题、从事科学研究工作打下基础。

## 四、理论力学课程的基本内容

理论力学的内容通常分为静力学、运动学和动力学三部分。

**静力学**——主要研究力系的简化以及物体在力系作用下的平衡规律。

**运动学**——只从几何的角度研究物体的运动（如点的轨迹、速度、加速度，刚体的角速度、角加速度等），而不考虑引起物体运动的物理原因。

**动力学**——研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系。

# 第一篇 静 力 学

## 引 言

**静力学**是研究物体在力系作用下平衡规律的科学。平衡是指物体相对于惯性参考系静止或作匀速直线平动。在工程技术中，如果没有特别声明，平衡是相对地球而言的，即以固结在地球表面的参考系作为惯性参考系。**力系**是指作用于物体上的一群力。

对实际物体进行力学分析时，首先要为物体建立一个合适的模型。一般来说，建立模型是一种试探的过程。一方面要以经验和知识为根据，另一方面要研究实验观察到的现象与所研究问题的性质。在力学领域中，为了便于求解问题，对实际物体采用的模型可分为三类：质点、刚体及变形体。**质点**是指各向尺寸均可忽略的物体。可以说，一个质点在空间仅占一点；若一物体受力后，其内部任意两点的距离保持不变，其尺寸又不可忽略，则该物体称为**刚体**；若一物体受力后，其内部某两点的距离发生改变，则该物体称为**变形体**。对一个实际物体究竟应该采用何种模型，没有绝对的答案。例如，一个小滚珠静止在水平面上，就可把它模型化为一个质点。若把小滚珠放在鞋底的边缘处而踩在它上面，就会发现当压力不断增加时滚珠要从脚下滑出去，如果仍将滚珠当作质点，就无法解释这种现象，此时应把滚珠模型化为刚体。事实上，物体受力的作用总会发生或大或小的变形，当物体的变形很小，并对所研究的问题影响甚微时，就可将该物体视为刚体。当然，物体能否被模型化为刚体还与被研究问题的性质有关。例如在研究飞机的稳定性与操纵性时，可将飞机视为刚体，但在研究飞机的颤振时，又必须把飞机视为变形体。

由此可见，选择模型来代表实际物体，在解决问题的过程中，是一个关键性的环节。静力学中我们只研究刚体模型，所以静力学也称之为**刚体静力学**。几个物体通过一定的方式联接起来的整体称为**物体系统**，简称**物体系**。当系统中的物体全部是刚体时，又称为**刚体系统**。

静力学部分的主要任务包括三个方面：

### 1. 物体的受力分析

分析某个物体所受的力及每个力的作用位置和方向。

### 2. 力系的等效替换和简化

为了求解问题的需要，可以根据力的基本性质对力系中诸力加以分解或合成，在保持物体运动状态不变的前提下，用另一力系代替原力系，称为**力系的等效替换**。这两个力系互为**等效力系**。如果用一个简单力系等效替换一个复杂的力系，称为**力系的简化**。如果一个力与一个力系等效，这个力称为该力系的**合力**。通过力系简化可以了解力系对物体作用的总效应。

### 3. 力系的平衡条件及其应用

物体平衡时，作用在物体上的力系所应满足的条件，称为**力系的平衡条件**。满足平衡条件的力系称为**平衡力系**。利用平衡条件建立对应力系的平衡方程。利用平衡方程求解物体或物体系统的平衡问题。这是静力学的核心问题。

静力学在工程实际中有着广泛的应用，利用平衡方程求解平衡问题的结果是材料力学、结构力学或机械零件等后继课程中构件强度和刚度计算的依据。此外，静力学中力系简化的理论和物体受力分析的方法也是研究动力学的基础。

# 第一章 静力学的基本概念和物体的受力分析

本章主要介绍力、约束等基本概念和静力学公理；介绍几种工程中常见的约束，并讨论物体受力分析的方法。本章是静力学的基础。

## 第一节 力的概念和静力学公理

### 一、力的概念

力是物体间相互的机械作用。这种作用会使物体的运动状态发生变化或使物体变形。通常前者称为力的外效应，后者称为力的内效应。由于刚体是受力作用不变形的物体，所以对刚体只有运动效应。静力学的研究对象是刚体或刚体系统，因此在静力学中不考虑力的内效应，只研究力的外效应。至于力的内效应，将在材料力学、结构力学、弹性力学等后继课程中介绍。

实践表明，力对物体的作用效果取决于力的大小、方向、作用点。所以力是一个矢量，可以用一个定位的有向线段来表示，如图 1-1 所示。表示力的矢量必须与该力确定的作用点联系起来，这样的矢量称为**定位矢量**。在本书中，力矢量均用黑斜体字母表示，力的大小用普通字母表示，例如， $\boldsymbol{F}$  表示力矢量， $F$  表示力  $\boldsymbol{F}$  的大小。

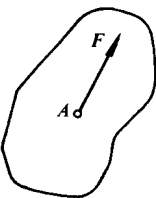


图 1-1

### 二、静力学公理

静力学公理是人们在生活和生产实践中对力的基本性质的概括和总结，它源于实践，又经过实践反复检验，被证明是正确的结论。公理无需证明，它是静力学的理论基础。

#### 公理一 力的平行四边形规则

作用在物体同一点的两个力，可以合成为一个合力，合力的作用点仍在该点，合力的大小和方向由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。

