21世纪 经济与管理规划教材

经济数学系列

微积分

CALCULUS（下册）

金路 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

微积分

CALCULUS（下册）

金路 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分(下册)/金路编著. —北京:北京大学出版社,2006.7
(21世纪经济与管理规划教材·经济数学系列)
ISBN 7-301-09919-3

Ⅰ.微…　Ⅱ.金…　Ⅲ.微积分-高等学校-教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第125635号

书　　名:微积分(下册)
著作责任者:金　路　编著
责 任 编 辑:朱启兵
标 准 书 号:ISBN 7-301-09919-3/O·0670
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址:http://www.pup.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752926
　　　　　出版部 62754962
电 子 信 箱:em@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷有限责任公司
经　销　者:新华书店
　　　　　730毫米×980毫米　16开本　17.25印张　328千字
　　　　　2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
印　　数:0001—4000册
定　　价:27.00元

丛书序言

在最近二十多年中，我国社会生活的各个方面发生了巨大变化，经济建设取得了令世人瞩目的奇迹，经济体制正在全面地向市场经济体制转轨。经济与社会的全面转型产生了对市场经济知识的巨大需求，这又极大地推动了我国经济学教育水平的整体提高与进步。

今天，我国大学里的经济学教育已经越来越趋向规范化与国际化，一种更加有利于经济学理论发展的学术氛围已经形成，一大批拥有现代经济学知识与新型经济学理念的崭新人才正在脱颖而出。但是，不可否认的是，我国经济学教育和研究的整体水平与世界一流大学相比还有比较大的差距。突出表现在，我们自己培养的经济学博士很少能够在欧美一流大学任教；在国际著名的经济学期刊上，特别是顶级的经济学期刊上也不多见纯粹由国内经济学家完成的研究成果发表，这些都说明要想提高我国经济学教育和研究的水平并缩短这些差距，我们要走的路仍然很长！

近五十年来，经济学的研究与其成果越来越呈现出科学化的态势，其中一个突出的表现形式就是数学理论与经济学研究的紧密结合。具有严密逻辑的数学方法彻底改变了以往经济学分析中存在的一些缺点，如论证缺乏逻辑一致性以及所得出结论的模糊性。同时，随着数学方法在经济学中的广泛应用，不论是经济学研究方法还是经济学的研究成果，都越来越具有科学的特征。而且经济学家们所构建的经济学理论在很大程度上具有可检验性，这就避免了我们接受那些似是而非、模棱两可的结论。应该说，这是一种对传统社会科学，尤其是对经济学研究理念的根本性突破。随之而来的就是许多经济学领域的研究成果也逐渐被科学界所认可，一个最突出的现象就是，瑞典皇家科学院从 1969 年开始，特别为经济学领域内的那些具有开创性的成果设立了诺贝尔经济科学纪念奖，使经济学这一最具科学特征的社会科学也跻身于科学行列之中。

经济学在近半个世纪已经取得了一大批突破性的研究成果，这些成果不仅加深了人类对现实经济问题的洞察，而且也影响着人类社会的进一步向前发展。几乎所有这些成果都是用数学方法或数学语言所完成的，它们的核心内容都是建立在完备的数学模型与严密的数学论证的基础之上的，而且相当数量成果本身就是由优秀数学家取得的。尤其是获得诺贝尔经济学奖的重大研究成果，更是如此。从最早获奖的计量经济学理论、一般均衡理论，到最近获奖的资产定价理论、信息经济学理论与博弈理论，其分析方法与内容都是建立在数学理论与方法的基础之上的。近十年来两度获得诺贝尔经济学奖的博弈理论的主要贡献者纳

什(Nash)与奥曼(Aumman)就是出色的数学家。因此,从某种意义上讲,这些成果在经济学理论上的突破,其实就是数学理论的研究应用及其分析方法的拓展。今天,数学已经融入经济学之中,成为了现代经济学最重要的分析工具与研究方法。

事实上,在人类文明的发展进程中,数学一直占据核心的位置,许多推动人类文明发展并影响人类生活的重大科学发现与科学理论,都离不开数学所起到的奠基性贡献。今天,不仅是在自然科学,而且在人文社会科学的诸多学科中,使用数学语言或数学模型进行理论分析和观点阐述的现象也非常普遍。而一些社会科学中的许多重大发展也源于数学工具的改进与数学思想的发展。因此,我们可以这样说,数学知识的进步在很大程度上是人类文明进步的一个重要标志。

