目　次

绪　论

现实世界中的种种事物和现象，是在不断地变化着的. 譬如我们所在的地球，它就天天在自转着，年年在绕太阳运行着，无止无休. 在这大地上和我们共存着的芸芸众生，大家都是无时无刻不在生长着、活动着，是那么多样、那么蓬勃！概括地说，事物和现象的常态绝大部分都是变动的；而“静态”则往往也可以作为“动态的平衡”或者“动态的特例”来处理.

“微积分学”就是为了研讨事物变动的需要而产生的一门数学；它为我们提供了从数量分析这个方面研讨变动事物的基础理论和有力工具. 概括地说，微积分学也就是变量数学. 下面让我们先简略地介绍一下微积分的几个基本概念和一个基本方法：

(A) **度量与实数系**：一般来说，常见的量可以归成两类：譬如一堆蛋、一群牛，它们都具有天然的个别单元，对于这样的量的处理方法是数一数它们的个数. 用来数个数的数学体系就是“自然数系”. 另一类量如长度、重量、温度、压力；这种量不具有天然不可分割的单元！我们处理这种量的办法是“度量”，由度量所产生的数系就是“实数系”. 换句话说，实数系乃是将常见的如长度、重量等等这一类量的通性加以抽象化、组织化所得出来的数学体系，它是用来表达、计算这一类量的简洁、有效的工具.

(B) **变数与函数**：一个变动的事物中往往包含着好多种量；它们的数值是随着该事物的变动而改变的，我们把它们叫做“变量”. 譬如 2 克氢气这个事物就含有体积、温度、压力这三种变量.

在广泛的生产与科研的实践中，经常需要了解某些事物或现象中所包含的诸多变量之间的相互关联. 譬如 2 克氢气的三种变量之间的关联就是下述气体定律:

$$\text{体积}(V\text{ 公升})=(22.4\text{ 公升})\cdot\frac{1}{\text{压力}(P\text{ 大气压})}\cdot\left(1+\frac{t}{273}\right)$$

当我们从数量分析这个方面去研讨一种动态事物时，我们用"变数符号"去表达"变量";用"函数关系"去表达变量之间的"相互关联". 概括地说，变数就是用来表达变量的数学符号; 函数关系就是用来表达变量之间的相互关联的数学概念. 函数概念的明确定义如下:

函数的定义: 设 x、y 是两个相互关联的变数，若 x、y 之间的关系是使得 y 的值可以由 x 的值的取定而确定，则称这种关系为: y 是 x 的函数. 同样地，设好几个变数 $x,y,\cdots,z$ 中有一个关系，它使得 z 的值由其他变数 $x,y,\cdots$的值的取定而确定，则称这种关系为: z 是 $x,y,\cdots$的函数. 用符号 $z=f(x,y,\cdots)$表示.

微积分的中心课题就是要从数理分析这个方面，对函数的性质作系统的深入研讨. 我们所用的方法，就是下面所要介绍的逼近法，它是分析学中贯串全局的基本方法.

(C) **逼近法**: 无论是实践上或理论上，以简御繁，以"已知"去研讨"未知"总是一个简朴实用的原则. 逼近法也就是这个原则的具体化、数量化. 譬如当我们在第一节中，要把认识的领域从熟知的正负分数推广到实数系时，"分数"就是"已知的简"，而那些不能够写成分数的"非比实数"就相对地是"未知的繁"; 以简御繁的具体方法就是用分数去逐步逼近那些"非比实数". 例如$\sqrt{2}$就是一个非比实数，开方运算告诉我们如何去逐步算出"比$\sqrt{2}$小的最大n位小数"如: 1, 1.4, 1.41, 1.414, …等. 概括地来说，逐步逼近也就是逐步地去求愈来愈准确的近似值，使得误差可以小到任意小. 在

科学实践中，精确性的要求也就是要确保误差小到某一程度，叫做精确度．逼近法的应用和用法是非常广泛而且多样的，在这本书的章节中将逐步、逐样地把它的用途向广度深度推进．