如图 1-2a 所示，如将原来的两力称为分力，则这一公理表明，合力  $\boldsymbol{F}_R$  等于两分力  $\boldsymbol{F}_1$  与  $\boldsymbol{F}_2$  的矢量和，即  $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ 。

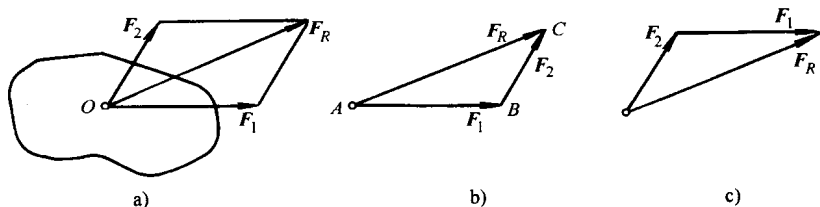


图 1-2

为简便起见，可以用力平行四边形的一半来表示合成过程。如图 1-2b 所示。从任一点  $A$  开始，先画矢量  $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{F}_1$ ，从  $B$  点再画矢量  $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{F}_2$ ，连接起点  $A$  与终点  $C$  的矢量  $\overrightarrow{AC}$  即为合力矢  $\boldsymbol{F}_R$ 。这种求合力的方法称为**力的三角形规则**。利用力的三角形规则求合力时，合力的大小

和方向与作力的次序无关,如图 1-2c 同样可以求得合力矢  $F_R$ 。应当注意,力的三角形规则并不表示力的实际作用位置,合力的作用点仍在原来的汇交点  $O$ 。

力的平行四边形规则或力的三角形规则表达了最简单情况下合力与分力之间的关系,是力系合成与分解的基础。

### 公理二 二力平衡公理

作用在同一刚体上的两个力,使刚体处于平衡的必要与充分条件是:此两力大小相等,方向相反,并且作用在一条直线上,简称等值、反向、共线。

按这一公理,若刚体只在两个力  $F_A$  和  $F_B$  作用下处于平衡,则此两力的作用线应在两力作用点  $A$  和  $B$  的连线上,如图 1-3 所示,表示为  $F_A = -F_B$ 。

只在两个力作用下处于平衡的构件,称为二力构件。若构件为直杆时,则称为二力杆。所以二力构件(或二力杆)所受的两个力必定沿两力作用点的连线,且等值、反向。

作用在刚体上的两个力等值、反向、共线,是使刚体处于平衡的必要与充分条件。对于变形体来说,这个条件只是平衡的必要条件,而不是充分条件。例如,若绳子  $AB$  受两个拉力作用处于平衡,则两力一定等值、反向、共线;但当绳子受两个等值、反向、共线的压力作用时,显然不能平衡。

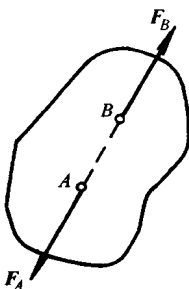


图 1-3

### 公理三 加减平衡力系公理

在一已知力系上,加上或减去任意的平衡力系,不会改变原力系对刚体的作用效果。

由前面的三个公理可以导出两个重要的推论。

#### 推论一 力的可传性

作用在刚体上某点的力,可沿其作用线滑移到刚体内的任意一点,而不改变该力对刚体的作用效果。

证明:设力  $F$  作用在刚体上的  $A$  点,如图 1-4a 所示。今在此力的作用线上任取一点  $B$ ,在  $B$  点添加一对平衡力  $F_1$  与  $F_2$ ,且使  $F_1 = -F_2 = F$ ,如图 1-4b 所示。由公理三,图 1-4b 中三力作用效果与图 1-4a 中  $F$  的作用效果相同。另一方面,由于  $F$  与  $F_2$  等值、反向、共线,构成平衡力系。

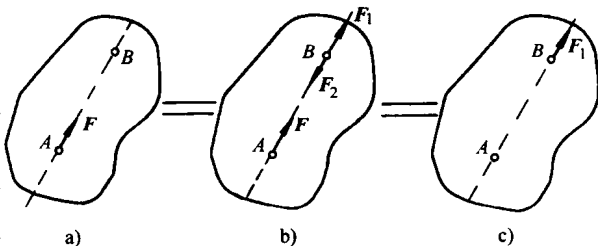


图 1-4

由公理三,可以减去这对平衡力系,如图 1-4c 所示。显然  $F_1$  与  $F$  大小相等、方向相同,因此可将  $F_1$  看作是力  $F$  从点  $A$  滑移到点  $B$  的结果。

力的这一性质称为力的可传性。根据这一性质,作用在刚体上的力对刚体的作用效果与力在作用线上的具体位置无关,所以作用在刚体上的力的三要素可概括为:力的大小、方向和作用线。这种可沿作用线滑动的矢量称为滑动矢量,因此作用在刚体上的力矢量是滑动矢量。

#### 推论二 三力平衡汇交定理

若刚体受三力作用处于平衡,且其中两力的作用线交于一点,则第三个力的作用线也通过该交点,且三力共面。

证明:如图 1-5 所示,设刚体的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点上分别作用力  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ ,使刚体处于平

