高等学校教学用书

理論力学教程

上册 第二分册

Л. Г. 洛强斯基
А. И. 路尔叶 著
吳礼义等譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

理論力学教程

上册 第二分册

Л. Г. 洛强斯基, А. И. 路尔叶著
吳礼义等譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Гостехиздат)出版的洛强斯基(Л. Г. Лойцянский)与路尔叶(А. И. Лурье)合著的“理論力学教程”(Курс теоретической механики)上册 1948 年版譯出。原书經苏联高等教育部审定为高等工业学校教学参考书。

本书分两册，上册包括静力学和运动学，下册是动力学。中譯本上、下册又各分两个分册出版。

本分册由北京航空学院吳礼义、張开敏、黄克累、陈亚洪、馬宗祥、王元彬等合譯，并由高为炳及郑元熙整理校訂。

理 論 力 学 教 程

上册　第二分册

Л. Г. 洛強斯基，А. И. 路尔叶著

吳 礼 义 等 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

上 海 大 东 集 成 联 合 印 刷 厂 印 裝

新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 K 13010·81　开本 850×1168 1/32　印張 6 15/16

字数 188,000　印数 26,201—29,200　定价 (6) ¥ 0.70

1954 年 6 月第 1 版　1962年 8 月上海第 12 次印刷

第二分册目錄

第二篇 運動學

“我們建立一門全新的科學，它的對象却是十分陳舊的。雖然關於運動哲學家們寫的很少，在自然裏沒有比運動再古老的了。所以我多次的用實驗研究了運動的特性，這是值得的；但是直到現在，不是還是不知道就是還沒有證明……。就我所知道，還沒有人證明這一點，卽落體在相等的時間間隔裏所走過的路程之間之比是一組連續奇數。曾經有人說過，拋物體或砲彈走的路是某一曲線，但是却沒有人指出此線是一條拋物線”。

在伽利略的“有關於與力學及運動方面的兩個新的科學範疇的談話和數學證明”中“第三日”就是以這些話開始的。從這些話以及在這些話之後的內容幾乎全部是講述等加速及等減速運動定律的談話❶中可以清晰地看出十六世紀末十七世紀初力學思想發展的情景。在這個時期裏，主要地是由於亞基米德及其後斯蒂文的貢獻，靜力學已接近其極盛時代。而作爲運動的科學之力學相反地仍停滯在萌芽狀態。雖然幾何學，尤其是曲線幾何，已有光輝的發展，雖然天文學的描述部分也十分發展，但是與此二科學密切有關的運動學在伽利略以前仍在發展的低級階段上。並且充滿着很多從實驗上觀察得來的對運動的錯誤觀念。所以伽利略不得不與當時存在的混亂堅決地進行鬬爭（這一點在其“談話”中以幾個科學家爭論的形式充分地反映出來）。在十六世紀後半世紀卽伽利略的研究出現前不久然特巴黑認爲砲彈的軌道是由二條直線組成，一條上昇一條下降。其他的科學家（塔爾塔利亞 1537、別尼傑蒂 1585）以爲砲彈軌道是由一些直線段及圓弧組成。伽利略的落體

---

❶ Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze attenti alla mecanica & i movimenti. Leyde 1638。有多爾哥夫（А. Н. Долгов）的俄譯本。ГГТИ, 1934, 281 頁。

在眞空中加速度與其重量無關的學說與亞里斯多德的舊學說正相矛盾這在當時引起了很多的爭論。

速度是路程與時間的比值的概念古代哲學家已很明白，並且也廣泛地應用了；但是在各種運動中速度變化規律的研究只有在伽利略之後才有了可能。伽利略首次地提出了加速度的概念，加速度是速度隨時間變化的度量❶。前面講過，伽利略建立了等變速直線運動及拋物線曲線運動的簡單定律。

在伽利略以後不久惠更斯(1629—1695)進一步發展了曲線運動中點之加速度的概念。著名的加速度在切線及法線上的分解就是他的創造，這在動力學的發展史中起了巨大的作用(離心力)。

