

# 微分

# 积分

[日] 田 岛 一 郎 著  
渡 部 隆 一  
官 崎 浩

工科数学丛书

辽宁人民出版社

工科数学丛书之一

# 微 分 积 分

田 岛 一 郎  
〔日〕渡 部 隆 一 著  
官 崎 浩  
刘 俊 山 译  
赵 惠 元 校  
熊 民 旦

辽 宁 人 民 出 版 社

1 9 8 1 年 · 沈 阳

## 内 容 提 要

这本《微分、积分》是工科数学丛书的第一册，其主要内容为数列与级数，微分法，积分法，偏微分，重积分，分析基础等。本书叙述深入浅出，理论阐释简明扼要，例题多样，适于工科院校师生以及具备高中以上文化水平的读者阅读。

工科数学丛书之一

### 微 分 积 分

田岛一郎

〔日〕渡部隆一 著

宫崎浩

刘俊山 译

赵惠元 校

熊民旦

\*

辽宁人民出版社出版

(沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行

沈阳新华印刷厂印刷

\*

开本：850×1168 1/32 印张：11 1/2

字数：270,000 印数：3,801—13,800

1980年10月第1版 1981年7月第2次印刷

统一书号：7090·84 定价：1.40元

## 译者的话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的“工科の数学”。全书共分五册：《微分、积分》《线性代数、向量分析》《微分方程、傅里叶分析》《复变函数》和《统计、数值分析》。该书逻辑清晰、结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该书当前在日本国内工科大学已被广为采用，并深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员学习需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者批评，指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶波、付文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志做了部分工作，在此谨致谢意。

一九八〇年一月

# 目 录

<b>第一章 数列与级数</b> .....	1
<b>1.1 数列</b> .....	1
1.1.1 数列的极限.....	1
1.1.2 极限的求法.....	3
1.1.3 基本定理.....	8
习题 1.1 A .....	12
1.1 B .....	13
<b>1.2 级数及它的和</b> .....	14
1.2.1 基本性质.....	14
1.2.2 正项级数.....	16
1.2.3 交错级数.....	22
1.2.4 一般级数.....	24
习题 1.2 A .....	29
1.2 B .....	30
<b>第二章 微分法</b> .....	31
<b>2.1 初等函数及其性质</b> .....	31
2.1.1 函数.....	31
2.1.2 初等函数.....	34
<b>2.2 函数的极限</b> .....	49
2.2.1 极限.....	49
2.2.2 重要的极限值.....	54

2·2·3	连续函数	55
2·2·4	兰道 (Landau) 的记号	58
	习题 2·1 A	60
	2·1 B	61
2·3	导函数	62
2·3·1	可微性	62
2·3·2	导函数的计算	66
2·3·3	高阶导函数	69
2·3·4	向量值函数的微分法	72
	习题 2·2 A	75
	2·2 B	76
2·4	基本定理	77
2·4·1	关于连续函数的定理	77
2·4·2	中值定理	80
2·4·3	台劳 (Taylor) 定理	84
2·5	函数的性质	90
2·5·1	增加、减少	90
2·5·2	凸函数与凹函数	91
2·5·3	极大与极小	96
2·5·4	不定型的极限值	98
	习题 2·3 A	99
	2·3 B	100
<b>第三章</b>	<b>积分法</b>	<b>101</b>
3·1	不定积分	101
3·1·1	基本公式	101
3·1·2	换元积分法与分部积分法	104
3·1·3	有理函数的积分法	109
3·1·4	三角函数的积分法	113
3·1·5	无理函数的积分法	120
	习题 3·1 A	123

3.1 B .....	124
3.2 简单的微分方程 .....	124
3.2.1 变量分离型 .....	125
3.2.2 齐次型 .....	127
3.2.3 一阶线性微分方程 .....	128
习题 3.2 A .....	131
3.3 定积分 .....	132
3.3.1 基本定理 .....	132
3.3.2 定积分的计算 .....	139
3.3.3 广义积分 .....	144
习题 3.3 A .....	154
3.3 B .....	156
3.4 定积分的应用 .....	156
3.4.1 极坐标 .....	157
3.4.2 面积 .....	158
3.4.3 体积 .....	161
3.4.4 曲线弧长 .....	163
习题 3.4 A .....	167
3.4 B .....	167
<b>第四章 偏微分 .....</b>	<b>169</b>
4.1 函数及其极限值 .....	169
4.1.1 函数的定义及其图形 .....	169
4.1.2 极限与连续 .....	171
4.2 偏微分及其计算 .....	174
4.2.1 偏微分与方向微分 .....	174
4.2.2 可微性与切平面 .....	177
4.2.3 偏导函数 .....	179
4.2.4 复合函数的微分法 .....	181
4.2.5 $n$ 元函数 .....	187
4.3 基本定理 .....	189

