圣才电子书 圣才考研网 www.100exam.com

扫一扫 送本书 手机版
摇一摇 找学友互动学习
播一播 看名师直播答疑

国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《高等数学》

（第7版）（下册）

笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网

www.100exam.com

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·理工类

同济大学数学系《高等数学》（第7版）（下册）笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

国内外经典教材辅导系列是一套全面解析当前国内外各大院校权威教科书的学习辅导资料。本书是同济大学数学系《高等数学》(第7版)(下册)的学习辅导书。本书遵循第7版(下册)的章目编排，共分为5章，每章由三部分组成：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分为课(章)后习题详解，对第7版(下册)的所有习题都进行了详细的分析和解答；第三部分为考研真题详解，精选近年考研真题，并提供了详细的解答。

圣才考研网(www.100exam.com)提供同济大学数学系《高等数学》网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(详细介绍参见本书书前彩页)。随书赠送大礼包增值服务【30元3D电子书+40元3D题库+70元手机版电子书/题库+20元圣才学习卡】。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找到所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

图书在版编目(CIP)数据

同济大学数学系《高等数学》(第7版)(下册)笔记和课后习题(含考研真题)详解/圣才考研网主编.—北京:中国石化出版社,2015.9
(国内外经典教材辅导系列·理工类)
ISBN 978-7-5114-3613-9

Ⅰ.①同… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第214302号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
保定华泰印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米 16开本 19.25印张 4彩页 482千字
2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
定价:42.00元

序　言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士研究生入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂、3D电子书和3D题库。

同济大学数学系主编的《高等数学》(下册)(高等教育出版社)是我国高校采用较多的高等数学权威教材之一。作为该教材的学习辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 整理名校笔记，浓缩内容精华。本书每章的复习笔记均对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授该教材的课堂笔记。因此，本书的内容几乎浓缩了该教材的所有知识精华。

2. 解析课后习题，提供详尽答案。本书参考大量高等数学相关资料，对同济大学数学系《高等数学》(下册)的课(章)后习题进行了详细的分析和解答。

3. 精选考研真题，巩固重难点知识。为了强化对重要知识点的理解，本书精选了近几年考研数学中关于高等数学部分的真题，并提供详细的解答。所选考研真题基本涵盖了各个章节的考点和难点。

与本书相配套，圣才考研网提供同济大学数学系《高等数学》(下册)网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(免费下载，送手机版)(详细介绍参见本书书前彩页)。

购买本书享受大礼包增值服务，登录圣才考研网(www.100exam.com)，刮开所购图书封面防伪标的密码，即可享受大礼包增值服务：①本书3D电子书(价值30元)；②3D题库【考研真题+课后习题+章节题库+模拟试题】(价值40元)；③手机版【电子书/题库】(价值70元)；④圣才学习卡(价值20元)，可在圣才学习网旗下所有网站进行消费。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找到所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

圣才考研网(www.100exam.com)是圣才学习网旗下的考研考博专业网站，提供考研公共课和全国500所院校考研考博专业课辅导【一对一辅导、网授精讲班等】、3D电子书、3D题库(免费下载，免费升级)、全套资料(历年真题及答案、笔记讲义等)、国内外经典教材名师讲堂、考研教辅图书等。

考研辅导： www.100exam.com(圣才考研网)
官方总站： www.100xuexi.com(圣才学习网)

圣才学习网编辑部

目　录

第八章　向量代数与空间解析几何

8.1　复习笔记

一、向量及其线性运算

1. 向量的概念

(1)向量的定义

既有大小，又有方向的这一类量称为向量(或矢量).

(2)向量的表示

①用有向线段表示向量；

②用黑体字母来表示向量.

(3)自由向量

只考虑向量的大小和方向，不考虑起点的向量称为自由向量.

(4)相等向量

大小相等且方向相同的向量.

(5)向量的模

向量的大小称为向量的模.

(6)单位向量

模等于1的向量称为单位向量.

(7)零向量

模等于零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$或$\vec{0}$.

(8)向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角

设两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，任取空间一点O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 规定不超过$\pi$的$\angle AOB$(设$\varphi=\angle AOB$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角(图8-1-1)，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.

注：如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在0到π之间任意取值.

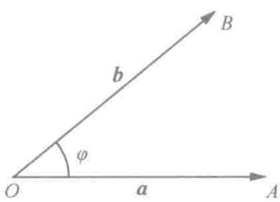

图8-1-1

(9)向量平行

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$或$\pi$，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

(10)向量垂直

如果$(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

(11)向量共线

两向量平行，又称两向量共线.

(12)向量共面

设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，称这 k 个向量共面.

2. 向量的线性运算

(1)向量的加法

①定义

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（图 8－1－2），则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

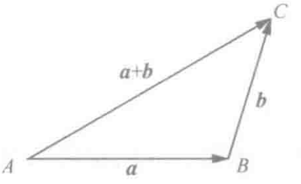

图 8－1－2

②运算规律

a. 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

b. 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

(2)向量的减法(差)

①负向量

$\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

②向量的差

向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

③向量加法和减法的不等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$
$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

(3)向量与数的乘法

①定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$.

