О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев,
Ю. И. Соркин, Н. Г. Федин

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

О. В. МАНТУРОВ, Ю. К. СОЛНЦЕВ,
Ю. И. СОРКИН, Н. Г. ФЕДИН

Толковый словарь математических терминов

ПОСОБИЕ
ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

Под редакцией
проф. В. А. ДИТКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1965

Рукопись данной книги обсуждалась на секции математики Учебно-методического совета Министерства просвещения РСФСР. Ее рецензировали: доктор физ.-мат. наук С. П. Пулькин, кандидат физ.-мат. наук В. А. Кондратьев, кандидат пед. наук В. И. Мишин, учителя И. Б. Вейцман, Е. Г. Крейдлин и А. М. Пышкало.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю (и прежде всего советскому учителю) книга имеет целью собрать многочисленные и наиболее важные термины математики и дать их современное толкование.

Ранее изданные терминологические словари устарели как по составу терминов, так и по их толкованию и являются к тому же библиографической редкостью. Нам кажется, что решение поставленной задачи очень важно, и в особенности в настоящее время, когда математические методы проникают в самые разнообразные разделы науки и широко применяются в народном хозяйстве. В связи с этим в школьную программу вводятся элементы высшей математики. Математика в школе претерпевает качественные изменения.

Новые программы требуют от учителя более широких знаний высшей математики и умения ориентироваться в главных направлениях развития математики.

При написании книги мы старались обратить внимание на принципиально новые моменты, возникающие при переходе от элементарной математики к высшей. Термины математики изложены несколько шире, чем они затрагиваются программой физико-математических факультетов пединститутов. Мы стремились оттенить логическую сторону в толковании встречающихся понятий, теорем, методов. Естественно, термины написаны по объему неравномерно.

Как часто бывает, удачно выбранный термин или знак (символ) в науке ускоряет и облегчает процесс усвоения того или иного раздела соответствующей дисциплины, а неудачно придуманный термин или знак затрудняет усвоение теории. С развитием науки и общества часть терминов устаревает, видоизменяется или совсем исчезает, выходя из употребления (например, относительные числа, варианта, произведение множеств и др.); в то же время появляются другие, новые термины.

Работа над терминологией по различным отраслям знаний ведется как в СССР, так и за границей.

Словарь охватывает около 1800 терминов по математике. Отметим, что он является терминологическим, а не этимологическим; в нем дано толкование, раскрытие содержания термина, а не его этимология (происхождение).

Термины в Словаре расположены по алфавиту, в том числе и термины, состоящие из нескольких слов. Однако для удобства пользования Словарем в многословных терминах приняты следующие перестановки: в терминах, содержащих слова «точка», «теорема», «метод», эти слова ставятся в конце термина.

Перечень терминов настоящего Словаря, т. е. его словник, и его отдельные статьи неоднократно обсуждались математической общественностью, редакцией математики издательства «Просвещение», отдельными педагогическими институтами и институтами усовершенствования учителей Российской Федерации, а также многими учителями средних школ и методистами-математиками. Отзывы и пожелания учителей средних школ и преподавателей пединститутов, детально ознакомившихся со Словарем, были по возможности учтены коллективом авторов.

Термины по алгебре, теории чисел, теории групп написаны Ю. И. Соркиным, термины по тригонометрии, элементарной, аналитической, проективной геометрии, основаниям геометрии и методики математики — Н. Г. Фединым, термины по математическому анализу, теории множеств, дифференциальной геометрии и др. — О. В. Мантуровым и Ю. К. Солнцевым.

Авторы благодарят С. П. Пулькина, Е. Г. Шульгейфера, В. А. Кондратьева, В. И. Мишина, Б. А. Розенфельда, В. И. Левина, И. Б. Вейцмана, Е. Г. Крейдлина, Э. Е. Евзерихину, Т. Н. Фиделли, Г. Г. Бунатяна, Н. С. Авраменко и других товарищей за ценные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Авторы

А

АБАК — счетная доска у древних греков и римлян, а впоследствии перешедшая и в средневековую Западную Европу. А. использовался для арифметических вычислений и имел различную конструкцию. Первоначально А. представлял гладкую доску, посыпанную песком и разделенную на полосы, в которых передвигались счетные марки (камешки, косточки, монеты). Затем счетные марки стали нанизывать на проволоки, и А. стал представлять собой раму с проволоками. А. встречается и до настоящего времени у некоторых народов Востока, например в Китае. В России с давних пор для арифметических вычислений использовались счеты. В номографии название А. применяется к специальным счетным номограммам.

АБАЦИСТЫ — название средневековых математиков, пользовавшихся в своих вычислениях абаком (см.). А. вели борьбу с алгоритмиками — сторонниками алгоритмизации арифметических вычислений, т. е. письменных вычислений, выполняемых по определенному общему правилу (см. Алгоритм).

АБЕЛЕВА ГРУППА — группа (см.), удовлетворяющая закону коммутативности (см.) $ab=ba$. Например, группа комплексных корней n-й степени из 1 относительно операции умножения абелева, а группа подстановок n-й степени не абелева (см. Симметрическая группа). А. г. названа по имени норвежского математика Абеля.