衡状态, 其中力  $F_1$  和  $F_2$  的作用线汇交于  $O$  点。按力的可传性, 将力  $F_1$  和  $F_2$  分别沿各自的作用线移到点  $O$ , 并由力的平行四边形规则将  $F_1$  和  $F_2$  合成为一个作用于  $O$  点的合力  $F_{12}$ , 这样, 刚体在力  $F_{12}$  和  $F_3$  的作用下处于平衡状态。由二力平衡公理知,  $F_{12}$  与  $F_3$  必共线。由于  $F_{12}$  的作用线通过  $O$  点, 所以,  $F_3$  的作用线也必定通过  $O$  点, 而且因  $F_{12}$  与  $F_1$ 、 $F_2$  在同一平面内, 所以  $F_3$  也与  $F_1$ 、 $F_2$  在同一平面内。

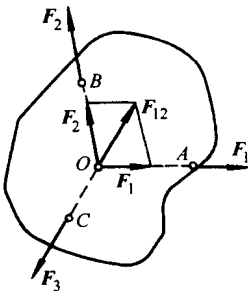


图 1-5

应当指出, 当三力中有两力相交时, 三力汇交于一点是三力平衡的必要条件而非充分条件, 因为任意三个作用于同一平面内且相交于一点的力, 显然不一定是平衡力系。此外, 当刚体在三个力的作用下处于平衡时, 三个力也未必一定要交于一点。

#### 公理四 作用与反作用定律

两个物体相互作用所产生的作用力与反作用力, 总是大小相等, 方向相反, 沿着同一直线, 分别作用在两个物体上。

公理四揭示了两物体间相互作用力的定量关系, 表明一切力总是成对出现的, 如果已知作用力, 则可根据作用与反作用定律求得反作用力。公理四是分析物体受力必须遵循的规则, 是研究物体系统平衡问题的基础。

需要说明, 不论对刚体还是变形体, 也不论对静止的物体还是运动的物体, 公理四所给出的规律都是适用的。

#### 公理五 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡, 若将此变形体刚化为刚体, 则其平衡状态不变。

公理五表明, 处于平衡状态的变形体, 完全可以视为刚体来研究, 因此公理五为进一步研究变形体的平衡问题提供了依据。但须注意, 刚杆受一对等值、反向、共线的压力作用能够平衡, 而绳子则不能。因此, 刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件, 并非充分条件。另外, 刚化要在变形体发生变形且处于平衡时进行, 刚化后, 此变形也将保留下来。

## 第二节 约束与约束反力

工程实际中有一些物体的位移不受任何限制, 例如飞行中的飞机、火箭等, 这些物体称为**自由体**。也有一些物体, 它们的位移受到了预先给定条件的限制, 例如在铁轨上行驶火车, 在气缸中运动的活塞, 这些物体称为**非自由体**。对非自由体的某些运动起限制作用的物体称为**约束**。

既然约束阻碍物体的位移, 也就是说约束能够起到改变物体运动状态的作用, 所以约束对物体的作用实际上就是力的作用。约束施加给被约束物体的这种力称为**约束反力**, 简称**反力**。约束反力的方向总是与约束所能阻碍的物体位移的方向相反, 这是**确定约束反力方向的原则**。

约束反力以外的力称为**主动力**。结构和机器中常见的主动力有: 重力、水压力、风压力、电磁力、切削力等等。在工程中, 主动力又称为**载荷**, 一般为已知力。静力学的重要任务之一是由已知的主动力确定未知的约束反力。

工程实际中约束结构的形式各种各样, 为便于分析, 必须对实际约束加以适当简化, 归纳成几种典型的约束类型, 这将大大便于我们去分析各种实际约束的约束反力。需要提请注意,

我们不能只局限于了解几种常见的约束及约束反力,还要通过所研究的一些例子,掌握由约束的构造确定约束的性质、由约束的性质分析约束反力的一般方法,从而培养把工程问题简化为力学问题的能力。下面介绍工程中常见的几种典型约束类型和确定约束反力的方法。

### 一、柔索约束

由绳索、传送带、链条、钢丝绳等柔软物体构成的约束称为柔索约束。柔索只能承受拉力,即只能限制物体沿柔索伸长方向的位移。因此,柔索约束的约束反力通过接触点,沿柔索拉住被约束物体。通常用  $F_T$  或  $F$  表示这类约束反力。

例如图 1-6a 中,用绳索吊起重物,绳索作用于重物的约束反力  $F_{T1}$  和  $F_{T2}$  沿绳索而背离物体。图 1-6b 所示的带传动中,传动带给带轮的力都是拉力,并沿传动带与轮缘相切的方向。