(D) 变率与微分： 一般说来，一个函数关系 $y=f(x)$ 就是说明 y 如何随着 x 的变动而变的一个关系．譬如 $y=kx$ 中 y 以正比关系随着 x 的变动而变；当 x 由 x_1 变到 x_2 时，y 由 $y_1=kx_1$ 变到 $y_2=kx_2$，所以 y 的值的改变 $(y_2-y_1)=k(x_2-x_1)$ 和 x 的值的改变 (x_2-x_1)，两者之间的比值等于 k，叫做 y 对于 x 的变率．同样地，一个一次函数 $y=(kx+b)$ 的变率也就是 x 的系数 k．当我们用 x-y 平面上所有满足 $y=f(x)$ 的点所构成的曲线，来图解表示函数关系 $y=f(x)$ 时；$y=(kx+b)$ 的图示就是一条斜率等于 k 的直线．常用的函数的图示曲线绝大部分都是平滑的，平滑性的直观说法
应改大字
是：“用愈高倍的显微镜去观察，曲线的微段就愈像一段直线．”例如一个半径 1 米的圆，当然一看就是弯曲的，但是把它放大一千万倍后再取其中 1 米长的一段来看，那就很难觉察出它是曲是直了（注：地球赤道圆的半径约为 0.6376×10^7 米，地平地圆？是无法用一米长的“短见”来觉察的，是不？）．所以一个平滑曲线的任何微段都简直是平直的；曲线在某一点的平滑性也就是曲线在该点存在一条切线，它无限逼近曲线的微段．当函数 $y=f(x)$ 的图示曲线在 $(x_0,f(x_0))$ 点平滑时，该点的切线的斜率也就定义为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的变率．一个给定函数 $y=f(x)$ 在每个平滑点的变率组成一个新函数 $y'=f'(x)$，叫做原给函数 $y=f(x)$ 的变率函数（或导函数），它在 x_0 点的函数值 $f'(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在 x_0 点的变率．由给定函数 $f(x)$ 去求它的变率函数 $f'(x)$ 的运算叫做微分运算．我们将在第四节中明确地给函数的变率下一个数量化的定义；并且详细地讨论微分运算的法则与用途．

(E) 求和与积分： 在说明对于一个给定函数 $f(x)$ “求和”这个

基本概念之前，让我们先拿几个常见的实例来看一看．一个行驶中的火车头，它的“速率表”和“里程表”分别告诉我们“当时的行驶速率”和“一直到那时为止行驶过的总里程”．“速率”和“总里程”分别是时间 t 的函数，而“速率表”和“里程表”也就是随时告诉我们这两个函数当时的函数值 $v(t)$ 和 $l(t)$ 的二个仪表．速率函数 $v(t)$ 和里程函数 $l(t)$ 之间具有下述密切关联：

“速率”就是“里程”随着时间而变动的“变率”，用前面的说法：$v(t)$ 就是 $l(t)$ 的变率函数．相对地，“总里程”则是：该火车头在种种速率下行驶的“总和”．譬如火车在 $t=a$ 时离开北京站沿京广线南驶，离站时的里程表读数是 $l(a)$，当 $t=b$ 时的读数是 $l(b)$，则火车离北京站的里程就等于 $l(b)-l(a)$，它是在 $t=a$ 到 $t=b$ 这一段时间里行驶的“和”．当火车在 t_1 到 t_2 这样一段时间是以等速率行驶，即当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 时，$v(t)=k$．则容易看出

$$l(t_2)-l(t_1)=k\cdot(t_2-t_1)$$

假如我们以横轴表示 t，分别把函数 $v(t)$ 和 $l(t)$ 用图解表示，则在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这一段上，$v(t)$ 的图示是高度为 k 的水平线段；$l(t)$ 的图示是斜率为 k 的直线段．

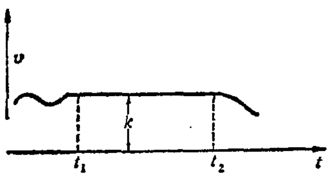

图 1-1

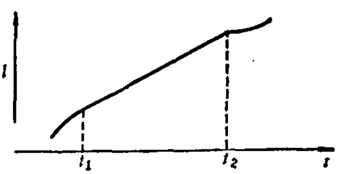

图 1-2

下面让我们再举两个常用的实例．譬如一个抽水站的“流量”（秒立方米）和它的“总供水量”（立方米），一个发电站的“发电率”（千瓦）和它的“总供电量”（千瓦小时），它们都是配对的二组时间的函数；前者是后者的变率函数，而相对地，我们也可以把后者叫做前者的求和函数．通常一个抽水站的流量是随着灌溉的需要而