АБЕЛЯ ТЕОРЕМЫ — важные теоремы теории рядов. Одна из них утверждает, что если степенной ряд

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится в некоторой точке z_0, то он равномерно сходится в каждом замкнутом круге $|z| \leqslant R < z_0$. Кроме того,

$$\lim_{z\to z_0} p(z) \text{ существует и равен } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n,$$

если $z \to z_0$, и остается на полупрямой $\arg z=\arg z_0$.

См. также Руффини — Абеля теорема.

АБРИС — очертание, контур проекции фигуры. Так, например, А. шара в ортогональной проекции есть окружность, А. же шара в произвольной параллельной проекции есть эллипс (см.).

Нем. Abriß — контур, очертание.

АБСОЛЮТ — кривая 2-го порядка, по отношению к которой устанавливается проективная метрика (отрезков и углов) в проективной плоскости.

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА действительного числа x (обозначается $|x|$) есть неотрицательное число, определяемое следующим образом: если число $x \geqslant 0$, то $|x|=x$, если число $x<0$, то $|x|=-x$.

Из определения А. в. вытекают следующие соотношения:

$$|a|=|-a|;\ |a|^2=|a^2|=a^2;\ |a|-|b| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|;$$

$$|a|-|b| \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b|;\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|;\ \frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|,\ b\neq 0.$$

Например, А. в. чисел 1,6; —5 и 2 соответственно равны: $|1{,}6|=1{,}6$, $|-5|=5$ и $|2|=2$. А. в. противоположных по знаку чисел равны друг другу: $|+5|=|-5|=5$. Геометрически А. в. числа выражает расстояние от точки, являющейся изображением этого числа, до начала отсчета числовой прямой (оси).

В случае комплексного числа $z=a+bi$ обобщением понятия А. в. является модуль этого числа, что записывают так: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, откуда $|z|\geqslant 0$; термин «модуль» применим также и к действительным числам. Геометрически модуль числа z выражает расстояние точки z до начала координат комплексной плоскости. Аналогично рассматривают понятия А. в. и модуля функции $|f(x)|$. А. в. числа иногда называют абсолютным значением числа. Понятие А. в. часто используется в математике при решении уравнений и неравенств, при построении графиков, при рассмотрении сходимости и расходимости рядов (см. Ряд).

Используя определение А. в., легко получить, например, следующие утверждения: 1) уравнение $|x|=x$ имеет бесчисленное множество решений: $x\geqslant 0$; 2) система уравнений: $|x+y|=1$, $x-y=3$ имеет два решения (2; —1) и (1; —2); 3) графиком функции $y=|x^2-1|$ является кривая $ABCDE$ (рис. 1),

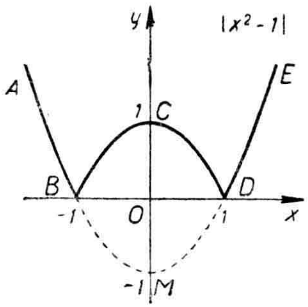

Рис. 1

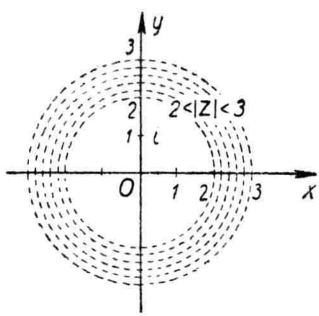

Рис. 2

полученная из параболы $y=x^2-1$ путем зеркального отражения ее дуги BMD в оси Ox; 4) геометрическое место точек z комплексной плоскости, для которых выполняется условие: $2<|z|<3$, есть множество точек плоскости, заключенных между двумя концентрическими окружностями (кольцо) с центром в начале координат и радиусами, равными 2 и 3 (рис. 2).

Лит.: Н. Муравьев, Понятие абсолютной величины действительного числа в средней школе, «Математика в школе», 1952, № 6; Н. Г. Федин, Абсолютное значение числа в курсе математики средней школы, сб. статей «Из опыта работы учителей математики», Изд-во АПН РСФСР, М., 1957.

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, построенная на аксиомах геометрии Евклида, за исключением аксиомы (постулата) о параллельных прямых (см.). А. г. является общей частью как геометрии Евклида, так и геометрии Лобачевского (см.). Известно, что система аксиом геометрии Евклида отличается от системы аксиом геометрии Лобачевского только аксиомой о параллельных прямых; поэтому те теоремы, в которых не используется аксиома о параллельных прямых или ее эквиваленты (см. Аксиома о параллельных прямых), будут принадлежать к А. г., например теоремы: а) во всяком треугольнике сумма двух сторон больше третьей; б) во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона; в) теоремы-признаки равенства треугольников и др.

Термин А. г. введен венгерским математиком Яношем Бойаи.

АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ тензорных полей (см.) (и вообще геометрических объектов) — вычисление ковариантных производных и абсолютного дифференциала. Ковариантная производная тензора $z^{i_1 i_2 \dots i_K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по направлению j-го базисного вектора касательного пространства (обозначается $\nabla_j z^{i_1 i_2 \dots i_K}$) есть предел отношения разности $z^{i_1 i_2 \dots i_K}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - z^{i_1 i_2 \dots i_K}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к Δx_j при $\Delta x_j \to 0$; $z^{i_1 i_2 \dots i_K}$ означает координаты тензора z в системе координат, параллельно перенесенной из точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точку $M(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \Delta x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

А. д. вводится в произвольном пространстве аффинной связности (см. Аффинной связности пространство). Обладает инвариантностью относительно преобразований координат. С помощью символов Кристофеля (см.) ковариантная производная векторного поля ξ^i записывается так:

$$\nabla_j \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \sum_{s=1}^{n} \Gamma^i_{js} \xi^s .$$

Абсолютный дифференциал связан с ковариантными производными следующим образом:

$$Dz^{i_1 i_2 \dots i_K} = \sum_{s=1}^{n} \nabla_s z^{i_1 i_2 \dots i_K} dx^s .$$

А. д. является важной главой тензорного исчисления (см.).

Лит.: П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, ГИТТЛ, М., 1953.

АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является сходящимся (см.). Любой А. с. р. является сходящимся. В А. с. р. можно произвольно переставлять и объединять члены, не изменяя его суммы.

Аналогично функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(M)$ называется А. с. р. в области D, если для любой точки $M \in D$ соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(M)$ сходится абсолютно. Например, ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots$ абсолютно сходящийся, так как сходится ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ (геометрическая прогрессия).

АБСОЛЮТНЫЙ ЭКСТРЕМУМ — экстремум (см.) функции нескольких переменных; словом «абсолютный» подчеркивается отличие его от относительного экстремума (см.).

АБСЦИССА — первая из координат (декартовых или аффинных) точки. А. обычно обозначается буквой x латинского алфавита.

Лат. abscissus — отрезанный.

АВТОМОРФИЗМ — изоморфное отображение множества с данной системой операций на себя (см. Изоморфизм). Например, всякое невырожденное линейное преобразование есть А. линейного пространства относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число.

АВТОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ — аналитическая функция комплексного переменного, значение которой не изменяется при преобразовании комплексного аргумента некоторыми дробно-линейными преобразованиями. Совокупность всех таких преобразований образует группу (см.) — подгруппу группы всех дробно-линейных преобразований.

АДАМСА МЕТОД численного интегрирования дифференциальных уравнений $y'=f(x, y)$ с начальным условием $y_0=f(x_0)$ основан на применении формулы:

$$\Delta y_n=\eta_n+\frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-2}+\cdots, \qquad (*)$$

где $\eta_n=y_n'h=f(x_n, y_n)h$.

Если в формуле (*) ограничиться разностями второго порядка, то для применения этого метода необходимо каким-либо образом найти сначала y_1 и y_2, соответствующие значениям $x_1=x_0+h$ и $x_2=x_0+2h$. Тогда, применяя формулу (*), можно получить значение Δy_2 и найти $y_3=y(x_0+3h)$, а также определить η_3 и конечные разности $\Delta\eta_2$ и $\Delta^2\eta_1$, затем Δy_3 и т. д.

Решения уравнения по А. м. даются обычно в виде таблиц (см. для сравнения Рунге метод, Эйлера — Коши метод). См. также Численное интегрирование.

Лит.: А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, М., 1954.

АДДИТИВНАЯ ГРУППА — то же, что абелева группа; групповая операция в А. г. записывается символом $+$ и называется сложением. Название происходит от латинского слова additivus — прибавленный.

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в котором изучаются вопросы, связанные с разложением натуральных чисел 1, 2, 3, ... на слагаемые определенного вида. Характерными задачами для А. т. ч. являются Варинга проблема (см.), Гольдбаха проблема (см.) и др. Название А. т. ч. происходит от латинского слова additivus — прибавленный.

АДДИТИВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — числовые функции $f(x)$, определенные на множестве E, для элементов которого определено сложение, и удовлетворяющие условию:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2).$$

Примерами А. в. могут служить объем тела, площадь поверхности, длина линии, масса, вес и т. д. Название А. в. происходит от латинского слова additivus — прибавленный.

АДЪЮНКТА — то же, что и алгебраическое дополнение (см.). Название А. происходит от латинского слова adjunctus — присоединенный.

АКСИАЛЬНЫЙ ВЕКТОР — то же, что и осевой вектор (см).

АКСИОМА — предложение, принимаемое без доказательства, рассматриваемое как исходное при построении той или иной математической теории. Система А., являющаяся логическим фундаментом обоснования математической теории, не является раз навсегда законченной и совершенной и, как и сами А., изменяется и совершенствуется.

К системе А. предъявляются требования: непротиворечивости, независимости и полноты (см. Независимость системы аксиом, Непротиворечивость системы аксиом, Полнота системы аксиом).

Примеры: 1) А. параллельности Евклида (А. Плейфера): через точку A, не лежащую на данной прямой a в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, можно провести не более одной прямой a', параллельной прямой a; 2) Архимеда А. (см.); 3) Лобачевского А. (см.); 4) Дедекинда А. (см.). Для каждой геометрии (аффинной, евклидовой, проективной и др.) имеется своя система А.

С другой стороны, каждая геометрия может быть также определена своей группой преобразований (см. Эрлангенская программа) или дифференциально-геометрическими свойствами пространства этой геометрии.

Известны аксиоматические построения геометрии, арифметики, теории вероятностей и других математических дисциплин.

А. называется также постулатом (см.).