②乘积的模

模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

③乘积的运算规律

a. 结合律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

b. 分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

(4) 两向量平行的充要条件

向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}\Leftrightarrow$存在惟一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

3. 空间直角坐标系

(1) 坐标分解式

如图 8－1－3 所示，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$ 和 $z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

(2) 向径

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的向径.

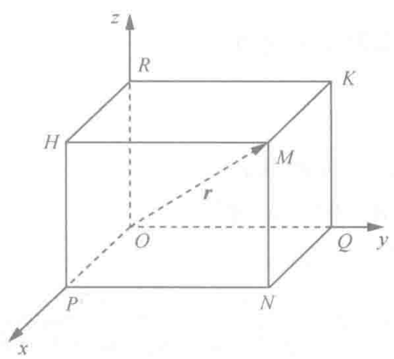

图 8－1－3

4. 利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，$\lambda$ 为实数，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$$

注：当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标表示式为

$$(b_x,\ b_y,\ b_z)=\lambda(a_x,\ a_y,\ a_z)$$

即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

5. 向量的模、方向角、投影

(1) 向量的模

向量 $\boldsymbol{r}=(x,\ y,\ z)$，则模

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(2) 两点距离公式

设点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$和点 $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则 A、B 两点间的距离

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(3)方向角

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α，β，γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

(4)方向余弦

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x, y, z) = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e}_r$$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦，且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

二、数量积　向量积　混合积

1. 两向量的数量积

(1)定义

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积，记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

(2)性质

①$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$；

②$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都为非零向量).

(3)运算规律

①交换律　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$；

②分配律　$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$；

③结合律　$(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为数.

(4)两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

2. 两向量的向量积

(1)定义

$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

(2)方向

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面(图 8-1-4).

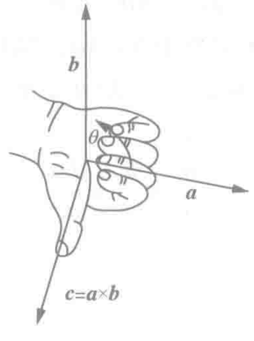

图 8-1-4

(3)性质

a. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$；

b. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都为非零向量).

(4)运算规律

a. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

b. 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

c. 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为数).

(5)向量积的坐标表示式

$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

3. 向量的混合积

(1)定义

三个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$. 先作两向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,把所得到的向量与第三个向量$\boldsymbol{c}$再作数量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$,这样得到的数量称为三向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$的混合积,记作$[\boldsymbol{abc}]$.

(2)坐标表示式

设$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z)$, 则

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

(3)几何意义

向量的混合积$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的绝对值是以向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积.

(4)夹角

设$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{c}$的夹角为α,则

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha$$

①当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成右手系时,α为锐角,$[\boldsymbol{abc}]$为正;

②当$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$组成左手系时,α为钝角,$[\boldsymbol{abc}]$为负.

(5)三向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$共面$\Leftrightarrow$混合积$[\boldsymbol{abc}]=0$,即

$$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0$$

三、平面及其方程

1. 平面的点法式方程

(1)法线向量

如果一非零向量垂直于一平面,则称这向量为该平面的法线向量.

(2)平面的点法式方程

设平面上一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的一个法线向量$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$,其平面方程表达

式为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

此表达式又称平面的点法式方程.

2. 平面的一般方程

方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程，其中 x、y、z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$.

(1)当 $D=0$ 时，平面的一般方程成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面；

(2)当 $A=0$ 时，平面的一般方程成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,\ B,\ C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于(或包含) x 轴的平面；同理，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$ 分别表示平行于(或包含) y 轴和 z 轴的平面；

(3)当 $A=B=0$ 时，平面的一般方程成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\dfrac{D}{C}$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,\ 0,\ C)$ 同时垂直 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于(或重合于) xOy 面的平面. 同理，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于(或重合于) yOz 面和 xOz 面的平面.

3. 两平面的夹角

(1)定义

两平面的法线向量的夹角(锐角或直角)称为两平面的夹角.

(2)计算公式

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\boldsymbol{n_1}=(A_1,\ B_1,\ C_1)$ 和 $\boldsymbol{n_2}=(A_2,\ B_2,\ C_2)$，则平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 应是 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2})$ 或 $\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2})$ 两者中的锐角，因此 $\cos\theta=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2})\right|$，则

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(3)结论

①Π_1，Π_2 互相垂直$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

②Π_1，Π_2 互相平行或重合$\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

四、空间直线及其方程

1. 空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看做是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线

$$\Pi_1\ 的方程：A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2\ 的方程：A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程，即

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

则称该方程组为空间直线的一般方程.

2. 空间直线的对称式方程与参数方程

(1)方向向量

如果一个非零向量平行于一条已知直线，则称该向量为这条直线的方向向量.

(2)直线的对称式方程

如果直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，直线 L 的对称式方程(或点向式方程)为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

(3)直线的参数方程

令直线的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则称方程

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases}$$

为直线的参数方程.

3. 两直线的夹角

(1)定义

两直线的方向向量的夹角(锐角或直角)称为两直线的夹角.