分段调节成不同的常数，所以“流量函数”$f(t)$的图示是由分段高低不同的水平线段所组成，形状上像一个高高低低的阶梯，这一类函数以后我们把它叫做阶梯函数. 相对应地，“总供水量函数”$S(t)$的图示就是由分段斜率不同的线段所连成的折线，这样的函数以后我们把它叫做折线函数.

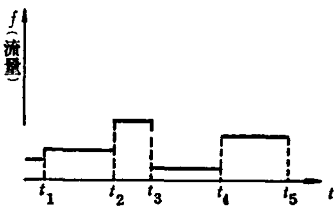

图 1-3

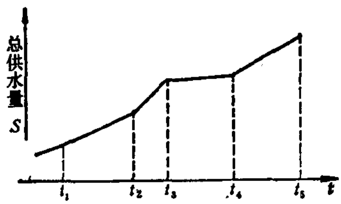

图 1-4

从上面几个简单的实例，可以看出下列几点：

(i) 对于一个给定函数（如速率函数 $v(t)$和流量函数 $f(t)$），求和是一种常用的基本概念；而且在上面三个实例中，“速率函数”和“里程函数”，“流量函数”和“总供水量函数”，“发电率函数”和“总供电量函数”；它们都是配对地前者是后者的变率函数，后者是前者的求和函数.

(ii) 折线函数的“变率”分段地是个常数，所以它的变率函数是个阶梯函数；反过来，阶梯函数分段地是个常数，所以它的求和函数分段地是斜率等于该常数的线段，是一个折线函数.

(iii) 设 $S(t)$是函数 $f(t)$的“求和函数”，则 $S(b)-S(a)$就等于函数 $f(t)$ 在 $t=a$ 到 $t=b$ 之间的“和”. 不难看出，

$$S(b)-S(a)$$

相当于 $f(t)$的图示曲线下，从 $t=a$ 到 $t=b$ 之间的面积（图 1-5）.

从一个给定函数 $f(t)$去求它的“求和函数” $S_f(t)$这个运算叫做积分运算. 在第五节中，我们将用阶梯函数上下夹逼的办法，给“求和”这个基本概念作一个明确的数量分析.

总结上面对于几个基本概念和基本方法的简略介绍，让我们给“微积分学”的基础理论作一个概略的描述：

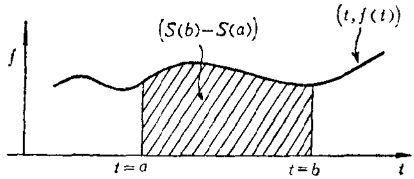

图 1-5

“微积分学”是用来研讨变动事物的“变量数学”，我们用实数系去表达、计算各种“度量型”的量如长度、重量、时间……等；用变数符号来表达种种变量；用函数关系来表达一个事物或现象中各种变量之间的关联．所以微积分学也可以说是研究函数的一门数学．很自然地，我们要问：“函数的种种性质中，哪些最基本、最重要呢？”在上面我们简略地介绍了函数的二个基本性质——“变率”与“和”；相应地产生了“微分”与“积分”这两种基本运算．“微积分”这个名词的来源也就是因为微分与积分这两种运算乃是数理分析的基础所在；而且这两种基本运算是互逆的！是密切关联、相辅相成的！这个互逆的密切联系的理论基础也就是下述基本定理：

微积分基本定理：设 $f(t)$ 是一个在闭线段 $[a,b]$ 上到处连续的函数，令 $S_f(t)$ 是 $f(t)$ 的求和函数，则 $S'_f(t)=f(t)$，即 $S_f(t)$ 的变率函数就是 $f(t)$．