由於牛頓及萊布尼茲的無窮小學說(微分學)的出現，使我們可能把加速度的概念推廣到任何運動中，到這個時期可以說質點運動學基本上已經完備了。

等一個應用微分學講述力學的巨著是 1736 年歐拉的"力學"。

剛體運動學的發展也是屬於歐拉的❷(1707—1788)，雖然在一些特殊情況中平面圖形之轉動的特性在他以前就知道了。如笛卡兒(1596—1650)已經知道圓在直線上滾動時其點所成之旋輪線的運動特性，歐拉的同時代人勞物法爾(1602—1675)想出了對曲線作切線的方法，這個方法與瞬時速度中心及運動合成的思想有密切的連繫。

在第十九世紀，由於機器與機械原理的發展，剛體運動學，特別是平面圖形的點系運動學，已達到其極盛時期。

此處首先應當提出法國科學家的一些著作。1826—1829 年在夢才出版的玻斯萊的"應用力學教程"(Poncelet 1788—1876)，法國幾何學家沙爾的研究，以及 1829 第一次出版的哥里奧利

❶ 在伽利略以前達芬奇曾作過落體的實驗，其結果直到 1799 才發表，自然伽利略是不知道的。

❷ 歐拉 Theoria motus corporum solidorum(剛體運動原理) 1765。

斯[1](Coriolis 1792—1843)的應用力學名著。以發現電動力學定律著名的法國科學家安培首先指出將力學中之專章分出來的好處，他提出分出專章講運動的一般性質以及與運動之物理原因無關的運動特性。同時他又建議稱力學的這一部分為運動學。

運動的合成以及分解運動為最簡單類型的運動這一有用的思想從亞里斯多德已經開始了(運動的合成及速度的合成)，但是直到十九世紀才得到完全的發展。

在一般情況中任何運動合成時建立加速度合成的一般定律的功績是屬於哥里奧利斯的。

以後運動學主要他是沿着應用到機器及機械的方向發展。在1841年出現的維利斯的著作裏"Principles of mechanism"第一次建立機構運動學的基礎。這門科學在1875年出版的列勞(Reuleaux)的論文裏"Theoretische Kinematik"得到進一步的發展。

機械運動學的發展很多方面是由於俄國的科學家，首先是天才的數學家契培雪夫院士(1821—1894)的貢獻。他創立了很多最有意義的機構的理論。

現在運動學的發展主要是沿着應用到機構學上的道路而發展的。

---

[1] G. Koriolis, Traité de la Mécanique de corps solide et du calcul de l'effer des machines, 1829.

第七章　點在空間中的運動

§48. 確定點在空間中的位置. 點在空間中的運動方程式. 點的軌跡

M 點在空間的位置(圖 151)和前一樣(§28), 將由這點的向徑來確定。這向徑是作自預先選定的任一點 O(座標系統 $Oxyz$ 的原點)。

自圖 151 立刻可以見到, M 點的向徑在笛卡兒座標軸上之投影就是這點的座標:

$$r_x=x,\quad r_y=y,\quad r_z=z, \tag{1}$$

並且向徑 $\boldsymbol{r}$ 的長度等於

$$r=+\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}=+\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{2}$$

而向徑和笛卡兒座標軸所成角之餘弦按下列方程式確定:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, x})=\frac{r_x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, y})=\frac{r_y}{r}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, z})=\frac{r_z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}。 \tag{3}$$

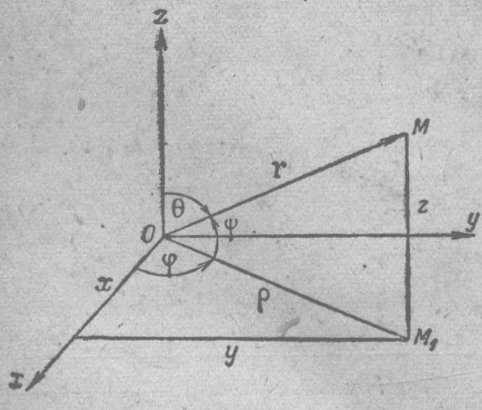

圖　151

笛卡兒直角座標(x, y, z)於確定點在空間中的位置時應用甚廣。但在實用上, 亦往往用其他方法來確定點的位置。

例如, 用球座標: (1) r, M 點到 O 點的距離(圖 151), (2) φ, 經過 Oz 軸及 M 點之平面 zOM 與 xOz 平面所形成之角, 及最後 (3) θ, Oz