在整个社会科学中,经济学应该说最具有科学的特征,这主要归功于数学在经济学中的广泛应用,我们相信,数学必将继续推动经济学理论不断地向前发展。因此,掌握现代经济学的一个必要前提条件就是要先学好数学的基础知识。

当前,国内许多高校的经济学院系也都根据现代经济学发展的需要,调整、修订并实施了新的数学教学计划,加大了数学课的教学时数,加深了数学课的难度,这就对经济管理专业学生的数学水平提出了更高的要求。正是在这种背景下,北京大学出版社策划出版了《21 世纪经济与管理规划教材·经济数学系列》丛书。

本丛书主要是针对高等院校的经济学、管理学各专业学生所编写的。丛书的编著者分别是中国人民大学、复旦大学、南京大学、武汉大学和华中科技大学等著名高校的教师,他们中的多数都同时具有数学与经济学硕士以上的学位,他们不仅有深厚的数学功底,而且深谙现代经济学理论,所研究的课题也在经济学的前沿领域内。他们有多年为经济与管理专业本科生、研究生讲授微积分、线性代数、运筹学、概率论与数理统计等多门课程的教学经验,目前又承担着本科生、研究生的中高级微观经济学、中高级宏观经济学、计量经济学、数理经济学、金融经济学、博弈论与信息经济学等经济学理论课的教学工作。这是一支知识结构合理、教学经验丰富的写作团队。

在内容的选择上,每本教材都尽量考虑到不同层次、不同专业的教学需要,尽可能地使本系列教材在教学过程中为任课教师提供一个合理的选择空间。当然,不足之处难免存在,希望广大师生不吝赐教,以便本丛书今后不断修订完善。

在本丛书的策划、出版过程中,经北京大学中国经济研究中心姚洋老师推荐,中国人民大学经济学院的李军林老师做了大量的组织协调工作。丛书编委会在此对他们表示诚挚的感谢!

丛书编委会

2006 年 6 月

前　言

高等数学(微积分)是经济类、管理类等专业的重要基础课。随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用,数学的思想、方法和技术不但在自然科学、工程技术等领域发挥着越来越重要的作用,而且已经广泛深入到社会科学的各个领域,特别是在经济学和管理学方面,这也对高等数学的教学提出了更高的要求。大学数学的教学要能够在不增加或少增加教学学时的前提下,使学生学到更丰富、更有用的现代数学知识,具有更强的运用数学工具和技术的能力,以适应时代发展的需要。本教材就是在这种形势之下,广泛征求了我校教师和兄弟院校同行的意见,查阅了大量资料,并结合自己的教学经验编写的。

本教材在教学内容的深度与广度上与经济类、管理类等专业的微积分课程教学基本要求相当,并与教育部颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的微积分内容相衔接。

我们认为,大学数学教育的目标不但在于为学生提供学习专业知识的基础和工具,而且在于引导学生掌握一种现代科学的语言,学到一种理性思维的模式,接受包括归纳、分析、演绎等各项数学素质的训练。根据这一理解,我们在编写过程中特别注意了以下几点:

1. 继承和保持传统的微积分知识体系,力求做到线索清楚、组织科学、叙述准确、详简适当。同时更加重视数学的系统性和科学性,注意恰当地运用严格的数学语言与推理,使学生有机会适度接触精彩的数学抽象,积累逻辑思维的经验,锻炼理性思维和科学辨析能力,这是提高学生数学素质的重要环节。

2. 注重数学概念的物理学等背景以及几何的直观引入,把形式逻辑推导所掩盖的背景来源,解决问题的思想方法,以及所讲授的内容与其他内容、概念之间的内在联系等生动而又直接地揭示出来,强调数学思想的发展线索、来龙去脉,引导学生逐步理解数学的本质和发展规律,力求避免刻板枯燥讲授数学的教学方式。

3. 强调数学在经济学等领域的应用,更加注重后继课程中的数学准备。增加应用实例一方面在于提高学生的学习兴趣,另一方面在于使学生初步具备数学来自实践、用于实践的认识。虽然由于课程性质的限制,教材中的例子并不能全面反映数学在经济学等领域应用的广泛性与深入性,但本教材对于这些例子的讲述方式,更加强调数学建模的思想和方法,注重培养学生的实际应用能力和

创新意识。教学实践证明这是增强高等数学课程活力的有效途径。

4. 在每章最后一节增加了综合性例题，试图帮助学生复习、联络已学过的内容，提高知识的应用水平，增强学生融会贯通地分析问题、解决问题的能力。本教材还兼顾了各个层次学生的不同需要，将习题分为 A、B 两类，A 类相对容易，符合教学大纲对学生的基本要求。B 类相对难一些，适合有兴趣的学生深入学习。