4·3·1	关于连续函数的定理 .....	189
4·3·2	微分, 雅可比(Jacobi) 矩阵 .....	192
4·3·3	高阶偏导数的交换次序 .....	199
4·3·4	台劳(Taylor) 定理 .....	200
	习题 4·1 A .....	203
	4·1 B .....	204
4·4	隐函数 .....	206
4·4·1	隐函数的微分 .....	206
4·4·2	逆映射 .....	213
4·5	函数的极值 .....	215
4·5·1	二元函数的极值 .....	215
4·5·2	隐函数的极值 .....	218
4·5·3	条件极值 .....	219
4·5·4	最大、最小 .....	221
4·5·5	多元函数的极值 .....	222
	习题 4·2 A .....	224
	4·2 B .....	225
4·6	平面曲线 .....	226
4·6·1	曲线的作图 .....	226
4·6·2	曲率 .....	231
4·6·3	曲率圆 .....	233
4·6·4	包络线 .....	235
4·7	空间曲线 .....	237
	习题 4·3 A .....	238
	4·3 B .....	239

## 第五章 重积分 .....

5·1	二重积分 .....	240
5·1·1	二重积分的定义 .....	240
5·1·2	面积确定的集合 .....	242
5·1·3	基本公式 .....	245



5.2	二重积分的计算	247
5.2.1	累次积分	247
5.2.2	变量变换	252
5.3	广义积分	255
5.3.1	无界函数的积分	256
5.3.2	无穷积分	257
5.4	重积分	259
	习题 5.1 A	261
	5.1 B	262
5.5	在图形上的应用	263
5.5.1	体积	263
5.5.2	曲面面积	266
5.6	重心与转动惯量	270
5.6.1	重心	270
5.6.2	转动惯量	274
	习题 5.2 A	276
	5.2 B	277
<b>第六章</b>	<b>分析基础</b>	<b>279</b>
6.1	实数的连续性	279
6.1.1	上确界, 下确界	279
6.1.2	点集与点列	282
6.1.3	柯西收敛条件	288
6.2	连续函数	291
6.2.1	连续函数的基本性质	291
6.2.2	连续函数的可积性	297
	习题 6.1 A	303
	6.1 B	304
6.3	幂级数	305
6.3.1	函数的展开	305

6·3·2 幂级数的收敛半径 .....	307
6·3·3 函数列的一致收敛 .....	313
6·3·4 逐项微分与逐项积分 .....	320
习题 6·2 A .....	327
6·2 B .....	327
习题答案 .....	328
索 引 .....	342

# 第一章 数列与级数

由于数列与级数的基本内容在高中已经学过，本章仅作整理并补充常用的公式与定理。就内容来说，很多是属于重新复习，但也不是简单的重复，而是侧重于数学的道理。至于极限，为了深入学习，就有必要从根本上重新考虑实数，这将在第六章论述。在该章之前所讲解的，还是以在高中时直观理解了的知识为依据。

在数列的极限及级数和之中，有许多结果是今后常用的。

## 1.1 数 列

### 1.1.1 数列的极限。

对于自然数 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 的各数，都各有实数

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

与之对应时，(1)叫做数列，而一个个的 $a_1, a_2, \dots$ 称为数列的项，特别地，把 $a_n$ 叫做第 $n$ 项或者通项。并且用记号 $\{a_n\}$ 来表示数列(1)。

当数列 $\{a_n\}$ 中的项的号码 $n$ 无限地增大， $a_n$ 就无限地接近于某个常数 $\alpha$ 时，将此表为：

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } a_n \rightarrow \alpha, \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha,$$

称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $\alpha$ ，此 $\alpha$ 叫做数列 $\{a_n\}$ 的极限值或极限。