軸與向徑 $\boldsymbol{r}$ 所形成之角。前述 θ 角另可用其餘角即向徑 $\boldsymbol{r}$ 對平面 xOy 的傾斜角 ψ 來代替。

這些座標視其應用的範圍而有各種不同的名稱。長度 r 這個無向量將被稱作點之徑長，以別於向量 $\boldsymbol{r}$—向徑；在砲兵學中，在確定目標的座標時，長度 r 被稱作傾斜射程。φ 角一般地(在天文學和砲兵學中)被稱作**方位角**，有時被稱作**經度**，ψ 角被稱作**緯度**(在砲兵學中——目標位置角)，θ 角被稱作極角。

在另一種座標系統——**柱座標**(有時稱作半球座標)系統中，用下列諸量(圖 151)：(1) ρ—向徑在平面 xOy 上之投影(在砲兵學中，這投影被稱作目標的水平射程)，(2) φ—方位角及(3) z—M 點距 xOy 平面之高度。

如 M 點位於 xOy 平面內，則座標 ρ 及 φ 被稱作**極座標**。

為確定點在空間中位置還有另外一些座標系統即一般所謂的**曲線座標**。我們把這座標的初步理論放在專章中，即這本書的第九章中討論，現在祇提及點的笛卡兒座標和此點的上述幾種曲線座標之間的簡單公式。

自圖 151 得：

$$x=\rho\cos\varphi=r\sin\theta\cos\varphi=r\cos\psi\cos\varphi,$$

$$y=\rho\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi=r\cos\psi\sin\varphi,$$

$$z=r\sin\theta=r\cos\psi。$$

如點在空間不固定，則其座標隨時間而變化。按照這些座標的變化規律可以判斷點的運動特性。設我們已知點的座標為時間的函數，即已知方程式：

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)。$$

這些方程式被稱作**點在空間的運動方程式**。在極座標，球座標，柱座標等等中，我們可取其中任意座標以代替笛卡兒座標 x, y, z。這些以時間的函數表示的座標便給出點在該座標系統中的運動方程式。

運動點在空間所畫的線被稱作軌跡。此線是運動點在空間的各個幾何位置。

我們現在要解如下問題：有了運動方程式，如何求點的軌跡方程式？

爲解決這問題，我們須注意，確定點在任何瞬時的座標的運動方程式提供了 x, y 及 z 間的函數關係。由此很淸楚**我們必須從運動方程式中消去時間，以求得軌跡的方程式**。

當然，亦可以不消去時間，將之保留而視爲參變數。此時**運動方程式可作爲軌跡的參變方程式**。要把曲線的參變方程式變成顯性方程式時，可將參變數消去；在運動學中也可以同樣作，卽自運動方程式中消去時間。

在直線運動中，我們可以取座標軸中之一軸爲直線，點沿此直線作運動，例如 x 軸。點在這軸上的位置便完全由它的橫座標 x 決定，而點的運動方程式(此處是一個)爲

$$x=f(t)。$$

爲了使這個關係更淸楚起見，常常另作**運動圖**，卽取時間 t 爲一軸(一般爲水平)，橫座標 x 爲另一軸，用曲線圖來表示運動規律。如爲曲線運動，則必須按每一座標，各作一運動圖。

