

数学文化研究与 大学数学教学

鲍红梅 徐新丽 ● 著



苏州大学出版社
Soochow University Press

数学文化研究与大学数学教学

鲍红梅 徐新丽 著

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学文化研究与大学数学教学 / 鲍红梅, 徐新丽著

— 苏州: 苏州大学出版社, 2015. 12

ISBN 978-7-5672-1636-5

I. ①数… II. ①鲍…②徐… III. ①数学—文化—
研究②高等数学—教学研究—高等学校 IV. ①01-05
②O13-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 309965 号

书 名: 数学文化研究与大学数学教学

著 者: 鲍红梅 徐新丽

责任编辑: 李 娟

装帧设计: 刘 俊

出版发行: 苏州大学出版社(Soochow University Press)

社 址: 苏州市十梓街1号 邮编: 215006

印 装: 虎彩印艺股份有限公司

网 址: www.sudapress.com

邮购热线: 0512-67480030

销售热线: 0512-65225020

开 本: 890mm×1240mm 1/32 印张: 7.125 字数: 200 千

版 次: 2015 年 12 月第 1 版

印 次: 2015 年 12 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5672-1636-5

定 价: 28.00 元

凡购本社图书发现印装错误,请与本社联系调换。服务热线:0512-65225020



Preface

序 言 ■ ■ ■ ■ ■

数学一直是现代文化极其重要的形成因素之一。从 20 世纪 60 年代开始,随着人类文化学和西方数学哲学的逐渐融合与发展,数学文化的观点被越来越多的学者关注和认可。近年来,我国内地大学纷纷实践开设新型的人文教育类数学课程,大学数学教育的研究也越来越受到数学家和广大一线数学教师的重视。研究强调改变观念,重新审视数学教育,把数学教育提升到文化意识,强化数学文化对大学数学教学的意义。

本书从数学文化的视角研究大学数学教学,探讨数学文化教育的维度以及如何找到数学文化教育的切入点,构建学生容易理解的数学教育形态,在大学数学教育中渗透数学文化教育,以期对大学数学教学有所助益。

本书的出版得到广大同仁的热情帮助,胡国专同志和蒋国民同志参与了第七章的写作,对于大学数学教学过程中数学文化渗透的案例作了深入的研讨,对其他章节的内容也提出宝贵意见,并校阅了全书,谨此致谢。

由于作者水平有限,参考资料不太齐全等因素,作者对某些最新理论观点的研究还不是很深入,因此本书中难免有不妥之处,希望广大读者批评指正。

鲍红梅

2015 年 12 月



Content

目 录

- ✱ 第一章 数学文化相关概念的界定 / 1
- ✱ 第二章 国内外数学文化研究概述 / 9
 - 第一节 国外的数学文化研究 / 9
 - 第二节 国内的数学文化研究 / 16
 - 第三节 对国内外数学文化研究的反思 / 24
- ✱ 第三章 数学文化的研究层面 / 31
 - 第一节 数学文化的观念 / 31
 - 第二节 数学文化的实质和特征 / 38
 - 第三节 数学文化的三种形态 / 48
 - 第四节 数学文化的学科体系 / 56
 - 第五节 数学的文化价值 / 60
- ✱ 第四章 数学文化研究与数学素质教育 / 69
 - 第一节 当代数学教育观的综述 / 69
 - 第二节 数学教育研究的文化视角 / 74
 - 第三节 数学教育的文化研究 / 85
 - 第四节 数学文化观照之数学素质教育 / 94
- ✱ 第五章 数学文化研究与大学数学教育 / 101
 - 第一节 数学文化教育反思 / 102
 - 第二节 数学文化观照之大学数学教育 / 106
 - 第三节 数学文化教育的维度 / 113
 - 第四节 构建学生容易理解的数学教育形态 / 117