对于数列收敛的上述定义，通常是可以的，但是，在极限上不作严格考虑不可的情况下，这里的定义就不充分了。

下面，我们来修改上面的定义。

所谓 $a_n$ 无限地接近常数 $\alpha$ ，就是差 $|a_n - \alpha|$ 无限地变小。

然而，所谓大或小是与另外的什么数相比较而言的结果，若只是单独地考虑某一个数时，就说不出它是大还是小。例如，0.01是比1小的数，而0.01比0.0001又是大的数。

所谓 $|a_n - \alpha|$ 无限地变小，就是不管选怎样的正数，作为相比较的标准，只要使项的号码 $n$ 充分大，就能使 $|a_n - \alpha|$ 比那个比较的标准还小。如果这样考虑的话，所说的数列收敛的定义可以叙述如下。

定义1.1 所谓 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ，就是，对于无论怎样的正数 $\epsilon$ ，总能找到满足下面条件的自然数 $N$ 。

对于 $n \geq N$ 的所有的自然数 $n$ ， $|a_n - \alpha| < \epsilon$ 。

数列 $\{a_n\}$ 不收敛时，数列 $\{a_n\}$ 叫做发散。发散有下面的(i)，(ii)，(iii)三种情况。

(i) 当项的号码 $n$ 无限变大时， $a_n$ 无限变大，记为

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } a_n \rightarrow +\infty, \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

称数列 $\{a_n\}$ 发散为正无限大，或者说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 $+\infty$ 。

(ii) 当项的号码 $n$ 无限变大时， $a_n$ 是负的，且绝对值无限变大，记为

$$n \rightarrow \infty \text{ 时, } a_n \rightarrow -\infty, \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

称数列 $\{a_n\}$ 发散为负无限大，或者说数列 $\{a_n\}$ 的极限是 $-\infty$ 。

(iii) 是发散的，但既不属于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ，又不属于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ 的情况时， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 是不确定的或称为数列 $\{a_n\}$ 是振动的。

综上所述，归纳如下：

$$\text{数列} \begin{cases} \text{收敛} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \\ \text{发散} & \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 不确定 (振动)}. \end{cases} \end{cases}$$

对于发散为正无限大，或发散为负无限大的数列，类似定义1.1可叙述如下：

### 定义1.2

(1) 所谓  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ，就是，对于无论怎样的正数  $M$ ，总能找到满足下面条件的自然数  $N$ ，

对于  $n \geq N$  的所有的自然数  $n$ ， $a_n > M$ 。

(2) 所谓  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ，就是，对于无论怎样的负数  $L$ ，总能找到满足下面条件的自然数  $N$ ，

对于  $n \geq N$  的所有的自然数  $n$ ， $a_n < L$ 。

### 1.1.2 极限的求法。

如果数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  收敛，则下面的公式成立。

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (c \text{ 是常数}) ; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0) . \end{array} \right.$$

今后， $n$  是表示自然数的。

问题 1. 根据定义1.1证明上面的公式。

问题 2. 求由下列各式表示通项的数列的极限。

(1)  $\frac{3n^2 + 5}{4n^3 - 1}$ ; (2)  $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$ ; (3)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ;

(4)  $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$ ; (5)  $\sqrt{n^3 + n^2} - n$ 。

关于数列的项与极限大小之间的关系，是：

[1] 如果对于所有的  $n$ ， $a_n < b_n$  (或  $a_n \leq b_n$ )，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ，  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ，则  $\alpha \leq \beta$ 。

[2] 如果对于所有的  $n$ ,  $a_n < c_n < b_n$  (或  $a_n \leq c_n \leq b_n$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ . (相夹原理)

问题 3. 证明上面的[1], [2].

问题 4. 举出  $a_n < b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  那样的数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  的例子.

问题 5. 证明

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  与  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  等价.

(2) 如果对所有的  $n$ ,  $a_n \leq b_n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ . 如果对所有的  $n$ ,  $a_n \leq b_n$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

问题 6. 求下列极限.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$  ( $\theta$  是常数); (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n n}{n^2}$ .

下面, 导出求极限时常用的不等式. 由于

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \quad (n > 1),$$

当  $x > 1$  时,  $x - 1 > 0$ ,  $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 > n$ ,

当  $x = 1$  时,  $x - 1 = 0$ ,  $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = n$ ,

当  $0 < x < 1$  时,  $x - 1 < 0$ ,  $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 < n$ .