§ 49. 直線運動的例子．等速運動及等變速運動．和諧振動．振動的合成

點沿直線的**等速運動**是直線運動最簡單的例；這在學習普通物理教程時，我們已經知道得很淸楚。

令 x 軸指向運動方向，得等速運動的方程式如下：

$$x=x_0+ct,$$

此處 x_0 爲點在初瞬時 $t=0$ 時之橫座標。正常數 c,

$$c=\frac{x-x_0}{t},$$

是點在單位時間內所走過的距離；這是點作等速運動時的速度。設 x 軸指向運動的相反方向，則得點的運動方程式如下：

$$x=x_0-ct,$$

在此情況下，不難看出速度 c 是由下列關係：

$$c=\frac{x_0-x}{t},$$

確定的。所以等速運動是由橫座標與時間的線性關係所確定的。在下章中還要詳細的講到速度。

沿直線的等變速運動是直線運動的第二個例；這在學習普通物理教程時，我們亦已經知道得很清楚。

令 Ox 軸和點在初瞬時的運動方向重合，並爲肯定起見使起始橫座標 x_0 爲正。

和等速運動不同，等變速運動的運動方程式是時間的二次函數：

$$x=x_0+ct\pm\frac{at^2}{2},$$

此處正值 a 是確定加速度的正量，c 是在初瞬時的速度($c>0$)。運動的性質是依運動方程式中所選取的符號是正或負而定。作運動圖(圖 152)。方程式

$$x=x_0+ct+\frac{at^2}{2},$$

對應上邊的一條曲線。其橫座標 x 總是在增加的，同時曲線隨時間的增長而愈來愈陡。這說明運動的加速性。

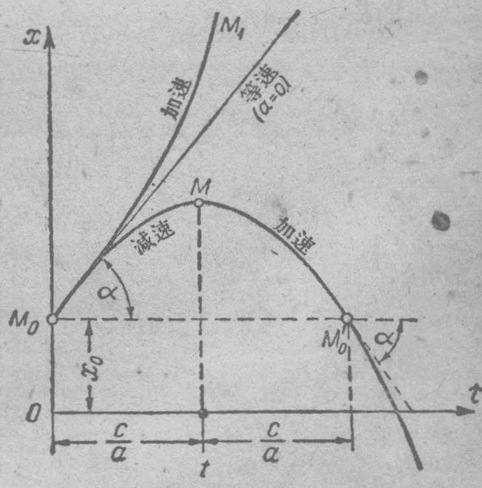

圖 152

在第二種情況下，得到另一曲線，其方程式是：

$$x=x_0+ct-\frac{at^2}{2}。$$

開始時前兩項之和爲正，並大於所減之項 $\frac{at^2}{2}$。橫座標 x 增加，但總是漸漸變慢，這時稱作減速運動。在某一瞬時（圖上之 M 點）橫座標 x 停止增加而開始減少，其減少則漸漸變劇。運動（M 點右邊之曲線部份）仍又變爲加速的，但其方向則與 Ox 軸相反。

我們可以用數學方法很容易地建立在瞬時 $t=\frac{c}{a}$ 運動性質的變化，此時點在減速運動中所經過的距離是：

$$x_m=x_0+\frac{1}{2}\frac{c^2}{a}。$$

如點繼續作方向相反的加速運動，則在瞬時 $t=\frac{2c}{a}$ 此點回到起始位置 $x=x_0$，並再繼續沿 Ox 軸相反方向作加速運動。在某一瞬時橫座標 x 變爲零，此後其值變爲負，而其絕對值則劇烈增加。

圖中所畫的直線表示有同樣初橫座標和初速度 c 的等速運動。這是爲着比較用的。此處，很明顯地，

$$\operatorname{tg}\alpha=c。$$

在下章中將詳細研究關於速度和加速度的問題；在那兒將指出區別加速運動和減速運動的簡單方法，並作幾個等變速運動方程式的數字例子。

直線和諧振動是直線非等速運動的有趣例子，其運動方程式爲：

$$x=a\sin(\omega t+\alpha), \tag{4}$$

或以 $\frac{\pi}{2}+\beta$ 代替 α，

$$x=a\cos(\omega t+\beta)。$$

現闡明常數 a, ω, α 及 β 的意義。

如將時間 t 增加某一常數 T，此常數使正弦函數或餘弦函數之參變數的位相增加 2π，亦即自下列條件

$$\omega(t+T)+\alpha=\omega t+\alpha+2\pi,$$

選取 T，則運動方程式由於正弦或餘弦函數之週期性而不變。換句話說，自瞬時 $t+T$ 以後，點的運動將和在時間間隔 $(t, t+T)$ 內的運

動一樣。因此，一般地在$(t+T, t+2T)$，$(t+2T, t+3T)$等等時間間隔內的運動將和在時間間隔$(t, t+T)$的運動一樣。換句話說，在時間$(t, t+T)$內，點完成了**振動的整週**或**完全振動**，在以後就是這一完全振動的重複了。

完成振動整週所需的時間間隔稱作**振動週期**。自前述等式，可得：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega=\frac{2\pi}{T}。$$