См. также Основания геометрии.

Греч. ἀξίωμα — предложение, достойное уважения, бесспорное; почет, уважение, авторитет.

АКСОНОМЕТРИЯ — параллельная проекция фигуры, когда на плоскости чертежа изображается фигура вместе с пространственной прямоугольной декартовой системой координат, к которой отнесена эта фигура, и вместе с проекцией (вторичной) фигуры на одну из координатных плоскостей (на рис. 3 на плоскости $x'O'y'$). А. позволяет восстановить форму и расположение фигуры относительно системы координат.

А. имеет преимущество перед фронтальными проекциями (см.) (на две или три плоскости) в наглядности. Если в ортогональных проекциях изображение пространственной фигуры расчленяется на отдельные, разрозненные проекции (на две или три перпендикулярные плоскости), то в А. изображение фигуры воспринимается как целостное и наглядное.

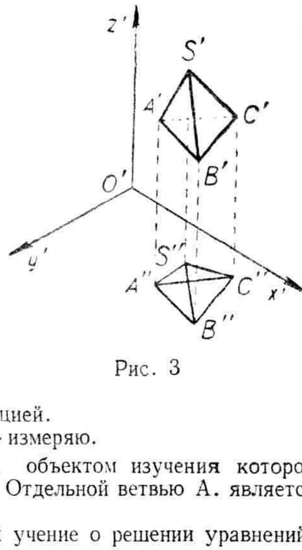

Рис. 3

В зависимости от углов наклона между осями аксонометрических координат $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ и длины единичных отрезков (аксонометрических единиц) этих осей А. имеет частные случаи: изометрия, диметрия, кабинетная проекция.

В А. всякая точка A изображается в виде двух точек: первичной проекции A' и вторичной проекции A'' (на какую-нибудь координатную плоскость).

А. иначе называется аксонометрической проекцией.

Греч. ἄξον (axon) — ось, μετρεῖν (metrein) — измеряю.

АЛГЕБРА: 1°. А. — математическая наука, объектом изучения которой являются группы, кольца, поля, структуры и др. Отдельной ветвью А. является элементарная алгебра (см.).

В первоначальном понимании А. мыслится как учение о решении уравнений. В более широком смысле под А. мыслится наука, изучающая операции над элементами множества произвольной природы, обобщающие обычные операции сложения и умножения чисел. Существенным признаком А. является то обстоятельство, что в А. отсутствует идея предела, идея бесконечной близости элементов, как это имеет место в анализе или топологии (см.).

2°. А. над полем K — кольцо A, в котором, кроме обычных для кольца действий, определяется умножение на элементы из поля K.

Требуется выполнение следующих свойств:

1) $0 \cdot a = 0$,
2) $1 \cdot a = a$,
3) $k(la) = (kl)a$,
4) $(k+l)a = ka + la$,
5) $k(a+b) = ka + kb$

для любых a, $b \in A$ и k, $l \in K$.

Кольцо многочленов с целыми коэффициентами не есть А., а кольцо многочленов с вещественными коэффициентами является А.

Лит.: Энц. элем. мат., т. 2, Гостехиздат, М., 1951; М. Я. Выгодский, Справочник по элементарной математике, Физматгиз, М., 1951.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — дисциплина геометрического характера, в которой изучаются алгебраические кривые и поверхности, вообще алгебраические многообразия (см.).

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ — частный случай алгебраического многообразия (см.) при $n-s=1$.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — частный случай алгебраического многообразия (см.) при $n-s=2$.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — такая функция $y=f(x)$, для которой существует многочлен $F(y, x)$ такой, что $F(y, x)\equiv 0$ при $y=f(x)$.

Например, функция y, связанная с аргументом x зависимостью $y=x-\sqrt{\dfrac{1+x^3}{5+x^2}}$, есть А. ф. Функции, не являющиеся А. ф., называются трансцендентными функциями (см.).

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТОЕ ПОЛЕ — такое поле P, в котором всякий многочлен степени n $(n\geqslant 1)$ с коэффициентами из P имеет в этом поле n корней, если кратные корни засчитывать столько раз, какова их кратность. Поле алгебраических чисел (см.) является А. з. п. Поле комплексных чисел также является А. з. п. Последнее утверждение является одной из возможных формулировок основной теоремы алгебры (см.).

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ — выражение, составленное из букв и чисел, соединенных между собой знаками алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в целую степень и извлечения корня с целым показателем) и, возможно, знаками последовательного выполнения действий — скобками (см. Скобки).

Если А. в. не содержит знаков корней (радикалов) от чисел и букв, то оно называется рациональным А. в.; если А. в. содержит радикалы, то оно называется иррациональным А. в. (относительно буквы или числа, входящих под знак корня). Рациональное А. в. называется целым, если оно не содержит деления на выражение, содержащее буквы. Всякое А. в. есть алгебраическая функция (см.) от букв, входящих в это выражение, если при этом буквы считать переменными. Однако не всякая алгебраическая функция может быть представлена в виде А. в.

Примеры: 1) $2a+b^2c-\dfrac{3}{2}ab$ — целое А. в.; 2) $\dfrac{ab-c}{a}$ — дробное А. в.; 3) $a\sqrt{2}-b$; $3\sqrt{a}+b$ — иррациональные А. в.