上述定理的证明是十分简单明了的（参看第六节），但是它的应用却既广且深．可以说它乃是一个人人能懂、到处有用的大道理，它是微积分基础理论的关键所在！

其次，让我们来谈一谈微积分的基本方法——逼近法．逼近法的原理就是以简御繁，是一种简单朴素的想法．实用时，我们选用一类“已知的简”在某些性质上数量化地逼近所要研究的“未知的繁”；从而把原先未知的繁复问题简化成已知问题而加以解答．譬如在“变率”这个性质上，“折线函数”的变率分段地是常数，是十分简单明了的；但是任何平滑曲线的微段都几乎是平直的，所以我

们可以用折线函数在“变率”这个性质上逼近任何平滑曲线函数(即其图示曲线是平滑的函数). 在函数的“和”这个性质上,“阶梯函数”的和是简单明了的;在第五节中我们将证明任何连续函数的和,都可以用阶梯函数去上下夹逼(参看第五节-Ⅱ). 在整个微积分的研讨中,用来用去就只有这一种基本方法. 俗语常常用“程咬金三斧头”来笑话一个人的招式贫乏,那么微积分可就只有“逼近法”这一斧头了!可是逼近法这一斧头却是无往不利、无坚不摧的!学微积分也就是要学会灵活运用逼近法去简化和解决实际问题.

微积分的基础理论是简明朴实的,但是微积分的应用是普遍而且多样的,它是研讨任何变动事物或现象所不可或缺的有力工具!下面让我们再来谈一谈实践与理论之间相辅相成、交互进展的关系. 譬如用望远镜去积年累月观察行星的运行,测定各个行星在不同时刻所在的方位和距离,这就是天文学中的一种实践. 从这一大堆错综复杂的观察记录中,加以归纳分析,从而得出下述行星运行三定律,是天文学中一个重要的理论:

开氏第一定律: 行星绕太阳运行的轨迹是椭圆形的,太阳的位置正好在椭圆的一个焦点上.

开氏第二定律: 假如我们把太阳中心向某一行星所引的直线叫做“矢径”,随着行星的运行,这个矢径在椭圆内“扫”过一片面积. 在等时间内该矢径所扫过的面积恒为常数(参看右图).

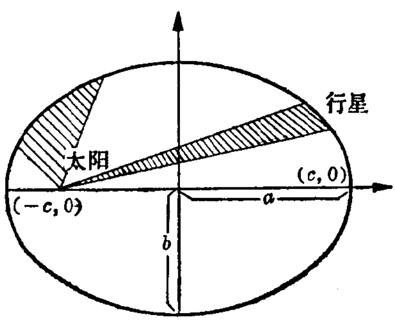

图 1-6

开氏第三定律: 太阳系中各行星的椭圆轨迹的长径的立方(即$(2a)^3$)和其周期的平方之间的比值是一个和行星选取无关的常数.

同样的,当年伽里略在比

萨斜塔测定"自由落体"的速度和铁球在斜面上滚动的速度，也都是一种"实践"．将这些实验的资料加以归纳分析，从而得出"惯性定律"和"自由落体等加速定律"，这就是"理论"．当牛顿继而用微积分对于上述"行星运行定律"和"自由落体等加速定律"加以数理分析(参看第十二节 I)，则进一步提出"万有引力定律"．从上面这些史例可以看出，从实践所得的感性认识，精炼提升到理性认识，其主要的过程是归纳、分析、抽象、综合．那么我们怎么样从理论回到实践呢？且让我们就以上述史例的延伸来说明一下吧．