我们认为，大学教材并非教师照本宣科的脚本。同一本教材可以使用于不同的对象，教出不同的风格。由于各高校、各专业方向对数学基础的要求有一定差异，有关教师可根据不同情况，对教学内容进行适当取舍。

在本教材的编写过程中，得到了复旦大学数学科学学院教学指导委员会主任童裕孙教授、全国普通高校教学名师陈纪修教授的支持、鼓励和帮助；武汉大学的何耀教授、中国人民大学的李军林副教授和蔡海鸥副教授、南京大学的李晓春副教授与作者共同讨论了编写计划，提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢。同时，感谢北京大学出版社林君秀、陈莉和张迎新同志的大力支持和帮助，感谢编辑朱启兵同志的认真负责与帮助，由于他们的辛勤工作，本书才得以尽快与读者见面。

囿于学识，本书不妥和谬误之处在所难免，殷切期望专家、同行和广大读者提出宝贵的批评和建议。

编 者

2006 年 6 月于复旦大学

目　　录

第五章　定　积　分

在微分学中，导数描述了函数随自变量的变化而变化的变化率，但这仅仅是函数的局部性质，只是函数性质的一部分. 在实际问题中，除了要揭示函数在给定时刻如何变化之外，还要描述这些瞬时变化在变量的整个变化过程中的积累，同时也要通过研究变量的改变来了解变量的本身. 例如，通过作变速直线运动的物体的速度来确定物体的位移等. 对这方面的研究，产生了微积分的另一个重要部分：积分学.

微分学和积分学的基本思想最初均系独立产生，并无紧密关连，直至牛顿、莱布尼茨发现它们之间的内在联系——微积分基本定理. 这个重要的结论使定积分的计算转化为求导的逆运算，即求原函数的问题，从而使问题的研究从对个别问题的探讨，转向强大而有效的一般方法. 同时也使求导和积分运算一起成为解决实际问题的有力工具，大大推动了微积分的飞速发展，

本章介绍定积分的概念和基本性质、定积分与不定积分的关系、定积分的计算方法，并在此基础上介绍定积分的应用，最后介绍广义积分.

§1　定积分的概念和性质

两个实例

一、面积问题

面积问题包含两个方面：一是给出面积的定义，二是寻求计算面积的方法.

设 f 是定义在$[a,b]$上的非负函数，称由曲线 $y=f(x)$与直线 $x=a,x=b$，$y=0$ 所围成的平面图形为曲边梯形. 如何定义这个曲边梯形的面积，其面积又如何来计算呢？

作区间$[a,b]$的一个分划

$$D:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

那么分划 D 把$[a,b]$分为 n 个小区间，每个小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 在$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，那么以直线 $y=f(\xi_i)$，$x=x_{i-1}$，$x=x_i$，$y=0$ 围成的小矩形的面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$，将它作为小区间$[x_{i-1},x_i]$上对应的小曲边梯形的面积的近似. 把这 n 个小矩形面积相加便得到

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

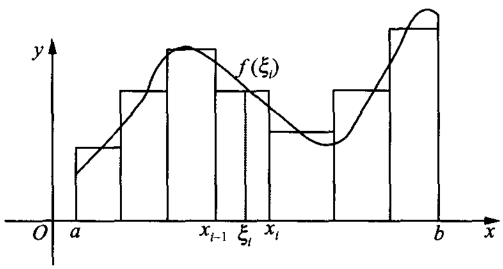

图　5.1.1

它就是所考虑的大曲边梯形的面积的近似. 记 $\lambda=\max\limits_i \Delta x_i$. 如果分划越来越细，即 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限存在，就定义这个大曲边梯形的面积 A 为这个极限，即

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

二、位移问题

设一质点作直线运动，已知它在时刻 t 的速度为 $v(t)$，要求它在时段 $[a,b]$ 中的位移 s.

当速度 $v(t)$ 是常数 v_0，即质点作匀速直线运动时，则 $s=v_0(b-a)$. 但是，当质点作变速直线运动时，$s(t)$ 的计算就不这么简单了. 为了计算质点在时段 $[a,b]$ 中的位移，我们作时段 $[a,b]$ 的一个分划

$$D: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

那么 D 把 $[a,b]$ 分为 n 个小区间，每个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 的长度为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 ξ_i，用质点在时刻 ξ_i 的速度去近似时段 $[t_{i-1},t_i]$ 的速度，即将质点在时段 $[t_{i-1},t_i]$ 中的运动近似看成匀速直线运动，则质点在时段 $[t_{i-1},t_i]$ 的位移就近似地为 $v(\xi_i)\Delta t_i$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

就是质点在时段 $[a,b]$ 中的位移的近似.