Некоторые частные случаи А. в. называются одночленами (см.) и многочленами (см.).

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ какого-либо элемента (или к какому-либо элементу) a_{ij} квадратной матрицы есть минор этого элемента M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т. е. А. д. элемента a_{ij} совпадает с его минором M_{ij}, если сумма его индексов четна, и является противоположным числом к минору, если сумма его индексов $i+j$ нечетна. А. д. используется для разложения определителя (см.) по его строке или столбцу, что в свою очередь используется для вычисления определителей.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — совокупность всех точек, декартовы координаты которых удовлетворяют системе уравнений вида:

$$\begin{gathered} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \end{gathered}$$

где $F_i (i=1,2, \ldots, s)$ — многочлены от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — корень многочлена с целыми рациональными коэффициентами. Как показал Г. Кантор, множество А. ч. образует счетное множество.

Числа, не являющиеся А. ч., называются трансцендентными числами (см.). А. ч. образуют поле, т. е. сумма, разность, произведение и частное А. ч. вновь являются А. ч. Поле А. ч. является алгебраически замкнутым полем (см.), т. е. всякий многочлен (степени $n \geqslant 1$), коэффициентами которого являются А. ч., имеет своими корнями также А. ч.

Примеры. Всякое рациональное число p/q, где p и q — целые числа, будет А. ч., так как оно является корнем многочлена $qx - p$ с целыми коэффициентами. Числа i и $\sqrt[17]{39}$ — А. ч., так как они являются корнями соответственно многочленов x^2+1 и $x^{17} - 39$ с целыми коэффициентами.

См. также Степень алгебраического числа.

Лит.: А. О. Гельфонд, Трансцендентные и алгебраические числа, Гостехиздат, М., 1952.

АЛГОЛ — универсальный (единый) язык и единая символика составления программ для электронных вычислительных машин. Этот алгоритмический язык (алгол-60) принят на Международной конференции, состоявшейся в Париже в январе 1960 г.

Основными символами этого международного языка являются: латинские буквы (26 прописных и 26 строчных), арабские цифры (от 0 до 9), два логических значения («истина» и «ложь»), набор специальных символов — ограничителей (знаки операций, разделителей и скобок) и, наконец, некоторый набор служебных слов (около 20) на английском языке.

Таким образом, А. представляет собой своего рода систему или средство, позволяющее выражать с помощью указанных символов точную последовательность решения той или иной конкретной задачи.

При непосредственном применении А. для каждой конкретной электронной вычислительной машины составляется программа, переводящая международный язык (А.) на язык данной машины. При помощи такой программы — «переводчика» машина уже сама «понимает» этот язык. По существу А., являясь принципиально универсальным языком для выражения (описания) вычислительных алгоритмов, ликвидирует дорогостоящий параллелизм в научных исследованиях, открывает перспективы в автоматизации программирования и широкого обмена вычислительными программами и информацией.

АЛГОРИТМ (алгорифм) — точное предписание о выполнении в определенном порядке некоторой системы операций, позволяющее решать совокупность задач определенного класса.

А. приводит от исходных данных к искомому результату через конечное число шагов (действий); при этом данные варьируются в известных границах.

Много различных А. рассматривается в алгебре и теории чисел, а также в других математических дисциплинах. Например, простейшие алгоритмы — правила, по которым выполняются арифметические действия, А. Евклида (см.), А. извлечения квадратного корня и А. для вычисления определителей n-го порядка, правило Саррюса (см.) — А. для вычисления определителей 3-го порядка, А.

для вычисления ранга матриц (см.), А. для определения числа действительных корней алгебраического уравнения — правило Штурма (см.) и т. д.

Слово А. возникло в результате искажения имени великого узбекского математика IX в. Хорезми (по-арабски — аль-Форезми, что означает: «из Хорезма», или латинизированное Algorithmi). Хорезми были написаны основополагающие труды по арифметике и алгебре, которые переведены с арабского языка на латинский в XII в.; по ним в Европе познакомились с индийской десятичной позиционной системой счисления (часто ошибочно называемой арабской) и основными правилами алгебры.

Долгое время понятие А. в математике не имело точного определения как ввиду трудности уточнения объема этого понятия; так и ввиду того, что оно понадобилось лишь тогда, когда пришли к открытию отсутствия А. для решения некоторых задач. Точные определения А. были даны лишь в XX в. несколькими математиками. Эти определения, различные по форме, впоследствии оказались эквивалентными.

Было доказано отсутствие А. для решения ряда массовых задач. Наиболее замечательный результат в этом направлении принадлежит советскому математику, лауреату Ленинской премии, академику П. С. Новикову, доказавшему отсутствие какого-либо алгоритма для решения проблемы тождества в теории групп.

Важность нахождения различных алгоритмов, доказательства их отсутствия для ряда задач и создания общей теории алгоритмов исключительно повысилась в связи с бурным развитием машинной математики (см.), дающей возможность реализовать практически почти любой алгоритм в виде построения соответствующей вычислительной машины.

Лит.: Б. А. Трахтенброт, Алгоритмы и машинное решение задач, Физматгиз, М., 1960.