(2)计算公式

直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$，则 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$ 和 $\pi-(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$ 两者中的锐角，因此 $\cos\varphi=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})\right|$，则

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}+p_1^{\ 2}}\sqrt{m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}+p_2^{\ 2}}}$$

(3)结论

①两直线 L_1、L_2 互相垂直$\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

②两直线 L_1、L_2 互相平行或重合$\Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

4. 直线与平面的夹角

(1)定义

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$，称为直线与平面的夹角. 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$.

(2)计算公式

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，直线与平面的夹角为 φ，则 $\varphi=\left|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})\right|$，因此 $\sin\varphi=\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}})\right|$，则

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

(3)结论

①直线与平面垂直$\Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$；

②直线与平面平行或直线在平面上$\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

五、曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z)=0$ 有下述关系：

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足 $F(x, y, z)=0$；

(2)不在曲面 S 上的点的坐标都不满足 $F(x, y, z)=0$，则方程 $F(x, y, z)=0$ 就称为曲面 S 的方程.

2. 曲面的分类

(1)球面方程

①球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 R 的球面的方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

②球面的一般方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

(2)旋转曲面

①定义

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，旋转曲线和定直线依次称为旋转曲面的母线和轴.

②分类

a. 圆锥面

直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面称为圆锥面. 两直线的交点称为圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$称为圆锥面的半顶角.

b. 旋转单叶双曲面

将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

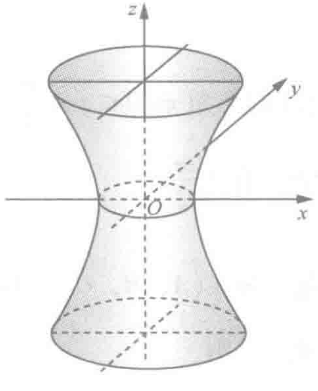

图 8－1－5

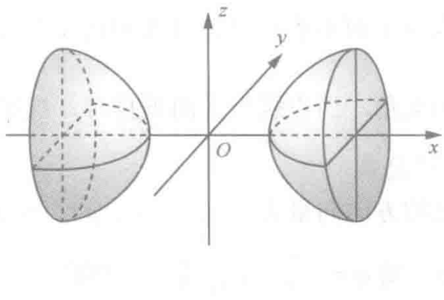

图 8－1－6

绕 z 轴旋转所成的旋转曲面称为旋转单叶双曲面(图 8－1－5)，方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

c. 旋转双叶双曲面

将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕 x 轴旋转所成的旋转曲面称为旋转双叶双曲面(图 8－1－6)，方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

(3)柱面

①定义

直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线.

②分类

a. 圆柱面

凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x, y, 0)$，且平行于 z 轴的直线 l 都在这曲面上，称这曲面为圆柱面(图 8－1－7)，圆 $x^2+y^2=R^2$ 称为准线，直线 l 称为母线.

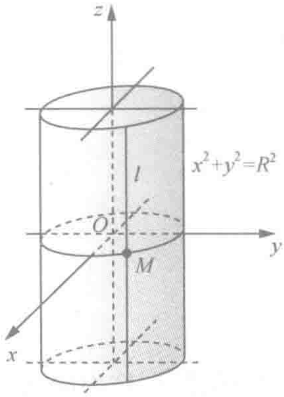

图 8－1－7

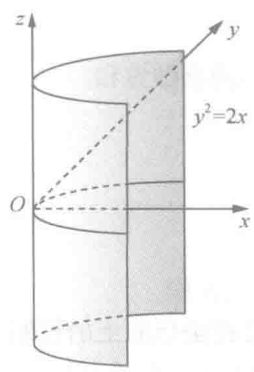

图 8－1－8

b. 抛物圆柱面

方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$，该柱面称为抛物柱面(图 8－1－8).

c. 母线平行于 x 轴的柱面

只含 y、z 而缺 x 的方程 $B(y, z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面.

d. 母线平行于 y 轴的柱面

只含 x、z 而缺 y 的方程 $G(x, z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

e. 母线平行于 z 轴的柱面

只含 x、y 而缺 z 的方程 $F(x, y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面.

(4)二次曲面

①定义

把三元二次方程 $F(x, y, z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面.

②分类

a. 椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$；

b. 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

c. 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

d. 双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；

e. 椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$；

f. 双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$；

六、空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

设 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 是两个曲面的方程，它们的交线为 C，则空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x, y, z)=0\\G(x, y, z)=0\end{cases}$$

2. 空间曲线的参数方程

称方程组

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

为空间曲线的参数方程.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴(即垂直于 xOy 面)的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线称为空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线，又称投影.

8.2 课后习题详解

习题 8-1 向量及其线性运算

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解：$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$
$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

证：如图 8-2-1 所示，设四边形 $ABCD$ 中对角线 AC 与 BD 交于点 M，已知$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$.

所以

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$$

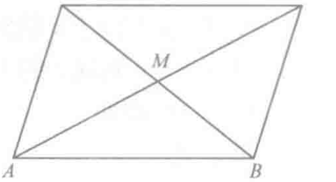

图 8-2-1