❖ 第六章 大学数学课程的文化点解析 / 125

第一节 数学本质的文化意义 / 127

第二节 数学知识的源起 / 130

第三节 数学思想方法 / 142

第四节 数学思维的训练 / 151

第五节 数学审美与数学精神 / 169

❖ 第七章 大学数学文化教学问题选析 / 186

第一节 大学数学教学过程中渗透数学文化的案例分析 / 186

第二节 数学审美能力的培养 / 196

第三节 数学理性的培养 / 202

第四节 数学思维的培养 / 209

❖ 参考文献 / 220



第一章

数学文化相关概念的界定

从 20 世纪 60 年代开始,随着人类文化学和西方数学哲学的逐渐融合与发展,数学文化的观点被越来越多的学者关注和认可。美国数学家怀尔德(R. Wilder)在其 1968 年出版的著作《数学概念的进化》和 1981 年出版的著作《作为文化系统的数学》中提出“数学作为一种文化体系”的数学哲学观,最早系统地提出了数学文化的观点。怀尔德以文化形成、影响因素和数学发展等理论为研究基点,率先提出了数学文化的相关概念,并很快得到当时数学学术界的认可。克莱因(M. Kline)在《古今数学思想》《西方文化中的数学》《数学:确定性的丧失》等著作中,都在不遗余力地阐释数学文化的人文色彩,指出数学一直是西方文明中的主要文化力量:“数学一直是形成现代文化的主要力量,同时又是这种文化极其重要的因素。”

数学文化以及与之相关的概念,都有一个发展变化的过程,这些概念的界定随着人们认识的变化而变化。

1. 数学

数学是一门古老的自然学科,是人类智慧的结晶,它的历史几乎和人类文明一样古老。“数学”一词最早出现在希腊,最初的意思是科学或知识。在我国古代,曾将数学叫作算术,之后不久又叫作算学和数学。

那么究竟何谓数学?数学家们对数学的定义也众说纷纭,其中具有代表性的定义有:毕达哥拉斯的万物皆数说,亚里士多德的哲学说,希尔伯格的符号说,高斯的科学说,笛卡尔的工具说,库尔的逻辑



说,汉克尔的创新说,布劳威尔的直觉说,克里奇的集合说,法国布尔巴基学派的结构说,怀特海的模型说,波普尔的活动说,M. 克莱因的精神说,普罗克拉斯的审美说,波莱尔的艺术说等。

尽管如此,要给数学下一个定义,并不是件容易的事,尤其是下一个能被人们普遍认同的定义,就更不容易了。过去人们从数学的学科结构定义数学是模型,从数学的过程定义数学是推理与计算,从数学的表现形式定义数学是符号,从数学对人的指导定义数学是方法论,从数学的价值定义数学是工具。现在人们普遍接受的数学的定义是:数学是对结构、模式以及模式的结构和谐性的研究,其中“模式”包括数的模式、形的模式、运动与变化的模式、推理与通信的模式、行为的模式等。

2. 数学观

近年来不少学者对数学观进行了系统的研究,其中包括对教师数学观的研究、对不同院校不同专业大学生数学观的研究以及对高中生数学观的研究等。黄秦安教授在《数学教师的数学观和数学教育观》一文中指出:“数学观由数学知识观、数学本质观和数学价值观组成。”数学观具有极其丰富的内涵,我国著名学者黄毅英先生、张乃达先生和郑毓信先生等都对数学观进行了深入系统的研究,他们分别从数学学习、数学意识和数学哲学的角度研究了数学观。

现在人们普遍认为数学观是对“什么是数学”的总体认识和看法。葛春丽在《工科院校大学生数学观的调查分析及发展对策研究》一文中,通过研究以往学者对数学观的定义,将数学观界定为:数学观是人们在做数学的过程中形成的对“什么是数学”这一问题以及数学的基本特征的根本看法和认识。其主要内容涉及数学的本质、对象、特点、地位和作用等。纵观以上数学观的界定,人们对数学观的认识主要是对数学自身的认识和看法,极少涉及文化层面的认识。

3. 数学文化

要理解数学文化的含义,我们首先来解读一下“文化”。关于文



化的理解,至今已过百种,最为普遍的解释有如下几种:

泰勒认为文化是一个复杂的整体,包括知识、信仰、艺术、道德、法律、风俗以及人在社会生活中所获得的技巧及养成的习惯。

德国教育家 L. 怀特从文化的结构性角度把文化划分为意识形态的、社会的、情感的和技术的四个方面。具体地说,“意识形态的”包括信念、对符号的依赖、哲学体系;“社会的”包括习惯、风俗、规则和人與人之间的行为模式;“情感的”包括与人行为有关的态度和情感;“技术的”包括工具和装备的制造和使用。

在我国,文化的解释有如下几种:

(1) 通俗地理解,文化就是一个人有知识,懂得语言文字。

(2) 《辞海》对“文化”从两个层次加以解释。从广义上讲,指人类在社会历史实践过程中所创造的物质财富和精神财富的总和;从狭义上讲,指社会意识形态,以及与之相适应的制度和组织结构。

(3) 现代人类文化学对文化的定义:指由某种因素(居住地域、民族性、职业等)联系起来的各个群体所特有的生活(行为)方式。

(4) 南开大学顾沛教授认为文化有广义和狭义之分,狭义的文化仅指知识,说一个人有文化就是说他具有知识;广义的文化则泛指人类的物质财富和精神财富的积淀。

综上,不难发现,顾沛教授对文化一词的解释最为通俗易懂。

随着对文化理解的深入,人们开始认识到数学也是一种文化,数学文化是人类文化的重要组成部分。

早在 20 世纪 60 年代,美国学者怀尔德提出:“数学是一个由于其内在力量与外在力量共同作用而处于不断发展和变化之中的文化系统。数学文化即由数学传统及数学本身所组成。”美国数学家克莱因也认为数学一直是形成现代文化的主要力量,同时又是现代文化极其重要的因素。

在国内最早注意到“数学文化”的学者是北京大学的孙晓礼教授,他非常关注从自然辩证法的角度对数学文化思考和研究。北京



大学数学科学院张顺燕教授认为数学文化是人类文化,数学文化与其他文化及整个人类文明具有重要的关系。张奠宙先生认为数学是一种文化现象,并从文学、语言学和美学方面解释了数学是一种文化。学者蔺云在《解读数学文化》一文中从知识形态层面、情感层面和技术层面论述了数学是一种文化。可见,不同的学者从不同的角度论述了数学是一种文化。

那么到底如何解释数学文化呢?近年来不少学者给出了数学文化的定义。

胡良华在《大学教学中渗透数学文化的实践与思考》一文中将数学文化界定为“数学文化是以现代科学体系为核心,以数学的精神、观点、思维方法、语言等辐射的相关文化领域所组成的人类文化”。

而陈晓坤等人在《大学数学教学中加强文化教育的思考》一文中强调从内容上解释数学文化,他们认为:“数学文化是一个含义广泛的概念,它主要是指在数学思想、精神以及人文方面的一些成果,比如数学的思想、方法、精神观点、应用价值及数学史内容等。”

陕西师范大学数学系黄秦安先生在《数学文化观念下的数学素质教育》中,从系统的角度将数学文化定义为一个具有强大精神与物质功能的动态系统。

对数学文化最具权威的解释是南开大学顾沛教授的解释,他从对文化的深层理解的角度认为:“数学文化也有狭义和广义之分,狭义的解释是指数学的思想、精神、方法、观点、语言以及它们的形成和发展;广义的解释是除这些之外,还包含数学史、数学美、数学教育、数学与人文的交叉、数学与各种文化的关系。”

综合以上不同的观点,笼统地说,数学文化就是指从文化这样一个特殊的视角对数学所做的分析。

数学在什么意义上可以说是一种文化?实际上,“文化”是能在最广泛意义下表达人类在社会历史实践过程中所有精神创造与物质成果的词汇,同时“文化”也是最能概括一门知识的历史嬗变性质以