АЛГОРИТМИКИ — средневековые математики, использовавшие в своих арифметических вычислениях письменные вычисления, выполняемые по определенному правилу (см. Алгоритм) и более совершенные, чем вычисления абацистов (см.), производившиеся на абаке (см.).

АЛЕФ — первая буква финикийского алфавита, используется, следуя Г. Кантору, для обозначения мощностей бесконечных множеств. Например, мощность счетного множества (см.) обозначается $\aleph_0$ (читается А.-нуль).

АЛИДАДА — линейка, имеющая на концах перпендикулярные стойки (пластинки) с щелями, называемые диоптрами. А. вращается вокруг центра лимба — круга или полукруга с делениями. А. является составной частью ряда простейших измерительных (геодезических) приборов, предназначенных для измерений на местности.

Араб. ал-идада — линейка.

Лит.: см. термин Астролябия.

АНАГЛИФ — стереоскопический чертеж, отличающийся от обычного тем, что состоит из двух частей (чертежей), помещенных одна над другой и выполненных в двух красках (бледно-красная и бледно-зеленая). А. рассматривается через специальные очки — светофильтры (стереоочки), имеющие разные цвета (чаще всего красный для левого глаза и сине-зеленый для правого).

По известным законам физики и физиологии каждый глаз воспринимает только одно из двух изображений, так как каждый из светофильтров очков взаимно поглощает соседнее изображение, создавая таким образом при совмещенном двойном (бинокулярном) рассмотрении анаглифа единое стереоскопичное (объемное) впечатление.

А. используется для иллюстраций по стереометрии, кристаллографии и объемной мультипликации (например, при рассмотрении сердца в медицине).

Греч. ana gluphen — рельефно.

Лит.: Г. А. Владимирский, Альбом стереоскопических чертежей-анаглифов к задачнику Рыбкина, Учпедгиз, Стереофабрика, М., 1938; Г. Д. Михайлов, Набор «Конструктор» и стенные анаглифы, Сб. «Изготовление наглядных пособий по геометрии», под ред. А. Д. Семушина, Изд-во АПН РСФСР, М., 1953; И. Пал, Начертательная геометрия с анаглифными иллюстрациями, Будапешт, 1961.

АНАЛИЗ — метод (способ) рассуждения или доказательства, при котором мы отправляемся от неизвестного к известному, от искомого к данному.

А. используется в преподавании всех учебных предметов и дисциплин в школе: арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии и высшей математики. Так, например: а) при решении арифметической задачи методом А. мы отправляемся в своих рассуждениях от неизвестного, от вопроса задачи и приходим к данным величинам и зависимостям между ними; б) при решении задач на составление уравнений с одним или несколькими неизвестными отправляемся в рассуждении от неизвестного (одного или нескольких) и устанавливаем зависимости между данными величинами и неизвестными; в) при решении задач на построение начинаем рассуждать с рассмотрения искомой (неизвестной) фигуры, которую надо построить, и устанавливаем ее связь с данными элементами. Аналогичную схему рассуждения мы встречаем при доказательстве теорем, при решении задач на доказательство в математике.

Пример. Доказать, что $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$ (1), если 2α — острый угол. Для доказательства соотношения (1) запишем его в виде: $2\sin\alpha\cos\alpha < 2\sin\alpha$ (2), или, так как $\sin\alpha > 0$, после упрощения имеем: $\cos\alpha < 1$ (3). Неравенство (3) при указанных ограничениях угла α верно. Отсюда, рассуждая в обратном порядке и используя свойства неравенств и формулу для синуса двойного угла, получим, что верно и неравенство (2), а следовательно, и данное неравенство (1).

Обращение А., т. е. рассуждение в обратном порядке, есть синтез (см.). А. ведет к более глубокому и сознательному усвоению учебного материала и способствует активному и творческому развитию логического мышления учащихся, нежели синтез. Но А. учащиеся усваивают труднее, чем синтез, в котором рассуждения идут от данных известных величин.

При решении задач часто пользуются как А., так и синтезом одновременно. Всякий А. включает в себя элементы синтеза, и всякий синтез включает в себя элементы А. А. и синтез взаимно связаны друг с другом, они представляют собой две стороны одного и того же процесса рассуждения. Ф. Энгельс, характеризуя А. как метод в научных исследованиях, говорит: «...мышление состоит столько же в разложении предметов сознания на их элементы, сколько в объединении связанных друг с другом элементов в единство. Без анализа нет синтеза» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, Госполитиздат, М., 1957, стр. 40).

Греч. analysis — разрешение, освобождение.

Лит.: В. В. Репьев, Общая методика преподавания математики, Учпедгиз, М., 1958; любая другая книга по методике математики.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ — общее название для ряда математических дисциплин, основанных на понятиях функции и предельного перехода. К А. м. обычно относят дифференциальное и интегральное исчисление, теорию рядов, теорию дифференциальных уравнений, теорию аналитических функций, вариационное исчисление, теорию интегральных уравнений, функциональный анализ. В более узком смысле термин А. м. часто служит общим назначением первых трех из указанных выше разделов математики.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — часть математики, в которой исследуются геометрические образы средствами алгебры на основе метода координат.

