北京大学数学教学系列丛书

研究生
数学基础课教材

黎曼几何引论

上册

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

黎曼几何引论

（上 册）

陈维桓　李兴校　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何引论(上册)/陈维桓,李兴校编著. —北京:北京大学出版社,2002.12

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05368-1

Ⅰ.黎… Ⅱ.①陈… ②李… Ⅲ.黎曼几何-高等学校-教材 Ⅳ.O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036504 号

书　　名:黎曼几何引论(上册)
著作责任者:陈维桓　李兴校　编著
责 任 编 辑:邱淑清
标 准 书 号:ISBN 7-301-05368-1/O·0522
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
排 版 者:北京大学印刷厂
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
890×1240　A5 开本　16.75 印张　450 千字
2002 年 12 月第 1 版　2002 年 12 月第 1 次印刷
印　　数:0001—3000 册
定　　价:24.00 元

《北京大学数学教学系列丛书》编委会

内容简介

“黎曼几何引论”课是基础数学专业研究生的基础课。从 1854 年黎曼首次提出黎曼几何的概念以来，黎曼几何学经历了从局部理论到大范围理论的发展过程。现在，黎曼几何学已经成为广泛地用于数学、物理的各个分支学科的基本理论。本书上册是“黎曼几何引论”课的教材，前四章是黎曼几何的基础；第五与第六章介绍黎曼几何的变分方法，是大范围黎曼几何学的初步；第七章介绍黎曼几何子流形的理论。每章末都附有大量的习题，书末并附有习题答案和提示，便于读者深入学习和自学。

本书可供综合大学、师范院校数学系、物理系学生和研究生用作教材，并且可供数学工作者参考。

作者简介

陈维桓　北京大学数学科学学院教授，博士生导师。1964 年毕业于北京大学数学力学系，后师从吴光磊先生读研究生。长期从事微分几何方向的研究工作和教学工作，开设的课程有“微分几何”、“微分流形”、“黎曼几何引论”和“纤维丛的微分几何”等。已出版的著作有：《微分几何讲义》(与陈省身合著)，《黎曼几何选讲》(与伍鸿熙合著)，《微分几何初步》，《微分流形初步》和《极小曲面》等。

李兴校　河南师范大学数学系教授，1994 年在四川大学获得博士学位，主要研究方向是子流形微分几何。

序　言

自1995年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了30多门研究生普选基础课程(其中数学系18门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相

配合,我们进行了有组织的教材建设。计划自 1999 年起用 8 年的时间修订、编写和出版 40 余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考,记录了我们教学实践的足迹,体现了我们教学改革的成果,反映了我们对新世纪人才培养的理念,代表了我们新时期的数学教学水平。

经过 20 世纪的空前发展,数学的基本理论更加深入和完善,而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛,而且活跃于生产力第一线,促进着技术和经济的发展,所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识。同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学,正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化,数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素,将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区,但要十分稳重和积极;人才培养无止境,既要遵循基本规律,更要不断创新。我们现在推出这套丛书,目的是向大家学习。让我们大家携起手来,为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张继平

2002 年 5 月 18 日

于北京大学蓝旗营

前　言

自从 B. Riemann 在 1854 年给出“关于几何学的基本假设”的就职演讲以来，黎曼几何已经成为数学中十分重要的基本理论．黎曼几何的基础知识是从事现代数学研究的人必须掌握的内容．“黎曼几何引论”课程是数学系研究生的必修课程之一．

经过我们在北京大学长期的教学实践，和持续不断的教学体系及教学内容的改革，在 10 年前把“流形论”部分从“黎曼几何引论”课中分离出来，单独成为一门“微分流形”课，并且已经出版了教材《微分流形初步》(陈维桓编著，高等教育出版社，1998 年第一版，2001 年第二版)．该课程作为黎曼几何的预备课程，既适用于硕士研究生一年级，也可供数学系本科高年级学生选修．我们相信，该课程的开设对于加强大学的几何教学和提高大学生的数学知识水平会起相当大的作用．现在的“黎曼几何引论”以“微分流形”课为先修课程，其教学重点是联络、黎曼度量、测地线、曲率等黎曼几何的基本概念和基础理论，并且比较系统地介绍大范围黎曼几何、特别是变分方法在黎曼几何中的应用．本书在实质上是我在北京大学多年讲授“黎曼几何引论”课的讲稿，其取材受到参考文献 [5; 21] 的重大影响．其中第八、九、十章的内容我也在北京大学的研究生选修课或讨论班上，以及在南开数学研究所举办的“几何拓扑学术年”(1986) 和“微分几何学术年”(1995) 的讲座中分别讲过多次．

一本适用的教材首先要取材适当．一方面，它必须反映当代数学发展的水平，满足数学发展的需要．黎曼几何发展到现在，已经成为相当成熟的学科，黎曼流形已经成为许多数学分支演绎的舞台．我们不仅需要在平直空间中研究数学，而且需要在弯曲空间中发展数学．在目前，这个最适当的弯曲空间就是黎曼流形．所以，不仅是专门从事几何研究的学生要学习黎曼几何，而且数学系的从事各个方向研究

和学习的学生都应该学习这门课. 因此, 课程设计和教学内容必须要兼顾到各方面的需求. 在另一方面, 教材又不能写成“百科全书”, 把黎曼几何各个方面的成果都收集进来. 我们只能以黎曼几何中与当前数学发展水平相适应的基础知识和基本理论为重点, 务必使学生通过本教材的学习, 理解和掌握黎曼几何的基本思想和基本方法.