所以, 当  $n > 1$ ,  $x > 0$  时,

$$x^n - 1 \geq n(x - 1) \quad (\text{等号限于 } x = 1 \text{ 的情况}). \quad (1)$$

同时, 在这个不等式中, 用  $\sqrt[n]{x}$  代换  $x$ , 并适当变形, 就有

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{1}{n}(x - 1) \quad (\text{等号限于 } x = 1 \text{ 的情况}). \quad (2)$$

利用这个不等式, 就能够求出象下面那样的极限值.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} +\infty & (r > 1), \\ 1 & (r = 1), \\ 0 & (|r| < 1), \\ \text{不确定} & (r \leq -1). \end{cases} \quad \begin{aligned} [2] \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 (a > 0). \\ [3] \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1. \end{aligned}}$$

问题 7. 利用不等式(1), 推导当  $r > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = +\infty$ .

然后用它推出当  $r = 1$ ,  $|r| < 1$ ,  $r \leq -1$  时的[1]来.

[2]的证明. 如果  $n > 1$ ,  $a > 1$ , 根据不等式(2), 有

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{1}{n}(a-1). \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

如果  $a = 1$ , 由于  $\sqrt[n]{a} = 1$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

当  $0 < a < 1$  时, 若设  $a = 1/b$ ,  $b > 1$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1.$$

[3]的证明. 当  $n > 1$  时, 在不等式(2)中, 若设  $x = \sqrt{n}$ ,

则

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}} - 1 < \frac{1}{n}(\sqrt{n} - 1).$$

$$\therefore 0 \leq (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}} - 1 < \frac{1}{n}(\sqrt{n} - 1) = \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 因为这个不等式的右边趋近于 0, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}} = 1 \times 1 = 1.$$

下面的定理是常用的.

定理 1.1 (1) 选取适当的自然数  $N$  与常数  $r$  ( $0 < r < 1$ ) 时,

如果对于  $n \geq N$  的所有的自然数  $n$ , 使

$$|a_{n+1} - \alpha| \leq r |a_n - \alpha|$$

成立时, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

(2) 如果不等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

成立时, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

证明. (1) 由假设, 则有

$$\begin{aligned} |a_{N+1} - \alpha| &\leq r |a_N - \alpha|, \\ |a_{N+2} - \alpha| &\leq r |a_{N+1} - \alpha| \leq r^2 |a_N - \alpha|, \\ |a_{N+3} - \alpha| &\leq r |a_{N+2} - \alpha| \leq r^3 |a_N - \alpha|, \\ &\dots\dots\dots \\ |a_{N+m} - \alpha| &\leq r^m |a_N - \alpha|. \end{aligned}$$

所以, 当  $n \geq N$  时, 如果令  $n = N + m$ , 则

$$0 \leq |a_n - \alpha| \leq r^{n-N} |a_N - \alpha| = r^n \frac{|a_N - \alpha|}{r^N}.$$

由于  $0 < r < 1$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0. \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

(2) 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b$  时, 由假设,  $0 \leq b < 1$ .

现在考虑  $b < r < 1$  那样的  $r$  时, 则  $r - b > 0$ , 于是, 若取适当的自然数  $N$ , 则对于  $n \geq N$  的所有的  $n$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot b &< r - b. \quad \therefore \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < b + (r - b) = r. \\ \therefore |a_{n+1}| &< r |a_n| \quad (r < 1). \end{aligned}$$



所以, 根据(1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

例题1.1 求下列数列  $\{a_n\}$  的极限.

$$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

〔解〕 若求  $a = \sqrt{a+3}$  的  $a$ , 根据  $a^2 = a+3, a > 0$ , 有

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \\ |a_{n+1} - a| &= |\sqrt{a_n + 3} - a| = \frac{|a_n + 3 - a^2|}{\sqrt{a_n + 3} + a} \\ &= \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n + 3} + a}. \end{aligned}$$

而根据  $a_n > 0, a > 1$ , 有

$$\frac{1}{\sqrt{a_n + 3} + a} < \frac{1}{\sqrt{3} + a} < 1.$$

因此, 根据定理1.1之(1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

问题 8. 求下列数列  $\{a_n\}$  的极限.

$$(1) a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}; \quad (2) a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{a_n + 1}.$$

例题1.2 推导  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  ( $a$  是常数).

〔解〕 由于  $a = 0$  时显然成立, 只推导关于  $a \neq 0$  的情况.

如果设  $b_n = \frac{a^n}{n!}$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时, 有

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0.$$