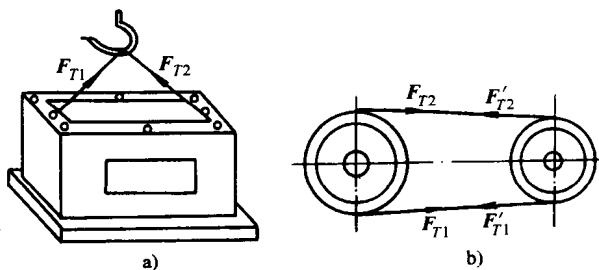


图 1-6

### 二、光滑接触面约束

两个相互接触的物体,如果接触面上的摩擦很小,可以忽略不计,就构成光滑接触面约束。该约束不能阻止物体沿着接触面切向的位移,只能阻止物体沿着接触面公法线并指向约束的位移。因此,光滑接触面的约束反力必定通过接触点,并沿着接触面的公法线指向被约束物体。通常用  $F_N$  表示这类约束反力。图 1-7a 所示的凸轮机构,凸轮给顶杆的约束反力  $F_N$  沿着接触面的公法线,指向顶杆。图 1-7b 中,  $AB$  杆搁在固定圆弧槽内,杆与槽分别在  $A$ 、 $B$  点接触,如果接触是光滑的,槽给杆  $AB$  的约束反力分别为  $F_{NA}$  和  $F_{NB}$ ,其中  $F_{NA}$  通过接触点  $A$ ,沿着圆弧槽在  $A$  点的法线指向杆  $AB$  ( $F_{NA}$  过固定槽的中心  $O$ ),  $F_{NB}$  通过接触点  $B$ ,垂直并指向杆  $AB$ 。

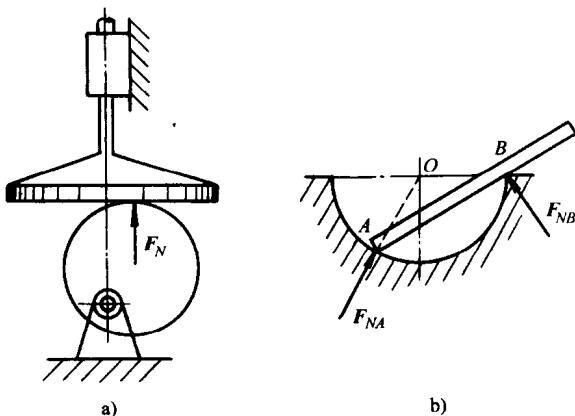


图 1-7

### 三、光滑圆柱铰链约束

光滑圆柱铰链约束是连接两个物体(或构件)的常见约束。如图 1-8a 所示,在两个物体上各作一大小相同的光滑圆孔,用光滑圆柱销钉穿入两物体的圆孔中,将两物体连接起来,形成彼此只能绕销钉轴线转动,而不能在垂直于销钉轴线的方向上(即径向)有任何位移的约束,这种约束称为光滑圆柱铰链约束,简称铰链约束。其力学简图如图 1-8b 所示。

销钉与物体的圆孔之间实质上属于光滑接触面约束,所以约束反力应作用

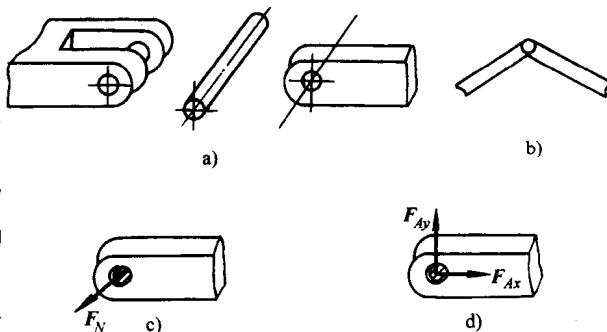


图 1-8

在销钉与圆孔的接触点，并通过销钉中心，如图 1-8c 中的  $F_N$ 。但是，销钉与圆孔接触点的位置因物体所受主动力的不同而改变，因此，由约束本身并不能预先确定接触点的位置，所以一般情况下， $F_N$  方位不定。在画图和计算时，这个大小和方向待定的约束反力，常用位于销钉径向平面且过销钉中心的一对正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  表示，如图 1-8d 所示。

提请注意的是，一个销钉可以联接两个或两个以上的物体，但是由同一销钉联接的各个物体在销钉的径向只与销钉有接触，也就是说，各个物体只与销钉有力的作用，销钉联接的物体之间彼此无力的作用，所以同一销钉联接的每个物体都受该销钉的约束，而各个物体的约束却只有销钉。理解这一点，对分析销钉处的受力会有很大帮助。

下面三种约束类型也属于光滑圆柱铰链约束。

(1) **固定铰链支座**。由圆柱销钉连接的两物体中，若有一物体是固定在地面或机架上作为支座时，这种约束就称为固定铰链支座，简称固定铰支座，如图 1-9a 所示。因此，固定铰支座的约束反力也是过销钉中心的一个力，一般情况下，用位于销钉径向平面且过销钉中心的一对正交分力表示。固定铰支座的力学简图如图 1-9b 所示。

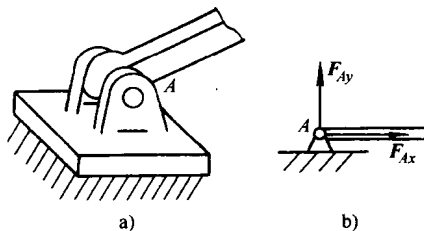


图 1-9

(2) **向心轴承（径向轴承）**。轴承是机器中常见的一种约束，向心轴承装置如图 1-10a 所示，其力学简图如图 1-10b 所示。

它的约束性质与铰链约束性质相同，不过在这里轴是被约束物体，轴承是约束。因此，向心轴承的约束反力与铰链约束反力有相同的特点，通常用位于轴径向平面内的一对正交分力表示，如图 1-10c 所示。