В А. г. на плоскости ставятся две основные задачи: 1) зная геометрические свойства линии (как геометрического места точек), найти ее уравнение, т. е. уравнение, связывающее координаты ее текущих (переменных) точек, и

2) зная уравнение линии, связывающее ее текущие координаты x и y, найти геометрические свойства этой линии. Например, уравнение окружности с центром (a, b) и радиусом r в прямоугольной системе координат есть уравнение второй степени, в котором отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при x^2 и y^2 равны. И обратно, если имеется уравнение второго порядка между текущими координатами x и y, в котором отсутствует член с произведением координат и коэффициенты при x^2 и y^2 равны, то это уравнение есть уравнение окружности (действительный или мнимый). Так, уравнение $x^2+2x+y^2=3$ есть уравнение окружности в прямоугольных декартовых координатах с центром $(-1,0)$ и радиусом $r=2$.

Сущность метода координат на плоскости заключается в том, что положение всякой точки определяется пересечением двух линий, принадлежащих к двум различным системам координатных линий, которые, образуя координатную сетку, должны удовлетворять требованию: через каждую точку плоскости должна проходить одна и только одна линия каждой системы. Так устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости Евклида и парами чисел x и y — координатами точки, определяющими положение точки рассматриваемой плоскости. Аналогично устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками трехмерного пространства и тройками чисел (x, y, z) — координатами точки, определяющими положение точки в пространстве.

Исторически сложившееся название А. г. хотя и прочно удерживается, но не вполне отвечает содержанию этой науки. Для А. г. характерным является не только и не столько приложение алгебры к геометрии, а следовательно, использование метода анализа (см.), сколько применение метода координат, почему и следовало бы ее назвать скорее координатной геометрией.

Идея координатного метода не является достижением нового времени, а уходит своими истоками в глубь античной истории: элементы идеи координат мы находим у древних математиков. Древние египтяне пользовались при выполнении строительных работ параллельными координатами (отрезками), греческие астрономы Гиппарх (II в. до н. э.) и Птолемей (II в. н. э.) пользовались сферическими координатами (широта и долгота) для определения положения различных точек земной поверхности. Однако отсутствие буквенной символики и общего представления о числе тормозило развитие координатного метода у греков.

Наибольший вклад в создание А. г. внесли французские ученые Ферма и Декарт. Пользуясь буквенной символикой, введенной французским ученым Виетом, Декарт и Ферма одновременно и независимо друг от друга дали науке новый метод — метод координат, лежащий в основе созданной ими в XVII в. А. г.

Великий мыслитель Декарт понимал, более чем его современник Ферма, ограниченность и специфичность характера синтетической геометрии древних. Большой заслугой Декарта по сравнению с Ферма было введение в математику переменной величины, создание более удачной символики, установление тесной связи пространства с числом, алгебры с геометрией. Поэтому Декарта считают наиболее видным создателем А. г. Декартова переменная величина явилась, по словам Ф. Энгельса, «поворотным пунктом в математике», в результате чего стало возможным бурное развитие всей высшей математики и смежных с ней разделов естествознания.

Творец А. г. Декарт не мог до конца провести «арифметизацию» геометрии; он не распространил метод координат на пространство и ограничился изучением только плоских кривых; система координат была у него несовершенной; была только одна горизонтальная ось, а ординаты представлялись переменными параллельными отрезками; не было четкого различия знаков координат.

Перенесение координатного метода на трехмерное пространство было осуществлено лишь в конце XVII в. и продолжено в XVIII в. работами нескольких ученых, прежде всего Клеро и Эйлера.

Во второй половине XIX в. в связи с бурным развитием физики и совершенствованием техники наблюдается прогресс в математике. В геометрии появляются новые понятия: вектор (см.), тензор (см.) и др. Для характеристики материальной системы требуется большее число параметров, чем три. Трехмерное евклидово пространство становится тесным. В теории относительности рассматривается четырехмерное пространство, в квантовой механике состояние системы характеризуется бесконечномерными величинами. В математике стали прибегать к пространствам четырех измерений, n измерений и бесконечного числа измерений (функциональные пространства).

Лит.: С. В. Бахвалов и др., Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М., 1958; С. С. Бюшгенс, Аналитическая геометрия, ч. I, II, Гостехиздат, М., 1946; Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I и II, Гостехиздат, М., Н. И. Мусхелишвили, Курс аналитической геометрии, Гостехиздат, М., 1947.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — основное понятие теории функций комплексного переменного. Однозначная функция $w=f(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ называется А. ф. в точке z_0, если в некотором круге $|z-z_0|<r$ с центром z_0 и радиусом $r>0$ она определена и представима степенным рядом:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

(этот ряд обязательно является рядом Тейлора). Функция $f(z)$ называется А. ф. в области D плоскости комплексного переменного, если она аналитична в каждой точке области D. А. ф. в точке z_0 является А. ф. в некоторой окрестности этой точки. Аналогично определяется понятие А. ф. действительного переменного $y=f(x)$, где требуется сходимость степенного ряда к $f(x)$ не в круге, а в интервале $|x-x_0|<r$.

А. ф. в области D имеет в каждой точке z_0 области D конечную производную:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z)}{\Delta z};$$

верно и обратное: если $f'(z)$ существует и конечна в D, то $f(z)$ является А. ф. в области D, поэтому понятие однозначной А. ф. совпадает с понятием голоморфной функции (см.).