ω 被稱作振動的**圓周頻率**，以區別於一般用以表示$\frac{1}{T}$的頻率。"圓周"頻率這一名詞的來源不久就會明白的。以後我們將專用圓周頻率這個觀念，爲着簡便起見，我們將稱之爲頻率。

頻率表示在2π單位時間內所作振動的整週數。如週期以秒計，則頻率以1/秒(絕對單位被秒除)計。

大家都知道，正弦及餘弦函數的值在間隔$(-1, +1)$中變化。於是用方程式(4)表示的和諧振動，其橫座標自$-a$變至$+a$；而運動點自某振動中心向兩邊對稱地偏離，其所偏之距離的絕對值等於a。根據方程式(4)振動中心位在座標原點$(x=0)$。

點距振動中心的最大偏位稱作振動的**振幅**；振動點兩極端位置間的距離$2a$稱作振動的**範圍**。最後，常數α或β表示當$t=0$時點的初位置，並稱爲振動的**初位相**，而表示式$(\omega t+\alpha)$或$(\omega t+\beta)$是振動的**位相**。

設點沿一半徑爲a的圓周作等速圓周運動，將此運動投影在圓周的半徑上，則可得一直線振動。這樣的投影可用圖153所示的弗爾伏(Вольф)連桿來實現，當曲柄OM作圓周運動時(如箭頭所示)，KK-框架的運動即是M點投影的運動。

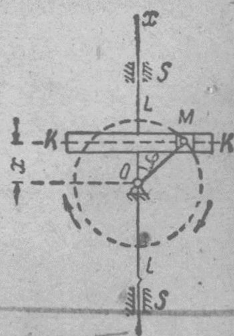

圖 153

弗爾伏連桿的模型示於圖154中。用鉸鏈連在曲柄上的滑塊被放在水平框架後面，它在框架

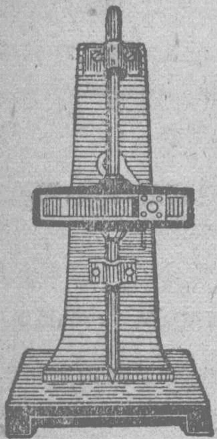

圖 154

切口中的滑動。當曲柄繞軸作等速轉動❶時，由框架及連在它上面的垂直桿所構成的連桿將作垂直的和諧運動。由曲柄 OM 與 Ox 軸（圖 153）所成之 φ 角按下列規律：

$$\varphi=\omega t+\beta$$

變化，此處常係數 ω 確定曲柄在 1 秒鐘內所作的角（**曲柄的角速度**），而常數 β 則，很明顯地，是在初瞬時 $t=0$ 的角。框架的横座標 x 則立刻可從圖中看到，等於：

$$x=\overline{OM}\cos\varphi=a\cos(\omega t+\beta),$$

此處 a 是曲柄長度。這正是連桿的和諧振動方程式；連桿上的框架是爲着將 M 點的圓周運動自動地投影到 Ox 軸上用的。此處所描寫的連桿是廣泛地被應用在各種機器上以及各種機構及儀器上。其中有根據這原理設計的所謂“正弦機構”，它是爲產生正弦函數用的計算機構。

當曲柄在垂直位置時，即對應於角 $\varphi=0$ 時，連桿具有最上頭的位置；此時連桿距原點的距離 $x=a$；當曲柄在下面的位置時($\varphi=\pi$)連桿在 x 的相反方向距原點的距離爲 a。

連桿的中間位置對應於 x 的零值。這個位置將是連桿（框架）的振動中心。連桿距原點最大的距離就是振動的振幅。兩極端位置間的距離，等於 $2a$，確定了連桿振動的範圍。

現在來確定連桿作一整週振動所需的時間，例如，連桿自離開它的頂點位置再回到這位置所需的時間，亦就是振動的週期。

這時間（用 T 來表示），很明顯地，和曲柄作整轉的時間相同，並等於：

❶ 點沿圓周的等速運動及物體（此處爲曲柄）繞軸的等速轉動都算作已在普通物理教程中學習過。

$$T=\frac{2\pi}{\omega}。$$

振動頻率 ω 與曲柄角速度相符合一事說明了"圓周"頻率的來源。曲柄與 Ox 軸間的角 φ 就是振動的位相，當 $t=0$ 時，其起始值，即 β(或 α)，確定了振動的初位相。