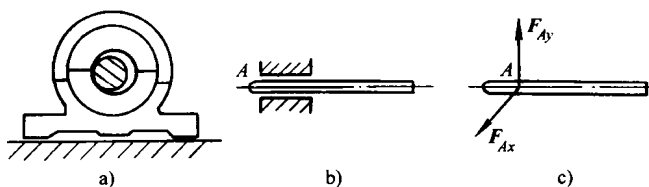


图 1-10

(3) **蝶形铰链**。蝶形铰链约束是由圆柱销钉  $C$  把具有同样大小圆孔的页  $A$  和页  $B$  联接而成，如图 1-11a 所示。在页  $A$  和页  $B$  上都有小圆孔，可用螺钉把页  $A$  和页  $B$  分别与其它两构件固连。这样两构件可绕销钉  $C$  的轴线转动，但在联接点  $C$ （销钉  $C$ ）不能有相对移动。因此，蝶形铰链的约束反力也是过销钉中心的一个力，一般情况下，用位于销钉径向平面且过销钉中心的一对正交分力表示。蝶形铰链的力学简图如图 1-11b 所示。现实生活中的门窗合页就属于这种约束。

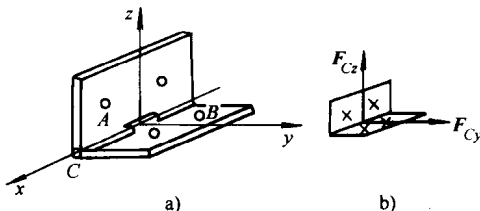


图 1-11

#### 四、其它约束

(1) **滚动铰链支座**。在固定铰链支座与光滑支承面之间安装一排滚子（图 1-12a），可使支座沿固定支承面滚动，这是工程中常见的一种复合约束，称为滚动铰链支座，简称滚动铰支座。图 1-12b 所示为滚动铰链支座约束的几种常用力学简图。这类约束只能限制物体沿支承面法线方向的位移，所以约束反力的作用线沿支承面法线，通过销钉中心，如图 1-12c 所示。桥梁支座常采用这种约束。

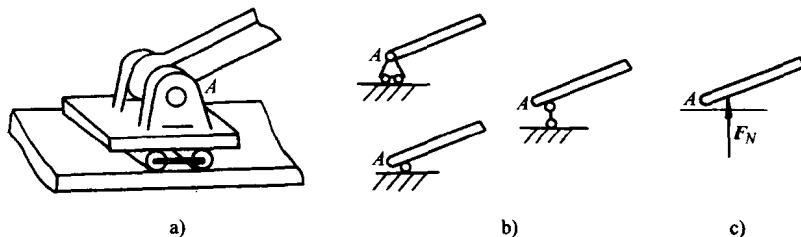


图 1-12

(2) 光滑球形铰链约束。如图 1-13a 所示, 物体的一端为球形, 只能在固定的球窝内绕球心转动, 而不能有任何方向的移动。当接触面光滑时, 这种空间类型的约束称为光滑球形铰链约束, 简称球铰链。球铰链的力学简图如图 1-13b 所示。由此可见, 球铰链约束实际上属于光滑接触面约束, 约束反力作用在接触点, 并沿径向指向球心, 因接触点的位置一般不能事先确定, 因此, 通常用过球心的三个正交分力表示, 如图 1-13c 所示。

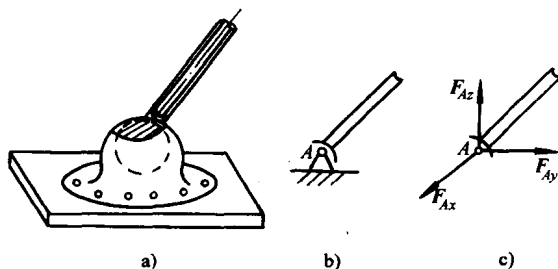


图 1-13

(3) 止推轴承。止推轴承也是机器中常见的一种约束, 其结构简图如图 1-14a 所示。这种约束除限制转轴在垂直轴线方向(径向)的位移外还限制转轴沿轴向的位移。止推轴承的力学简图如图 1-14b 所示。该约束的性质决定了止推轴承除径向平面内的一对正交分力外, 还提供一个轴向约束反力, 因此约束反力也需要用三个正交分力表示, 如图 1-14c 所示。

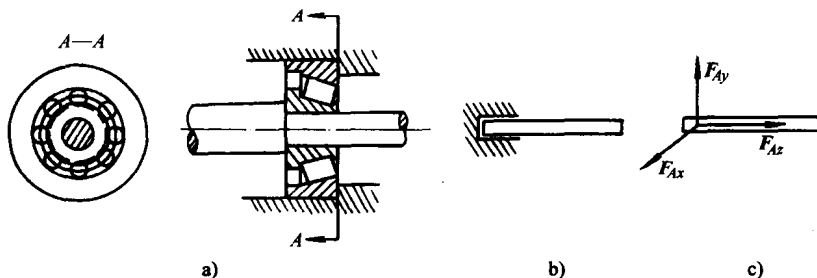
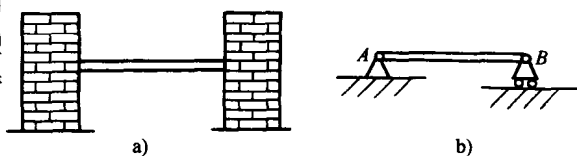