记 $\lambda=\max\limits_i \Delta t_i$. 当每个小时段越短，即 λ 越小，这种以匀速代变速的精确度越高，从而质点在时段 $[a,b]$ 中的位移为

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

以上的几何量和物理量的计算方法，都是先做分割、再求和，最后取和式的极限. 这种形式的极限，还出现于大量其他问题的计算之中. 撇开各类问题的具

体背景，抽象出其数量关系的共同特征，就引出了下述定积分的概念.

定积分的概念

定义 5.1.1　设函数 f 是$[a,b]$上的有界函数，作$[a,b]$的任意分划

$$D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 为小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$(i=1,2,\cdots,n)$. 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称之为**黎曼(Riemann)和**. 记 $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$. 如果当 $\lambda \to 0$ 时黎曼和的极限存在，且极限值与分划 D 以及 $\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的取法无关，则称此极限值为 f 在$[a,b]$上的(**黎曼**)**积分**，简称为**定积分**，记做 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

这时称 f 是$[a,b]$上的(**黎曼**)**可积函数**，简称为**可积函数**，也称 f 在$[a,b]$上**可积**.

在记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中，称 f 为**被积函数**，x 为**积分变量**，并分别称 a，b 为积分的**下限**与**上限**，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也称为**积分值**.

对定积分的定义，要作两点补充说明.

1. 定积分是个数值，它仅与被积函数、积分的上、下限有关，而与积分变量符号的选取无关，因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

2. 在定积分的定义中要求 $a<b$. 为了运算和应用的方便，当 $a>b$ 时补充规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

并且当 $b=a$ 时，规定

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

注意，并不是所有函数都是可积的.

例 5.1.1　讨论狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在[0,1]上的可积性.

解　由于有理数和无理数在实数集上的稠密性,因此不管用什么样的分划

$$D: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1.$$

对[0,1]作分割,在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$中一定既有有理数,又有无理数($i=1,2,\cdots,n$).

于是,当将$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$全部取为有理数时,成立

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i = 1,$$

而当将$\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$全部取为无理数时,则有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i = 0.$$

尽管以上两个黎曼和的极限都存在,但极限并不相同,所以狄利克雷函数在[0,1]上是不可积的.

那么什么样的函数是可积的呢?我们对此不进行深入讨论,只给出两个充分条件.

定理 5.1.1　*设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,则 f 在$[a,b]$上可积.*

事实上,以上定理还可推广为:设函数 f 在$[a,b]$上有界,且 f 在$[a,b]$上仅有有限个不连续点,则 f 在$[a,b]$上可积.

定理 5.1.2　*设函数 f 在闭区间$[a,b]$上单调,则 f 在$[a,b]$上可积.*

例 5.1.2　计算定积分$\int_a^b k\mathrm{d}x$,其中 k 是一个常数.

解　因为对$[a,b]$的任何分划 $D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和任何 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$),均有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} k\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = k(b-a),$$

所以

$$\int_a^b k\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k(b-a).$$

注　今后常把定积分$\int_a^b 1\mathrm{d}x$ 记为$\int_a^b \mathrm{d}x$.

例 5.1.3　计算定积分$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $f(x)=x^2$ 在[0,1]上连续,由定理 5.1.1 知它在[0,1]上可积.既然积分值与区间的分划及 ξ_i 的取法无关,不妨把[0,1]分为 n 等份,即取 $x_i=\frac{i}{n}$,因此 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$($i=1,2,\cdots,n$),再取 $\xi_i=x_i$.这时黎曼和为

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

由于 $\lambda=\max\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，所以当 $\lambda\to 0$ 时，$n\to\infty$. 于是

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

定积分的性质

由于定积分是黎曼和的极限，虽然形式上这种极限与函数极限稍有不同，但本质上并没有什么差别，因此定积分的一些性质，可以利用极限的相应性质推导出来.

一、线性性质

定理 5.1.3　设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积，α,β 为常数，则函数 $\alpha f+\beta g$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且成立

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　因为对 $[a,b]$ 的任何分划 D：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 和任何 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 均成立

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda=\max\limits_i\Delta x_i\to 0$，由于函数 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由定义知函数 $\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证毕

二、乘积函数的可积性

定理 5.1.4　设函数 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，则函数 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

这个定理的证明从略. 要注意的是，一般来说

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\neq\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right),$$