微分 积分

田岛一郎
〔日〕渡部隆一 著
宫崎浩

1

工科数学丛书

辽宁人民出版社

工科数学丛书之一

微分　积分

田岛一郎
〔日〕渡部隆一著
宫崎浩

刘俊山译

赵惠元
熊民旦
校

辽宁人民出版社

1981年·沈阳

内 容 提 要

这本《微分、积分》是工科数学丛书的第一册，其主要内容为数列与级数，微分法，积分法，偏微分，重积分，分析基础等。本书叙述深入浅出，理论阐释简明扼要，例题多样，适于工科院校师生以及具备高中以上文化水平的读者阅读。

工科数学丛书之一

微 分 积 分

田岛一郎
〔日〕渡部隆一 著
宫崎浩

刘俊山 译

赵惠元
熊民旦 校

*

辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：11 3/8
字数：270,000 印数：3,801—13,800
1980年10月第1版 1981年7月第2次印刷

统一书号：7090·84 定价：1.40元

译 者 的 话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的“工科の数学”。全书共分五册：《微分、积分》《线性代数、向量分析》《微分方程、傅里叶分析》《复变函数》和《统计、数值分析》。该书逻辑清晰、结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该书当前在日本国内工科大学已被广为采用，并深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员学习需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者批评，指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶波、付文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志做了部分工作，在此谨致谢意。

一九八〇年一月

目　录

第一章　数列与级数

由于数列与级数的基本内容在高中已经学过，本章仅作整理并补充常用的公式与定理．就内容来说，很多是属于重新复习，但也不是简单的重复，而是侧重于数学的道理．至于极限，为了深入学习，就有必要从根本上重新考虑实数，这将在第六章论述．在该章之前所讲解的，还是以在高中时直观理解了的知识为依据．

在数列的极限及级数和之中，有许多结果是今后常用的．

1·1　数　　列

1·1·1　数列的极限．

对于自然数1, 2, 3, ……, n, …的各数，都各有实数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

与之对应时，(1)叫做**数列**，而一个个的 a_1, a_2, ……称为数列的**项**，特别地，把 a_n 叫做第 n 项或者**通项**．并且用记号 $\{a_n\}$来表示数列（1）．

当数列 $\{a_n\}$ 中的项的号码 n 无限地增大，a_n 就无限地接近于某个常数 α 时，将此表为：

$n\to\infty$时，　$a_n\to\alpha$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，

称数列$\{a_n\}$**收敛**于α，此 α 叫做数列 $\{a_n\}$ 的**极限值**或**极限**．

对于数列收敛的上述定义，通常是可以的，但是，在极限上非作严格考虑不可的情况下，这里的定义就不充分了．

下面，我们来修改上面的定义．

所谓 a_n 无限地接近常数 α，就是差$|a_n-\alpha|$无限地变小．

然而，所谓大或小是与另外的什么数相比较而言的结果，若只是单独地考虑某一个数时，就说不出它是大还是小。例如，0.01是比1小的数，而0.01比0.0001又是大的数。

所谓$|a_n-a|$无限地变小，就是不管选怎样的正数，作为相比较的标准，只要使项的号码n充分大，就能使$|a_n-a|$比那个比较的标准还小。如果这样考虑的话，所说的数列收敛的定义可以叙述如下。

定义1·1 所谓$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，就是，对于无论怎样的正数$\varepsilon$，总能找到满足下面条件的自然数$N$。

对于$n\geqslant N$的所有的自然数n，$|a_n-a|<\varepsilon$。

数列$\{a_n\}$不收敛时，数列$\{a_n\}$叫做发散。发散有下面的(i)，(ii)，(iii)三种情况。

(i) 当项的号码n无限变大时，a_n无限变大，记为

$$n\to\infty\text{时，}a_n\to+\infty\text{，或 }\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty,$$

称数列$\{a_n\}$发散为正无限大，或者说数列$\{a_n\}$的极限是$+\infty$。

(ii) 当项的号码n无限变大时，a_n是负的，且绝对值无限变大，记为

$$n\to\infty\text{时，}a_n\to-\infty\text{，或 }\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty,$$

称数列$\{a_n\}$发散为负无限大，或者说数列$\{a_n\}$的极限是$-\infty$。

(iii) 是发散的，但既不属于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，又不属于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$的情况时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是不确定的或称为数列$\{a_n\}$是振动的。

综上所述，归纳如下：

$$\text{数列}\begin{cases}\text{收敛} & \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\\ \text{发散} & \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty,\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty,\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n\text{ 不确定（振动）}.\end{cases}\end{cases}$$

对于发散为正无限大，或发散为负无限大的数列，类似定义1·1可叙述如下：

定义1·2

（1）所谓$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，就是，对于无论怎样的正数$M$，总能找到满足下面条件的自然数$N$。

对于 $n\geqslant N$ 的所有的自然数n，$a_n>M$。

（2）所谓$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$，就是，对于无论怎样的负数 L，总能找到满足下面条件的自然数 N。

对于 $n\geqslant N$ 的所有的自然数 n，$a_n<L$。

1·1·2 极限的求法。

如果数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 收敛，则下面的公式成立。

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ (c\text{ 是常数})\ ;\\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n;\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n;\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\quad(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0).\end{cases}$$

今后，n 是表示自然数的。

问题 1. 根据定义1·1证明上面的公式。

问题 2. 求由下列各式表示通项的数列的极限。

（1）$\dfrac{3n^2+5}{4n^3-1}$；（2）$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$；（3）$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

（4）$\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$；（5）$\sqrt{n^3+n^2}-n$。