注意在和諧振動中，週期及頻率與振幅及初位相無關。

可引用的關於和諧直線運動的例子是很多的。當長擺離鉛垂線作微小角偏位之擺動時，其下端則作和諧振動，且由於擺的長度很長，可將圓弧當作直的線段。正如將一彈性薄片的一端固定，而使另一端作運動，則在微小偏位的情況下，後者將作和諧振動，薄片愈長或其振動範圍愈小，振動愈近於直線。現在說明如何作和諧振動：

$$x=a\sin(\omega t+\alpha)$$

的運動圖。為此我們回憶一下前述和諧振動的定義，即和諧振動是點沿圓的等速運動在圓的直徑上的投影。

作半徑為 a 的圓(圖 155)，在圓上截圓弧 OM_0，其中心角為 α，並經 M_0 點作水平直線至與 Ox 軸之交點；此點即為曲線的起始點，對應於

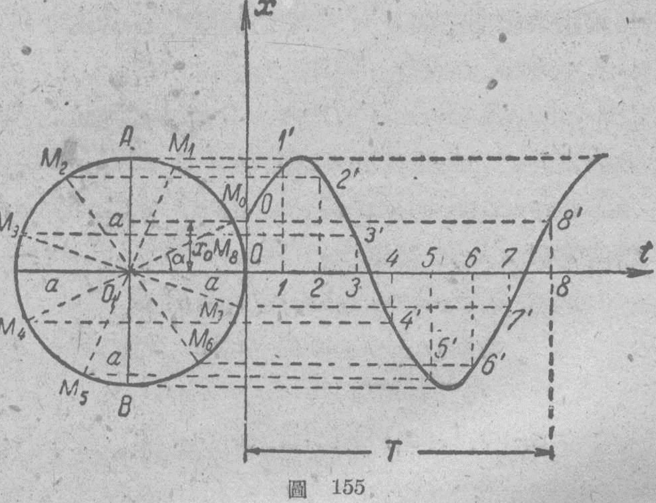

圖 155

瞬時 $t=0$（實際上，$x_0=a\sin\alpha$）。要了要作出全部曲線，先佈置時間的分度。在 t 軸上取某一段作爲振動週期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 並將它分成 8, 16, 32…（或其他的數值 2^n）等分。在此圖中週期分爲 8 部份；與此類似，自 M_0 點開始，將整個圓周亦分爲 8 部份。經過這些分點各作水平直線，又從週期 T 的諸分點各作垂直線，使這些對應的水平線與垂直線相交。這些交點就是我們所要求的曲線上的未知點 $1'$, $2'$ 等等。如果週期所分的部份夠多，我們不難從這些點作得光滑曲線。經過圓上 A 點及 B 點（這些點可以是也可以不是 M_0, M_1,… 中的點）所作的水平直線是曲線的上限及下限。

以後（在動力學中）我們會常常遇見運動方程式，其右邊部份是幾個正弦或餘弦的和，而它們的位相包含相同或不同的頻率。這個和中的每一項各是一個和諧振動並簡單地稱作“諧振”；當然就會發生這樣一個問題，表示幾個諧振之和的是甚麼運動？我們先從同頻率諧振的合成開始。

茲證明：**由幾個同頻率的諧振之和可得出相同頻率的和諧振動方程式。**

用兩個諧振來證明已經足夠；令它們的共同頻率等於 ω，它們的振幅爲 a_1 及 a_2，位相爲 α_1 及 α_2；則其運動方程式爲：

$$x=a_1\sin(\omega t+\alpha_1)+a_2\sin(\omega t+\alpha_2)。$$

用已知的兩角之和的正弦公式，得

$$x=(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2)\sin\omega t+(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2)\cos\omega t。$$

列入新的常數 a 及 α，假定

$$\left.\begin{aligned}a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2&=a\cos\alpha,\\ a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2&=a\sin\alpha。\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

將等式（5）中兩式平方相加，得：

$$(a_1\cos\alpha_1+a_2\cos\alpha_2)^2+(a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2)^2=a^2,$$

由此　　$$a=+\sqrt{a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}。$$