教材的语言要通畅而平易近人; 讲理要透彻并富于启发性和直观性; 所用术语和记号要准确、明快和简洁. 有的数学著作以言简意赅为其写作风格. 但是, 我们认为教材更应该写得易于理解, 能够吸引读者, 使读者感到亲切, 而不要板着脸把读者拒之门外.

我感到很高兴的是李兴校教授愿意参加到编写《黎曼几何引论》这项工作中来. 他的参加使得本书的写作进程加快了, 并且全书的编著质量也得到了提高. 特别是全书的习题、答案及提示是由他负责编写的. 本书是我们两个人愉快合作的结晶.

普遍认为, 编写教材是费力不讨好的任务; 尤其是不少年轻一些的同志觉得编写教材无非是抄抄写写, 是剪刀加浆糊的产物, 是脑力劳动中的低层次工作. 实际上, 一本好的教材是研究工作的长期积累和教学实践的经验总结, 也是重要的创新成果. 作者不仅要了解该学科的全貌, 能够博采众长, 而且要成为教学实践、教学改革的有心人, 能够持续不断地投入全部精力和甘于默默无闻的长期不懈的努力, 总结自己在教学中的心得体会. 如《南开大学数学教学丛书》(科学出版社出版) 的序中所说: 这些教材不是编出来的, 而是在长期教学中“教”出来的, “改”出来的. 我十分赞同关于教材建设的这个观点. 形成一个先进的教材体系, 是创新人才培养工作中的“百年大计”, 从上到下都应该重视这件事. 基于这些认识, 我们自己在几何类课程的教材建设方面已经作出了长期、艰苦、系统的努力. 值得欣慰的是, 这些努力没有白费: 献给读者的一系列几何教科书在培养数学人才和普及微分几何知识方面应该说起到了显著的作用.

本书可以用于高等院校数学系研究生的不同层次的几何课程. 标

准的研究生课程“黎曼几何引论”可以在先修课“微分流形”的基础上，以本书第二章至第七章为主要内容，在一学期内讲完（周学时为 3）. “黎曼几何引论”课的另一种设计可以从微分流形的概念讲起，以本书第一章至第四章的内容为主，结合《微分流形初步》，也可以在一学期内完成（周学时为 3，或 4）. 后一种课的设计也许会有更广泛的适应性，而第五章至第七章可以作为同学自学的材料. 第八、九、十章分别讲述 Kähler 流形、黎曼对称空间和主纤维丛上的联络的基础知识，它们是黎曼几何的有机组成部分，对于学习、了解和应用黎曼几何基本理论是不可或缺的. 这些内容可以作为微分几何、拓扑学、几何分析、函数论、数学物理等研究方向的研究生进一步自学的材料，也可以作为“黎曼几何 II”的教材. 为了方便读者使用，本书按照上面的设想分成上、下两册出版.

在这里，我们需要特别提一下，第九章“黎曼对称空间”的取材和写作参照了南开数学研究所孟道骥教授的讲稿. 在 1988 年，我们曾经邀请孟道骥教授到北京大学数学系给研究生系统地讲授“黎曼对称空间”；后来，我在北京大学的几何讨论班上也多次讲过此内容. 在我们编写第九章时，孟道骥教授把他当年的讲稿慷慨地借给我们参考；并且在第九章完稿之后，他又认真地审读过一遍. 作者在此特向他表示崇高的敬意和衷心的感谢. 虽然黎曼对称空间在本质上是李群、李代数的理论，但是它是特殊的黎曼空间，是检验几何理论的重要场所，所以本书的重点是强调它的基本理论和几何性质. 读者在熟悉（或承认）李代数的一些基本事实之后，阅读本章似乎没有特别的困难. 由于篇幅的限制，也为了不喧宾夺主，关于李代数我们只提及所要用到的一些基本概念和事实，没有给出它们的详细的证明. 但是，这样处理的结果反而使得黎曼对称空间的性质和结构能够更加清晰、更加突出地展现在读者面前，达到更好的效果.

在本书的写作过程中，第一作者得到北京大学数学科学学院、北京大学研究生院、北京大学教材建设委员会、北京大学出版社以及国

家自然科学基金 (项目号: 19871001, 10226037) 的支持和资助. 在这期间, 第二作者得到国家自然科学基金 (项目号: 19971060) 和河南省自然科学基金的资助. 作者在此向他们表示衷心的感谢. 在本书交付北京大学出版社正式出版之前, 孟道骥教授和马辉博士受本丛书编辑委员会的委托, 认真、细致地审读过全书初稿, 并且提出过许多宝贵的意见和建议. 作者在此向他 (她) 们表示深切的谢意. 最后, 作者对责任编辑邱淑清老师卓有成效的辛勤工作表示敬意.