关于数列的项与极限大小之间的关系，是：

〔1〕如果对于所有的 n，$a_n<b_n$（或$a_n\leqslant b_n$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，则 $\alpha\leqslant\beta$。

〔2〕如果对于所有的 n，$a_n<c_n<b_n$（或 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$。（相夹原理）

问题 3．证明上面的〔1〕，〔2〕。

问题 4．举出 $a_n<b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$那样的数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的例子。

问题 5．证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ 等价。

（2）如果对所有的 n，$a_n\leqslant b_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$。如果对所有的 n，$a_n\leqslant b_n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$。

问题 6．求下列极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n\theta$（$\theta$是常数）；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+(-1)^n n}{n^2}$。

下面，导出求极限时常用的不等式。由于

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)\quad(n>1),$$

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1>n$，

当 $x=1$ 时，$x-1=0$，$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=n$，

当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$，$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1<n$。

所以，当 $n>1$，$x>0$ 时，

$$x^n-1\geqslant n(x-1)\ \text{（等号限于 } x=1 \text{ 的情况）}. \qquad (1)$$

同时，在这个不等式中，用 $\sqrt[n]{x}$ 代换 x，并适当变形，就有

$$\sqrt[n]{x}-1\leqslant\frac{1}{n}(x-1)\ \text{（等号限于} x=1\text{的情况）}. \qquad (2)$$

利用这个不等式，就能够求出象下面那样的极限值。

$$〔1〕\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & (r>1), \\ 1 & (r=1), \\ 0 & (|r|<1), \\ \text{不确定} & (r\leqslant -1). \end{cases} \qquad 〔2〕\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0). \qquad 〔3〕\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

问题 7. 利用不等式（1），推导当 $r>1$时，$\lim_{n\to\infty} r^n=+\infty$。然后用它推出当 $r=1$，$|r|<1$，$r\leqslant -1$ 时的〔1〕来。

〔2〕的证明. 如果 $n>1$，$a>1$，根据不等式（2），有

$$1<\sqrt[n]{a}<1+\frac{1}{n}(a-1). \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

如果 $a=1$，由于 $\sqrt[n]{a}=1$，显然 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

当 $0<a<1$ 时，若设 $a=1/b$，$b>1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=\frac{1}{1}=1.$$

〔3〕的证明. 当 $n>1$时，在不等式（2）中，若设 $x=\sqrt{n}$，则

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}}-1<\frac{1}{n}(\sqrt{n}-1).$$

$$\therefore \quad 0\leqslant(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}-1<\frac{1}{n}(\sqrt{n}-1)=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}.$$

当 $n\to\infty$ 时，因为这个不等式的右边趋近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}=1.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}=1\times 1=1.$$

下面的定理是常用的.

定理1·1 （1）选取适当的自然数N与常数 $r(0<r<1)$时，

如果对于$n \geqslant N$ 的所有的自然数 n，使

$$|a_{n+1}-\alpha| \leqslant r|a_n-\alpha|$$

成立时，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

（2）如果不等式

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

成立时，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

证明．（1）由假设，则有

$$|a_{N+1}-\alpha| \leqslant r|a_N-\alpha|,$$
$$|a_{N+2}-\alpha| \leqslant r|a_{N+1}-\alpha| \leqslant r^2|a_N-\alpha|,$$
$$|a_{N+3}-\alpha| \leqslant r|a_{N+2}-\alpha| \leqslant r^3|a_N-\alpha|,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_{N+m}-\alpha| \leqslant r^m|a_N-\alpha|.$$

所以，当 $n \geqslant N$ 时，如果令 $n = N+m$，则

$$0 \leqslant |a_n-\alpha| \leqslant r^{n-N}|a_N-\alpha| = r^n\frac{|a_N-\alpha|}{r^N}.$$

由于 $0<r<1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha| = 0. \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

（2）令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = b$ 时，由假设，$0 \leqslant b < 1$.

现在考虑 $b<r<1$ 那样的 r 时，则 $r-b>0$，于是，若取适当的自然数N，则对于 $n \geqslant N$ 的所有的 n，有

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - b\right| < r-b. \quad \therefore \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < b+(r-b) = r.$$

$$\therefore \quad |a_{n+1}| < r|a_n| \qquad (r<1).$$

所以，根据(1)，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

例题1·1 求下列数列$\{a_n\}$的极限。

$$a_1=\sqrt{3},\qquad a_{n+1}=\sqrt{a_n+3}\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

〔解〕 若求 $\alpha=\sqrt{\alpha+3}$ 的 α，根据$\alpha^2=\alpha+3$，$\alpha>0$，有

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{13}}{2},$$

$$|a_{n+1}-\alpha|=|\sqrt{a_n+3}-\alpha|=\frac{|a_n+3-\alpha^2|}{\sqrt{a_n+3}+\alpha}$$

$$=\frac{|a_n-\alpha|}{\sqrt{a_n+3}+\alpha}.$$

而根据 $a_n>0$，$\alpha>1$，有

$$\frac{1}{\sqrt{a_n+3}+\alpha}<\frac{1}{\sqrt{3}+\alpha}<1。$$

因此，根据定理1·1之(1)，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$。即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

问题 8. 求下列数列$\{a_n\}$的极限。

(1) $a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$；(2) $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n+3}{a_n+1}$。

例题1·2 推导 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$（$a$是常数）。

〔解〕 由于 $a=0$ 时显然成立，只推导关于 $a\neq0$ 的情况。如果设 $b_n=\dfrac{a^n}{n!}$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}=\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{n+1}\to0.$$