及固有不同传统的术语。数学文化的概念不仅能够描述整个社会数学化的外在结构,而且能深刻地表现数学的人性特征。由于文化是人创造的,所以数学文化从一开始就立足于人类创造,把人作为整个数学文化价值的评判者。发展到了现代,通常认为数学文化是指由数学知识和数学观念系统组成的有机体,主要包括:数学思想、数学精神、数学方法、数学观点、数学之美、数学教育、数学语言等及其形成和发展,以及数学科学与人文科学的交叉融合、数学科学与各种文化的相互关系。

数学是一种文化,可以从三个角度(或说三个层次)进行分析:

(1) 对象,即数学活动的客体成分。广义地说,文化是指人类社会在社会历史实践过程中所创造的物质财富与精神财富的总和。按照这样的理解,一切非自然的也即由人类所创造的事物或对象都应该看成是文化物,而这里所说的“文化性”即是明确肯定了相应事物或对象对于人类创造活动的直接依赖性。数学对象并非物质世界中的真实存在,而是抽象思维的产物,因此,数学即是一种文化。与一般文化物相比,数学的特殊性在于数学对象的形式建构性与数学世界的无限丰富性和秩序性,且数学对象应被看成是“社会的建构”,即只有为“社会共同体”所一致接受的数学命题、问题、语言和方法才能真正成为数学的组成成分。

(2) 数学家,即数学活动的主体成分。由于在现代社会中数学家必定是作为一定社会共同体的一员从事自己的研究活动的,或者说,他们的数学活动必定是在一定的传统指导下进行的,所以,从从事数学活动的数学家这一角度看,数学文化是指特定的数学传统,即数学家的行为方式。

(3) 历史,即数学活动的历史演化进程。在数学历史演化进程中,数学的文化内涵是多变性的。从历史角度看,数学最初只是作为整个人类文化的一部分得到了发展,随着数学本身与整个人类文明的进步,数学又逐渐表现出了相对的独立性,尤其是获得了特殊的发



展动力——内驱动力,并表现出了特有的发展规律。因此,有些学者认为,现代数学文化已经处于人类文化发展的较高阶段,并可被认为构成了一个相对独立的文化系统或者说文化子系统。

4. 数学素养

众所周知,人的素养包括多方面,数学素养是人的基本素养,近年来数学素养开始成为人们关注的话题,因此对数学素养的认识也更加深入。

纵观数学素养发展史,张明明学者将数学素养的发展过程分为三个阶段:

第一个阶段是 20 世纪 60 到 70 年代,数学素养主要侧重于数与运算能力。比如,英国教育部认为数学素养是沟通科学与读写文化的桥梁,也是社会实践过程中所需要的重要技能。这期间也有学者认为数学素养包括算术、几何、测量和统计等。澳大利亚教育署认为数学素养包括使用整数、分数、小数、百分数、钱数和工具数表的能力,运算能力和现实生活中运算的习惯。

第二个阶段是 20 世纪 80 到 90 年代,强调在人们生活环境中发挥数学素养的作用,数学素养的内容更加广泛,技能也拓展到更多的层面。比如,这一阶段英国一位学者认为数学素养就是很自信地利用数学处理日常生活中实际问题的能力。美国数学教师协会 1989 年把数学素养概括为:能理解数学价值,对自己的数学能力有信心,成为数学的解题者,能运用数学语言,掌握数学的方法。

第三个阶段是 21 世纪以来,数学素养的内涵相对综合。比如,经济合作与发展组织在国际学生评价项目中认为,数学素养是指人们相信和理解数学的价值,做出合理的数学判断并且认真学习数学,为以后成为一个积极的有数学思维能力的公民打下良好基础。

近年来不少学者致力于数学素养的研究,人们通过理论研究和总结归纳分别把数学素养界定为如下几种:

顾沛教授在《十种数学能力和五种数学素质》一文中将数学素养



看作一种数学能力、数学修养和数学品质,包括数学本质、数学语言、数学思想、数学精神、数学能力和数学应用等方面。

也有学者认为,数学素养是指在学习和应用数学的过程中所形成的素质,是指在先天基础上主要通过后天的学习、教育形成的数学知识、数学能力、数学文化素质的总称,是一种稳定的心理状态和理性的思维模式。数学素养有时也称数学素质。数学素质可划分为三个层次:(1)数学知识;(2)数学能力;(3)数学文化素质。这三个层次构成了数学素质的整体,其中数学知识是数学素质的基础,数学能力是数学素质的内容,数学文化实质是数学素质的价值系统,它具有导向、整合、促进的作用。

王兵在《数学实验与数学素质的培养》一文中认为,数学素养是数学知识和能力的综合体现,它除了包含抽象的思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力外,还应包含数学建模能力与数值计算能力,即会用数学解决实际问题,会用计算机进行科学计算。

常锦才等学者对数学素养的界定为:数学素养或者说数学素质可以理解为对数学基本知识的掌握以及在实践中自觉地运用数学知识和数学思维方法的习惯与能力等。

综上所述,数学素养有着丰富的内涵,是一种数学精神,一种数学品质,包括人的数学精神、数学能力、数学语言、数学思想和数学观等多方面的品质。

5. 数学文化素养

目前有关数学文化素养的研究很少,因此对于数学文化素养的界定极少。

周家全等学者在《论数学建模教学活动与素质培养》中提到“数学文化素质是指树立正确的数学观和数学信念,掌握数学的思想和方法。懂得数学这门科学的语言,会使用数学软件和计算机这一工具”。

目前只有山东师范大学的张明明在其硕士学位论文《高师院校数学与应用数学专业学生数学文化素养的现状调查与分析》中给出



了数学文化素养的界定:数学文化素养是数学素养的一个分支,是指个体具有数学诸多方面的品质,包括数学文化各个层次,以及对人类文明进步具有深远影响的数学科学知识的方方面面。

因此不难发现,数学文化素养是近几年来随着数学文化一词而产生的新词,人们对数学文化素养的研究还不够深入细致,对数学文化素养的界定也存在着局限性,以及不同学者持有的主观性。

东北师范大学杨海艳通过阅读文献,将以往学者对数学文化素养的界定进行总结归纳并进一步完善,将数学文化素养界定为:数学文化素养是指人们对数学文化的认识,从而使人们具有数学的思想、精神、方法、观点、语言和能力等数学文化多方面的品质。

因此,数学文化素养实际上是数学文化观的具体体现,然而它又不同于数学观,而是把数学观与数学文化更具体地结合。

6. 数学文化观

数学文化观不仅涉及对数学的认识和看法,更是把文化作为重中之重。随着数学的发展历程和未来社会的发展需要,大学生具备良好的数学文化素养是十分重要的。数学文化观是数学文化素养的重要组成部分,一个人要具备良好的数学文化素养,必然具备良好的数学文化观。数学文化观是人们对“数学是什么”的根本看法和认识,它是数学文化素养的重要组成部分,其主要内容包括人们在做数学的过程中形成的对数学研究对象的认识,对数学研究内容的认识,对数学语言的认识,对数学发展过程的认识,对数学精神、思想和方法的认识,对数学的地位和作用的认识以及对数学美的认识等。



第二章

国内外数学文化研究概述

第一节 国外的数学文化研究

数学文化的观点及其相关概念由美国数学家怀尔德最早系统地提出,并很快得到当时数学学术界的认可。怀尔德在这方面的主要研究成果有《数学概念的进化》和《作为文化系统的数学》。1968年怀尔德在《数学概念的进化》中提出数学发展的11个动力和10条规律。通过进一步研究以及与其他人的广泛讨论,怀尔德在1981年出版的《作为文化系统的数学》中,又提出了关于数学发展的23条规律。

苏联学者对于研究数学文化,特别是数学发展的规律也有着很大的兴趣。学者们也发表了诸如《关于数学发展规律性的方法论讨论》(1989)、《现代数学的发展规律性》(1987)、《科学的数学化:渊源、问题和前景》(1987)、《数学的未来:预测的方法论》(1991)等论文和专著。