А. ф. в связной области D однозначно определена, если заданы ее значения для бесконечного множества точек, имеющего предельную точку внутри области D; в частности, А. ф. определяется своими значениями в произвольно малой окрестности или на произвольно малой дуге, лежащими в D. Это свойство, называемое теоремой единственности А. ф., показывает, насколько тесно значения А. ф. связаны между собой. Например, А. ф. $y=f(x)$ действительного переменного может быть распространена в А. ф. комплексного переменного лишь единственным образом (см. Аналитическое продолжение).

Интеграл от А. ф. в односвязной области D по любому замкнутому контуру равен нулю (теорема Коши); обратное утверждение также справедливо, если предполагать $f(z)$ непрерывной в области D (теорема Морера). А. ф. имеет производные всех порядков, которые также являются А. ф. в той же области.

Для того чтобы функция $w=f(z)$ (которую всегда можно задать парой функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух действительных переменных x, y) была А. ф. в области D, необходимо и достаточно, чтобы в области D функции $u(x, y)$ $v(x, y)$ были дифференцируемы и $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (условия Коши — Римана, или, точнее, Даламбера — Эйлера). При выполнении этого условия $u(x, y)$ и $v(x, y)$ составляют пару сопряженных гармонических функций.

А. ф. $w=f(z)$, не принимающая одинаковых значений в связной области D (однолистная), дает конформное отображение области D плоскости z на область D_1 плоскости w.

Многозначная (может быть бесконечнозначная) функция, полученная аналитическим продолжением (см.) А. ф., также называется А. ф.; каждая однозначная ветвь функции $f(z)$ является однозначной А. ф.

Многозначная (быть может однозначная или бесконечнозначная) функция $f(z)$, полученная из А. ф. всевозможными аналитическими продолжениями, называется полной А. ф. в смысле Вейерштрасса.

К классу А. ф. принадлежит большинство элементарных функций, например $\sqrt[n]{z}$, e^z, $\sin z$, и многие неэлементарные, например гамма-функция, эллиптические функции, бесселевы функции. Алгебраическая сумма и произведение конечного числа А. ф. являются А. ф., частное А. ф. есть А. ф. (в области, где знаменатель отличен от нуля). Сложная функция $s=f_1[f_2(z)]$, составленная из А. ф. $s=f_1(w)$ и $w=f_2(z)$, является А. ф.

Лит.: А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, М., 1950; И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1954.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ — распространение функции, аналитической в некоторой области, на более широкую область. Если $f_1(z)$ — аналитическая функция (см.) в области D_1 и область D_2 имеет общую часть S с областью D_1 (рис. 4.), то может существовать только одна аналитическая в области D_2 функ-

Рис. 4

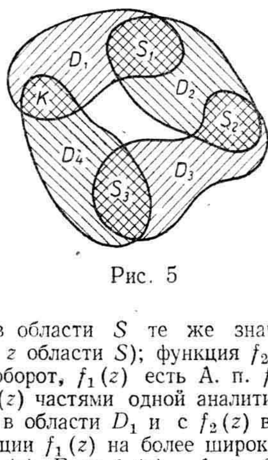

Рис. 5

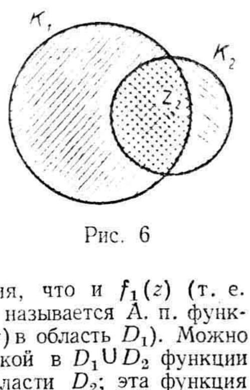

Рис. 6

ция $f_2(z)$, принимающая в области S те же значения, что и $f_1(z)$ (т. е. $f_1(z)=f_2(z)$ для всех точек z области S); функция $f_2(z)$ называется А. п. функции $f_1(z)$ в область D_2 (наоборот, $f_1(z)$ есть А. п. $f_2(z)$ в область D_1). Можно считать функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ частями одной аналитической в $D_1 \cup D_2$ функции $f(z)$, совпадающей с $f_1(z)$ в области D_1 и с $f_2(z)$ в области D_2; эта функция $f(z)$ называется А. п. функции $f_1(z)$ на более широкую область $D_1 \cup D_2$ и обозначается снова символом $f_1(z)$. Если $f_2(z)$ — А. п. $f_1(z)$ в область D_2, $f_3(z)$ — А. п. $f_2(z)$ в область D_3, $f_4(z)$ — А. п. $f_3(z)$ в область D_4, то эта цепь А. п. функции $f_1(z)$ в совокупности даст А. п. $f_1(z)$ на более широкую область $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$; область D_4 (или даже D_3) может иметь общую часть K с областью D_1 (рис. 5), но значения $f_4(z)$ в области K не обязаны совпадать со значениями $f_1(z)$, поэтому А. п. функции $f_1(z)$ приводит к понятию многозначной аналитической функции, так как продолженная функция $f_1(z)$ может быть двузначной в области K (а при дальнейших А. п. даже бесконечнозначной).

А. п. функции $f(z)$ можно строить следующим образом. Пусть дан элемент аналитической функции $f(z)$, т. е. дан степенной ряд $a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)^2+\cdots+a_n(z-z_1)^n+\cdots$, представляющий $f(z)$ в круге K_1; функция $f(z)$