图 1-14

实际问题中约束的形式各种各样, 但并不都与力学中的典型约束在构造上完全一样。在解决工程实际问题时, 必须了解实际约束的构造, 分析实际约束的约束性质, 从而对实际约束进行简化处理。例如, 砖石房屋横梁的两端埋入墙体内(图 1-15a)。这种约束与典型约束在构造上都不相同。如从约束的构造情况分析约束的性质可知:



- (1) 横梁的两端不能有任何移动。
- (2) 梁端埋入墙体的部分较短, 限制转

图 1-15

动的能力较弱, 允许梁端有较小的转动位移。

根据上述约束性质, 可以将横梁两端的约束简化为图 1-15b 所示的固定铰支座与滚动铰支座。又如车床加工圆轴时, 两端要用顶尖支承, 由鸡心夹头传递力偶 (图 1-16a)。圆轴与顶尖的接触属于物体的粗糙面与尖刃接触。圆轴可以转动, 但不能有任何的移动, 这种约束性质与一端受到向心轴承约束, 另一端受到止推轴承约束的作用相同, 所以圆轴受到顶尖的约束反力可简化为图 1-16b。

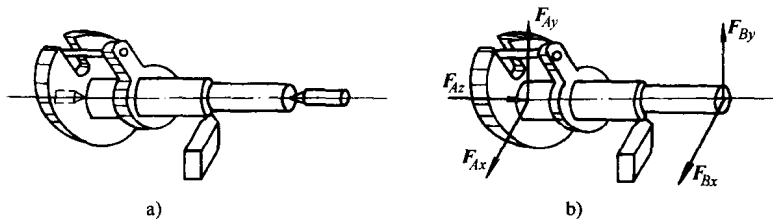


图 1-16

### 第三节 物体的受力和受力图

求解力学问题需要根据问题的已知条件和待求量有选择地研究某个物体或某几个物体的运动和平衡, 这一个或几个物体就称为**研究对象**。对研究对象进行受力分析, 就要把研究对象从与它联系的周围物体中分离出来, 这种解除了约束的自由体称为**分离体**。分析分离体上作用有哪些力以及每个力的大小、作用线和指向, 这个过程称为**受力分析**。进行受力分析时, 要在分离体上画出作用在其上的全部主动力和约束反力, 这种表示物体受力状态的图形称为研究对象的**受力图**。对物体进行受力和画受力图是解决静力学问题和动力学问题的前提和关键。下面举例说明。

**例 1-1** 如图 1-17a 所示, 绞车通过钢丝绳牵引重力为  $P$  的矿车沿倾斜的钢轨匀速上升。设接触面光滑, 试画出矿车的受力图。

**解** (1) 取矿车为研究对象, 解除约束并画出其简图。

(2) 画主动力。矿车所受的主动力只有重力  $P$ , 作用于重心  $C$ , 铅垂向下。

(3) 画约束反力。钢丝绳的约束反力为  $F$ , 沿绳的中心线, 背离矿车; 倾斜钢轨为光滑接触面约束, 其反力  $F_{NA}$ 、 $F_{NB}$  分别通过接触点  $A$  和  $B$  沿轨道的法向指向矿车。

矿车受力图如图 1-17b 所示。

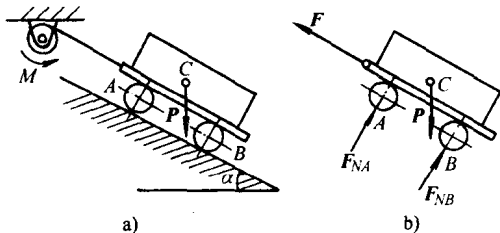


图 1-17

**例 1-2** 如图 1-18a 所示的三铰拱桥, 由左右两拱铰接而成。设各拱自重不计, 在拱  $AC$  上作用有载荷  $P$ , 试分别画出拱  $AC$ 、拱  $CB$  及整体的受力图。

**解** (1) 先分析拱  $CB$  的受力。由于各拱的自重不计, 拱  $CB$  只受到铰链  $C$  和铰链  $B$  的约束反力  $F_C$  和  $F_B$  的作用, 处于平衡, 因此拱  $CB$  为二力构件。由此可以确定,  $F_C$  和  $F_B$  的作用线必沿  $C$  和  $B$  的连线, 指向不定。设拱  $CB$  受压, 则拱  $CB$  的受力图如图 1-18b 所示。