按照万有引力定律，不但行星与太阳之间有引力，行星与行星之间也有相互引力，这些引力便应该使得任何一颗行星的轨迹稍异于以太阳为焦点的椭圆轨迹，(由此可见，行星三定律其实只是近似的准确)．譬如太阳系行星中最重的是木星(约为太阳质量的千分之一)，它对于附近的土星的引力使得土星轨迹和椭圆轨道之间所产生的"偏差"也就最显著．更精确的天文观察发现由理论推算所应有的"偏差"和实测是相符合的．有些天文工作者更进一步把三颗大行星木星、土星和天王星之间的相互引力，依照万有引力定律算出来；再用这些引力来改正它们的椭圆轨迹．发现对于木星和土星，推算和实测几乎完全符合，但是对于天王星的轨迹，推算和实测之间依然存在着不可忽视的差别！在 1846 年，Adams 与 Leverrier 不约而同地提出一个解决上述矛盾的可能性："会不会还有一颗尚未发现的行星在干扰着天王星的运行呢？"于是他们运用万有引力定律由实测轨迹去反过来推算这么一颗假设存在的行星应在的位置．果然，在计算出来的方位上找到了现在叫做海王星的新行星．冥王星的发现过程几乎与海王星的发现一样，只是它的质量要小得多，它的发现要比海王星迟八十年．同学们不妨设想一下：漫天找行星一如大海捞针！假如没有万有引力定律和数理分析先算出它们应在的方位，说不定它们到现在还是两个"未知星"呢！

上面只是在天文学中由理论回到实践的一个实例．其实，在广泛的生产与科研领域中，由实践提升到理论和由理论再回到实践，是一直在交互进展着的，它们是相辅相成的．这是广大的生产、科研工作者都身体力行、深有体会的．现在让我们再就微积分的领域来分析一下理论与实践是如何相辅相成、交互进展的：

微积分所要研讨的是变量问题的数理分析．所以各种“量”以及各种“变量之间的关系”也就是微积分的原始素材——最初步的“实际”．当我们对于这些常用的“量”的通性，加以抽象化、系统化，即得实数系．同样地，把常见的“变量之间的关系”数量化、抽象化而定义了函数这个基本概念．这也就是从实际提升到理论的第一步．当我们进一步去研究函数的基本性质时，“变率”与“和”就是实际，用逼近法从而引导出“微分”与“积分”这两种运算则相对地是“理论”．而微积分基本定理则是整个基础理论的关键所在．本书的第一、第二章所讨论的也就是如何从实际出发，逐步精炼推进，建立一个具有高度普遍性的基础理论．第三、第四章的主要课题则是讨论如何把这些理论用回到实践去．当然应用的过程中，又自然而然地体会到更进一层的理论．例如第三章的常微分方程系基本定理和第四章中的多重积分基本定理，它们都是为了进一层应用的需要，而对微积分基本定理所作的一种推广．

一般来说，实际的情况常常是繁杂多样的，而相对地，由实际归纳、分析、抽象所得的理论，则比较精简、比较具有普遍性．所以从实践到理论再回到实践也就是“由繁精简、以简御繁”的一种具体表现．在微积分的领域中，函数的种类是多样的，应用的问题则更为繁多复杂，但是所有这些函数、这些问题的基础理论是统一而简朴的，那就是微分与积分这二种基本运算，逼近法这一个基本方法和一个微积分基本定理．

第一章：基本概念与基本方法

引子：在广泛的生产与科研的实践中，经常需要解决种种“量”的问题；需要去了解变动事物中各种变量之间的“关系”．譬如以气体为例，当我们把各种不同的气体在不同的温度、压力下的体积，细心地做实验加以测定、纪录、比较、分析，就不难发现下述简要事实：

(1) 任何克分子量的气体在摄氏零度、一个大气压下的体积总是 22.4 公升；和气体的种类无关．

(2) 当温度固定时，体积和压力成反比，即

$$体积=常数\cdot\frac{1}{压力}，［这叫做波义耳定律］.$$

(3) 当压力固定时，其体积的膨胀系数是$\frac{1}{273}$，即

$$t°C 的体积=0°C 的体积\cdot\left(1+\frac{t}{273}\right)，［查理定律］.$$

(4) n 克分子量的气体的体积、压力、温度这三种变量；假如我们分别用符号 V、P、t 表示它们的值，则气体的内部关联可以用下列公式表达：［叫做气体定律］

$$V=n\cdot(22.4 公升)\cdot\frac{1}{P}\cdot\left(1+\frac{t}{273}\right).$$

数学就是一门在普遍理论的层面上研讨量的科学．我们用实数来表达量，用变数符号表达变量，用函数关系来表达“变量之间的相互关联”．在第一节我们要简明地说明度量与实数的关系以

及实数系的基本性质. 在第二节我们将用简单基本的实例来说明函数这个基本概念. 在讨论实数和函数时，很自然地产生一种叫做逼近法的基本方法. 逼近法是一种原理简朴但是应用广泛而且多样的方法,它是贯串全局的主力军. 本书所要讨论的微积分学,也就是系统地用逼近法去研究变量数学的一门学科. 我们将在第三节中先用一些简明的实例，对于逼近法的概念与用法先作一个明确初步的介绍,在以后的章节中,自然还会逐步地把它的应用向广度、深度扩展.