限于作者的水平, 本书中的不足之处肯定是存在的, 诚恳地希望读者能不吝指正.

陈维桓

2002 年 1 月于北京大学

上 册 目 录

下册目录预告

第八章 Kähler 流形

复向量空间，复流形和近复流形，复向量丛上的联络， Kähler 流形的几何，全纯截面曲率， Kähler 流形的例子，陈示性式

第九章 黎曼对称空间

第十章 主纤维丛上的联络

绪　　论

"什么是黎曼几何学？" 每一位初学者在打开本书时都会提出这样的问题. 对这个问题的回答既是简单、容易的，又是复杂、困难的. 让我们从 Gauss 的 "绝妙定理"(Theorema Egregium) 谈起.

为了刻画三维欧氏空间中正则参数曲面的形状，通常要引进曲面的第一基本形式和第二基本形式的概念. 第一基本形式是曲面上的切向量 $d\vec{r}$ 的长度平方，即

$$I = d\vec{r} \cdot d\vec{r}.$$

第二基本形式是

$$II = d^2\vec{r} \cdot \vec{n}$$

(其中 $\vec{n}$ 为曲面的单位法向量), 在本质上它是曲面上任意一点的邻近点到该点切平面的有向距离. 特别是，两个基本形式之比

$$\frac{II}{I} = \frac{d^2\vec{r} \cdot \vec{n}}{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \vec{n}$$

是曲面上通过该点、以 $d\vec{r}$ 为方向的曲线的曲率向量 $\kappa\vec{\beta} = \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ 在曲面该点处的单位法向量 $\vec{n}$ 上的投影 (这里的 κ 和 $\vec{\beta}$ 分别是曲线的曲率和主法向量), 它是仅依赖曲面在该点的切方向的函数. 如果考虑曲面上由该点的切方向 $d\vec{r}$ 和单位法向量 $\vec{n}$ 所张成的平面，并且用该平面在曲面上截出一条曲线，则这条曲线以 $d\vec{r}$ 为切向量，同时它在该点的曲率向量与 $\vec{n}$ 是共线的. 所以该曲线在该点的曲率正好是 $\dfrac{II}{I}$, 我们把它称为曲面在该点沿切方向 $d\vec{r}$ 的法曲率，记为 κ_n. 在曲面上任意固定一点，则 κ_n 是在该点的切方向的函数，它反映了曲面在该点沿该切方向的弯曲方向和弯曲程度. 一般说来，曲面在每一点有两个彼此垂直的切方向，使得法曲率 κ_n 在这两个方向分别达到它的最大值和

最小值. 这两个切方向称为曲面在该点的主方向, 相应的两个法曲率称为曲面在该点的主曲率, 记为 κ_1, κ_2. 所谓的 Gauss 曲率 K 指的就是这两个主曲率的乘积, 即 $K = \kappa_1\kappa_2$. 自然, 它是借助于曲面的第一基本形式和第二基本形式计算而得的.

Gauss 经过复杂的计算, 获得了一个惊人的发现 (1827 年): Gauss 曲率 K 只依赖于曲面的第一基本形式, 而与曲面的第二基本形式无关. 这就是 Gauss 的绝妙定理.

Gauss 的绝妙定理的意义在哪里? 如果我们把参数曲面的定义域记为 D, 它是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开子集, 其中的点的坐标记为 (u^1, u^2), 那么曲面的第一基本形式 I 是在区域 D 上坐标 u^1, u^2 的 2 次微分式:

$$I = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u^1, u^2)\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j,$$

其中 $g_{ij} = g_{ji}$, 并且在每一点 $(u^1, u^2) \in D$, (g_{ij}) 是正定的 2×2 矩阵. 在这样一种结构下, 能够做些什么事呢? 按照曲面论, 我们能够计算区域 D 上任意一条分段光滑曲线的长度, 能够计算区域 D 内一个有界子区域的面积等等; 而且这些量与定义区域 D 内所取的坐标系无关. Gauss 的定理则进一步断言: 利用 (g_{ij}), 我们还可以计算曲面在 D 内每一点处的 Gauss 曲率 (!) 而不管曲面的具体形状如何. 这是一个非常了不起的结果, 它开创了曲面的内蕴微分几何. Gauss 曲率的意义是什么? 它所反映的不只是我们所观察到的曲面的 “外在” 形状, 而且是衡量定义在区域 D 上的第一基本形式 I 与标准的欧氏度量偏离程度的量度. 以 Gauss 曲率 K 为常数 c 的第一基本形式为例 (参看 [2], 第 184 页):

当 $c = 0$ 时, $I = (\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}u^2)^2$;

当 $c > 0$ 时, $I = (\mathrm{d}u^1)^2 + \cos^2(\sqrt{c}u^1)(\mathrm{d}u^2)^2$;

当 $c < 0$ 时, $I = (\mathrm{d}u^1)^2 + \cosh^2(\sqrt{-c}u^1)(\mathrm{d}u^2)^2$.