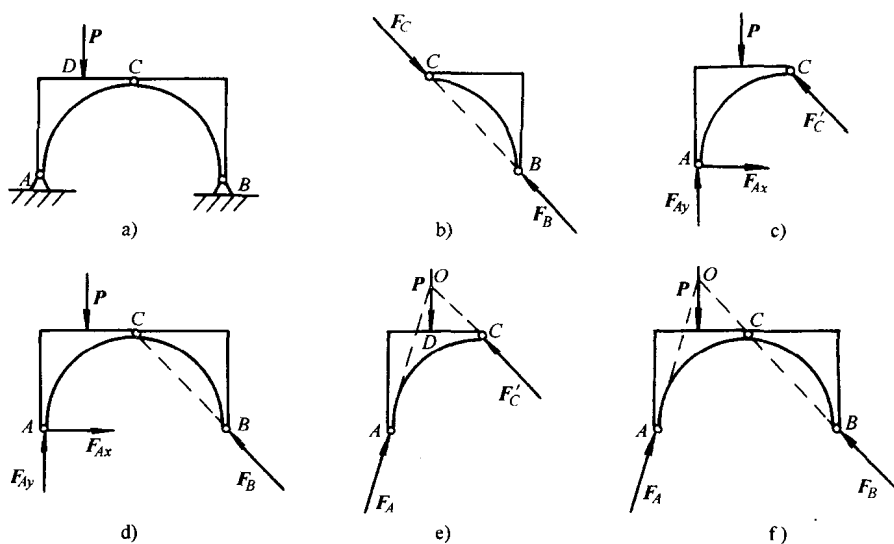


图 1-18

(2) 分析拱  $AC$  的受力。由于自重不计, 作用在拱  $AC$  上的主动力只有载荷  $P$ 。拱在  $C$  处受到拱  $BC$  给它的约束反力  $F'_C$  的作用,  $F'_C$  和  $F_C$  互为作用力与反作用力。拱  $AC$  在  $A$  处受到固定铰支座约束, 由于约束反力方向不定, 故可用两个正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  表示。拱  $AC$  的受力图如图 1-18c 所示。

(3) 分析整体的受力图。作用于整体的主动力只有载荷  $P$ , 整体在  $A$ 、 $B$  处受到固定铰支座的约束,  $B$  处约束反力  $F_B$  的作用线沿  $C$  和  $B$  的连线, 指向要与拱  $CB$  的受力图一致。  $A$  处约束反力方向不定, 故可用两个正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  表示, 同样  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  要与拱  $AC$  的受力图一致。销钉  $C$  处的一对力  $F'_C$  和  $F_C$  互为作用力与反作用力, 对整体的作用效果相互抵消, 不必画出。整体的受力图如图 1-18d 所示。

另外, 考虑到拱  $AC$  只在  $A$ 、 $C$ 、 $D$  三处受力处于平衡, 且  $C$  和  $D$  处的约束反力方位确定, 它们的作用线汇交于  $O$  点, 根据三力平衡汇交定理,  $A$  处约束反力  $F_A$  的作用线必过  $O$  点, 所以拱  $AC$  的受力图也可以画成如图 1-18e 所示, 其中  $F_A$  的指向是假定的。

同理根据三力平衡汇交定理可以将整体的受力图画成如图 1-18f 所示。

#### 讨论:

当研究对象是由几个物体组成的物体系时, 物体系内各物体相互的作用力称为内力, 物体系以外的物体对物体系的作用力称为外力。由于内力成对出现, 对物体系的作用效果相互抵消, 所以画受力图时, 约定不画内力。

**例 1-3** 如图 1-19a 所示, 各杆及滑轮自重不计, 各接触处光滑, 试画出  $AC$  杆、 $BC$  杆、重物及滑轮的受力图。

**解** (1) 取  $AC$  杆 (不包括销钉  $C$ ) 为研究对象。因  $AC$  杆为二力杆, 故  $AC$  杆的受力图如图 1-19b 所示, 其中  $F_A$  与  $F_{C1}$  的方向是假定的。

(2) 取  $BC$  杆 (不包括销钉  $C$ ) 为研究对象。因  $BC$  为二力杆, 故  $BC$  杆的受力图如图 1-19c 所示, 其中  $F_B$  与  $F_{C2}$  的方向是假定的。

(3) 取重物为研究对象。重物受有主动力  $P$  作用, 约束反力只有绳子拉力  $F_1$ , 重物的受

力图如图 1-19d 所示。

(4) 取滑轮 (包括销钉  $C$ ) 为研究对象。滑轮不受主动力作用, 在  $H$  处受到绳子  $HE$  的拉力  $F'_1$  作用,  $F'_1$  与  $F_1$  互为作用力与反作用力; 滑轮在  $G$  处受到水平绳  $DG$  的拉力  $F_2$  作用; 在  $C$  处,  $AC$  杆给销钉  $C$  的约束反力为  $F'_{C1}$ ,  $F'_{C1}$  与  $F_{C1}$  互为作用力与反作用力,  $BC$  杆给销钉  $C$  的约束反力为  $F'_{C2}$ ,  $F'_{C2}$  与  $F_{C2}$  互为作用力与反作用力。滑轮 (包括销钉  $C$ ) 的受力图如图 1-19e 所示。

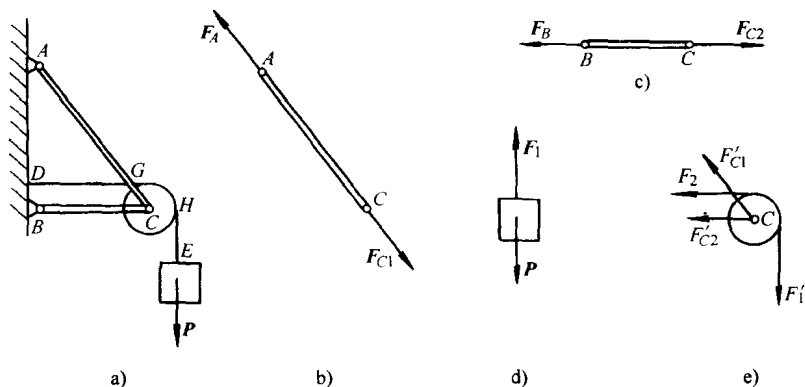


图 1-19

讨论:

- (1) 销钉  $C$  联接了三个物体, 在画受力图时, 一定要明确研究对象上是否包括销钉。
- (2) 有滑轮问题, 在画受力图时, 绳子与滑轮一般不分开。

**例 1-4** 图 1-20a 中, 均质平板  $ABCD$  在球铰链  $A$ 、蝶形铰链  $B$  及软绳  $CE$  作用下处于平衡状态, 平板重  $P$ 。设各接触处光滑, 试画出平板的受力图。

**解** 这是一个空间问题。

(1) 取平板为研究对象, 解除约束画出其简图。

(2) 画主动力。平板所受的主动力只有重力  $P$ , 作用于重心, 铅垂向下。

(3) 画约束反力。软绳  $CE$  的约束反力为  $F$ , 沿  $CE$  拉住平板; 球铰链  $A$  的约束反力为三个正交分力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$ 、 $F_{Az}$ ; 蝶形铰链  $B$  的约束反力为两个正交分力  $F_{Bx}$ 、 $F_{Bz}$ 。

平板的受力图如图 1-20b 所示。

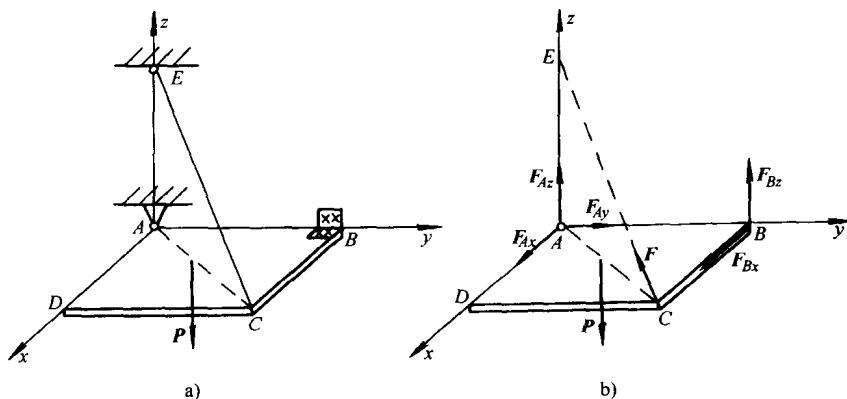


图 1-20

## 小 结

本章介绍了力（包括等效力系、平衡力系、合力）、刚体、平衡、约束等基本概念和静力学公理，并介绍了对物体进行受力分析和画受力图的方法。

### 1. 静力学五条公理是静力学的理论基础

公理一给出了两个共点力合成的方法，是力系简化的基础。它不但适应于刚体，而且也适应于变形体。对刚体来说，两力的作用线只要相交即可。

公理二给出了最简单力系的平衡条件，是研究力系平衡的基础。它只适应于刚体。

公理三给出了力系等效替换的一种基本形式，是力系简化的基础。它只适应于刚体。

公理四给出了物体之间相互作用力的关系。它不但适应于平衡的刚体和变形体，而且也适应于运动的物体。

公理五为研究变形体平衡问题提供了依据。

### 2. 最常见的典型约束

最常见的典型约束有柔索约束、光滑接触面约束、光滑圆柱铰链约束（包括固定铰支座、向心轴承、蝶形铰链）、滚动铰支座、光滑球铰链、止推轴承等。约束限制了物体某些方向的位移，约束反力的方向与约束所能限制的物体位移方向相反。有的约束其约束反力的方位和指向都是确定的，如柔索约束和光滑接触面约束。有的只能确定约束反力作用线的方位，而指向不能确定，如滚动铰支座。有的作用线方位不能确定，常用相互垂直的两个或三个分力表示，如光滑圆柱铰链和光滑球铰链。

### 3. 受力分析和受力图

正确地进行受力分析和画受力图，是解决静力学问题的前提和关键。通常画受力图的步骤是：

(1) 确定研究对象，并解除约束画出其分离体图。

(2) 在分离体图上画出研究对象所受的全部主动力。

(3) 在分离体图上画出研究对象所受的全部约束反力。一般情况下，在画约束反力时可考虑以下几个方面：

1) 根据约束性质确定约束反力，这是分析约束反力的基本出发点。

2) 应用二力平衡条件确定约束反力的方位。

3) 应用三力平衡汇交定理判断约束反力的方位，并使受力图得到简化。

4) 应用作用与反作用定律确定物体系统中物体之间的相互作用力。

## 思 考 题

### 1-1 是非题（对者划√，错者划×）

(1) 物体相对地球静止时，物体一定平衡，物体相对地球运动时，物体一定不平衡。 ( )

(2) 变形微小的物体就可抽象化为刚体。 ( )

(3) 若  $F_1 = -F_2$ ，则二力  $F_1$  与  $F_2$  要么是一对平衡力，要么是一对作用力与反作用力。 ( )

(4) 若作用在刚体上的三个力的作用线汇交于同一点，则该刚体一定处于平衡状态。 ( )