第一节: 度量与实数

一般来说,常用的量可以归成两类:例如一群羊、一排树,它们都具有天然的个别单元;即一只羊、一棵树;对于这一类量,我们只要去数一数它们的“个数”. 用来数“个数”的数学体系就是大家所熟知的**自然数系**,$\{1,2,3,\cdots\}$. 另一类如长度、重量、时间等等,这种量并不具有天然不可分割的单元. 我们处理这种量的办法是度量. 由度量所产生的数系也就是这一节所要讨论的课题: **实数系**. 下面将以长度为例,说明度量和实数系的源起如下:

I 长度的度量:

因为长度这种量并不具有天然不可分割的单位，所以我们只好选用人为的单位长，譬如“米”就是世界各国共同约定而选用的单位长,但是英、美等国至今依然沿用“英尺”作为单位长. 设线段 u 是所选用的单位长,当我们要度量一个线段 a 时,我们所要去求的乃是 a 和 u 之间的“比值”;这个比值是一个实数 k, 我们就说线段 a 的长度是 k 单位. (例如 u 取定为米,则 a 的长度就是 k 米). 现在让我们耐心地分析一下，在实践中这个“比值”是怎么样求得的?

我们先拿一根直尺 u,用它去逐段比量所要度量的线段 a. 假如 a 恰好是 n 个和 u 等长的线段首尾连接而成，我们说 u 恰能整量 a，a 的长度是 n 单位. 但是假如 u 不能整量 a；例如下图所示的 a 比 $4u$ 要长些，却比 $5u$ 要短些：

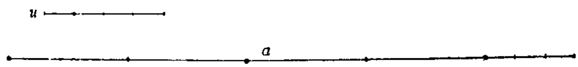

图 1-7

试着去解决上述不能整量的矛盾的一个简朴的想法是：把单位长 u 适当地加以等分，希望等分后的"分单位"能够整量 a（譬如上面的例子中 $\frac{1}{4}u$ 就可以整量 a，即 $a=4\frac{3}{4}\cdot u=\frac{19}{4}\cdot u$）. 一般说来，假如 a 能用 $\frac{1}{m}u$ 这个分单位来整量，譬如 $a=\frac{n}{m}\cdot u$ 则 a、u 之间的比值是个有理数 $\frac{n}{m}$（往后我们将改称为比数，理由见注一）. 在这儿，就自然地产生下述基本问题：

度量基本问题：任给两个量 a、b 之间的比值是否恒为一比数？换句话说，对于任给两个量 a、b，是否存在一个同时可以整量 a、b 的 u？

上面这个问题的重要性可以分别从正、反两面来分析：假如任何两个量的比值总是比数，那么比数全体（以后叫做比数系）就足够处理度量问题，因为比数系的运算和性质都是十分简单、初等的；这也就意味着关于这种量的问题的简单性和初等性（参看第三节-Ⅱ 末的注），从另一方面来看，假如两个量之间的比值不一定是

（注一）：有理数是 rational number 的误译，ratio-n-al 是 ratio 的形容词形式. 所以它的合理的译名应该是比数. 同理，irrational number 应该叫做非比实数而不应该叫做"无理数". 往后在本书中将更正这两个由误译而沿用至今的名词，改用比数和非比数. 因为它们的字义明确，不像"有理数"、"无理数"易生误解.