与数学发展的动力和规律等问题直接相联系的是关于数学发展模式的研究。美国著名数学家、哲学家基切尔给出的关于数学发展的基本模式有着较为丰富的内涵。



一、怀尔德的数学文化研究

1. 关于数学发展的动力及主要观点

怀尔德提出的数学发展的 11 个动力：(1)环境的力量；(2)遗传的力量；(3)符号化；(4)文化传播；(5)抽象；(6)一般化；(7)一体化；(8)多样化；(9)文化阻滞；(10)文化抵制；(11)选择。

怀尔德关于数学发展的动力的主要观点如下：

第一，在数学的发展历史中，可以明显地看到两种力量的作用，即外部力量(环境力量)和内在力量(遗传力量)，这与生物进化相类似。环境力量进一步可分为“物质成分”和“文化成分”。从整体上说，现代数学在一定程度上可以看成是一个自足系统，即其发展主要取决于数学的内在力量，即遗传力量，但环境力量对数学的发展仍然有十分重要的影响，环境力量导致新的数学概念和理论的建立，后者则产生可以用于解决实际问题的更为有效的技术，并直接促进相应的理论(非数学的)的发展。

第二，对于新的、更为合适的符号的追求是整个数学史的一个重要特征。一个好的符号体系不仅带来操作上的极大便利，也直接促进新的创造。

第三，文化传播，即充分的文化交流是数学得以顺利发展的重要条件。怀尔德指出古希腊的数学就是古巴比伦与古埃及的数学和古希腊的哲学相结合的产物，而中国古代数学由于缺乏必要的外部交流最终陷入停顿。

第四，文化发展的普遍规律是各个文化系统随自身发展达到更高的抽象程度，更高的抽象程度意味着更大的力量。数学中的抽象与一般化有着十分密切的联系，数学家往往通过一般化使数学研究达到更高的抽象，一般化是数学家从事数学研究的重要工具之一。

第五，一体化是指原先互不相关的理论互相渗透形成一个具有更大潜在能力的新的理论。比如，解析几何。一体化的动力来自为



了从其他领域中汲取方法以解决某一领域久未解决的问题。从整体上说,一体化是多样化必然导致的发展,一体化增强了数学的统一性。一体化是一般文化进化中最常见、最重要的力量之一。

第六,多样化是指由一个理论或概念引出多种不同的新的理论或概念,它们分别体现了原先理论或概念的不同特性,常常由遗传力量造成。

第七,文化阻滞是指由于文化传统的影响而阻碍了对于某种更为先进的数学思想、更为有效的数学理论或方法的吸收。

第八,文化抵制是对外来成分更为强烈、更为自觉的抵制。和文化阻滞一样,这种抵制可能由一般文化环境造成,也可能由数学传统造成。

第九,选择既包括理论和概念的选择,也包括研究问题、方法以及符号和术语的选择。就较长的历史进程进行分析,理论的选择主要取决于各个理论所具有的数学意义,而对于符号和术语的选择,倡导者的名望与地位往往具有重要的作用。

2. 关于数学发展的规律

怀尔德在《数学概念的进化》中提出数学发展的 10 条规律为:

规律 1:在任何时候,只有那些能增强已有的数学能力以满足自身的遗传力量或一般文化的环境力量的概念,才能得到发展。

规律 2:概念的可接受性取决于它的富有成果的程度。特别是,一个概念不会由于它的起源或诸如“不真实的”等此类形而上学的标准而永远遭到排斥。

规律 3:一个概念在数学上的重要性既取决于它的符号表达式,也取决于它与其他概念的关系。如果一个概念的某种符号形式造成了人们对于这个概念理解上的困难,甚至造成对这一概念的彻底拒绝,那么假设这一概念是有用的,它的更容易把握和理解的符号形式就会得到发展。如果一组概念的相互联系使得把它们合并成一个更为一般的概念的一体化成为可能,后者也就会得到发展。