比数；则比数系就不足以处理度量问题．换句话说，我们就得学会一个含有"非比实数"的数系，才能充分处理度量问题．总之，上述基本问题是必须实事求是地弄明白的！（注二）

Ⅱ 非比实数的存在：

现在我们以长度为例，说明上述基本问题的答案是否定的！换句话说，存在有二个线段 a、b，它们的比值不可能是个比数！这样的一对线段其实是非常多的．但是要证明二个线段的比值不可能是个比数则往往不很容易．下面所介绍的，就是希伯斯所发现的最早二个例子和他的原始证明：

［例1］：a＝正五边形的边长，b＝正五边形的对角线长．

［例2］：a'＝正方形的边长，b'＝正方形的对角线长．

则 a、b 和 a'、b' 就是两对比值是"非比实数"的线段．但是要证明上述事实，我们先得要有一个切实可行的办法去检定两个给定线段的比值是否是个比数？下面让我们先讨论一下一个自然而且耐人寻味的**辗转丈量检定法**：

设线段 c、d 的比值是个分数 $\frac{m}{n}$．换句话说，存在一个共同单位 u，$c=m\cdot u$，$d=n\cdot u$．令 g 为 m、n 的最大公约数，则 $u_0=g\cdot u$ 就是同时可以整量 c、d 的最长共同单位尺．相信同学们一定记得在中小学里学过的"辗转相除法"，用它可以求出二个整数 m、n 的最大公约数 g．下面就是相对应的"辗转丈量法"，用它可以求出上述二个线段 a、b 的最长公共尺 u_0：

(i) 设 $c<d$，用 c 去丈量 d，若能整量，则 c 就是所求的最长公共尺，不然，则得一较短的"余段" r_1．用式子表达，即

（注二）：纪元前六世纪，毕氏学派（Pythagarean School）曾主观地主张任何二个线段的比值应该是个比数．但是在毕氏去世后不久，其门人希伯斯(Hippasus)证明正五边形的边长和对角线之间的比值不可能是个比数！这就是人类最先证明的"非比实数"．

$$d=q_1\cdot c+r_1,\quad r_1<c.$$

(ii) 用 r_1 回头来丈量 c，如能整量，则 r_1 就是所求的最长公共尺. 不然，则得一比 r_1 短的"余段"r_2，即

$$c=q_2\cdot r_1+r_2,\quad r_2<r_1.$$

(iii) 再用 r_2 去丈量 r_1，……如此辗转丈量，若第 k 次的余段 r_k 恰能整量第$(k-1)$次的余段 $r_{(k-1)}$，则 r_k 就是所要去求的"最长公共尺".

也许同学们会问："假如按上述辗转丈量，一直得不到一个可以整量上一次的余段 $r_{(k-1)}$ 的一个余段 r_k，那岂不是成了一个无止无休的局面，怎么办呢？" 对于上述问题的实事求是的回答是："这种情况是可能发生的，而且这种情况也就是说明了 c、d 的最长公共尺是不存在的！即 c、d 的比值不可能是个比数！"

所以辗转丈量这个法子是可以两用的：当线段 c、d 的比值是个比数时，它可以用来求出它们的最长公共尺；当 c、d 的比值不是比数时(即是个非比实数)，则它又可以用来证明这个事实. 换句话说，线段 c、d 的比值是个非比数的充分必要条件是对于 c、d 的辗转丈量法无止无休！下面我们就用它来证明例 1 中的 a、b 的比值是非比数！

[例 1 的证明]：(注三)

(i) 如下图所示⬠$ABCDE$ 是一个正五边形，它的边长是 a、对角线长是 b. 因为任何五边形可以分割成三个三角形. 所以由三角形内角和是一个平角 π 可以推论得："五边形的内角和等于 3π"，所以正五边形的每个内角都等于 $\frac{3\pi}{5}$.

(注三)：证明的要点在于说明 a、b 的辗转丈量永无止境！证明的想法清新巧妙，但是十分初等，它不依赖其他预备知识. 同学们初读时，如感到不习惯，可以暂时略过，留待以后再回头来读这个有趣的证明.

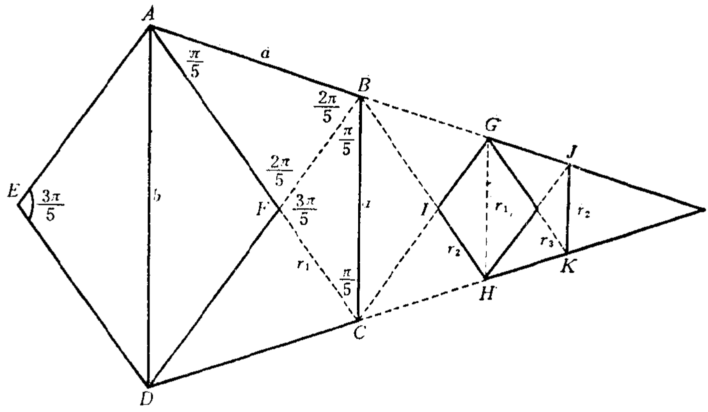

图 1-8

(ii) $\triangle ABC$ 是等腰的，而且$\angle ABC=\frac{3\pi}{5}$. 所以它的两个底角是$\frac{\pi}{5}$. 即$\angle BAC=\angle BCA=\frac{\pi}{5}$. 同理，$\angle DBC=\frac{\pi}{5}$.

(iii) $\angle BFC=\left(\pi-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{5}$;

$$\angle AFB=\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{2\pi}{5},\quad \angle ABF=\left(\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{2\pi}{5};$$

即$\triangle ABF$ 的底角相等，所以是等腰的：即 $\overline{AF}=\overline{AB}=a$.

同理，$\triangle FBC$ 也是等腰的，所以$\overline{FB}=\overline{FC}=(b-a)=r_1$.

(iv) 在$\overline{AB}$ 的延长线上取一段$\overline{BG}=(b-a)=r_1$；同样地在$\overline{DC}$ 的延长线上也取一段 $\overline{CH}=(b-a)=r_1$. 连结 $\overline{GH}$，可以看出，⬠$FBGHC$ 是一个较小的正五边形！它的边长是$r_1=(b-a)$，它的对角线是 a.（因为它的五个内角都是$\frac{3\pi}{5}$，而且

$$\overline{FB}=\overline{BG}=\overline{FC}=\overline{CH}=r_1,$$

所以它也是正五边形.）

(v) 上述作图可以重复地作出一个个较小的正五边形. 每次

小一号正五边形的对角线和前一号正五边形的边等长；而小一号的边长则等于前一号的对角线长减去边长后的余段. 换句话说，不管做多少次，第 k 次的辗转丈量还是用一个正五边形的边长去丈量它的对角线. 用算式表达，也就是从a、b 作辗转丈量的计算是:

$$b=a+r_1,\ a=r_1+r_2,\ r_1=r_2+r_3,\ \cdots,$$
$$r_{(k-1)}=r_k+r_{(k+1)},\ \cdots$$

这样永远继续下去，是永无止境的！所以 a、b 之间的比值不可能是比数！而是一个“非比数”！

［例 2 的证明］:

［注: 在希伯斯发现上述正五边形的证明后，他接着也用同样的方法，证明了正方形的边长和对角线之间的比值也是“非比数”. 我们将在思考与习题中再来讨论这个证明. 下面将改用比较代数化的方法来证明$\sqrt{2}$不可能是个比数.］

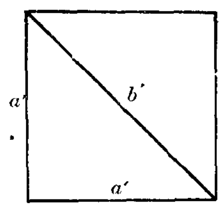

图 1-9

(i) 由勾股定理，即得

$$b'^2=a'^2+a'^2=2a'^2.$$

所以 a'、b' 的比值是$\sqrt{2}$. 下面就要用代数的方法来证明$\sqrt{2}$不可能是个比数. 换句话说，由$\sqrt{2}$是个比数的假设可以推论出矛盾来，因而假设是不能成立的！

(ii) 假设$\sqrt{2}$是个分数，即存在适当的正整数 m、n 使得$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$. 经过约分，我们可以假设 m、n 之间不再有公共质因数. 将等式$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$两边平方，即得

$$2=\frac{m^2}{n^2},\ 即\ 2\cdot n^2=m^2,$$

（注四） 上面对于例 1 和例 2 给出二种不同的证明，前者是从几何上长度的度量直接着手的；而后者则由勾股定理归于代数问题来讨论，而且证明的关键在于运用整数因子分解的唯一性，我们将在思考与习题中，对上述两种证明再加以比较分析.