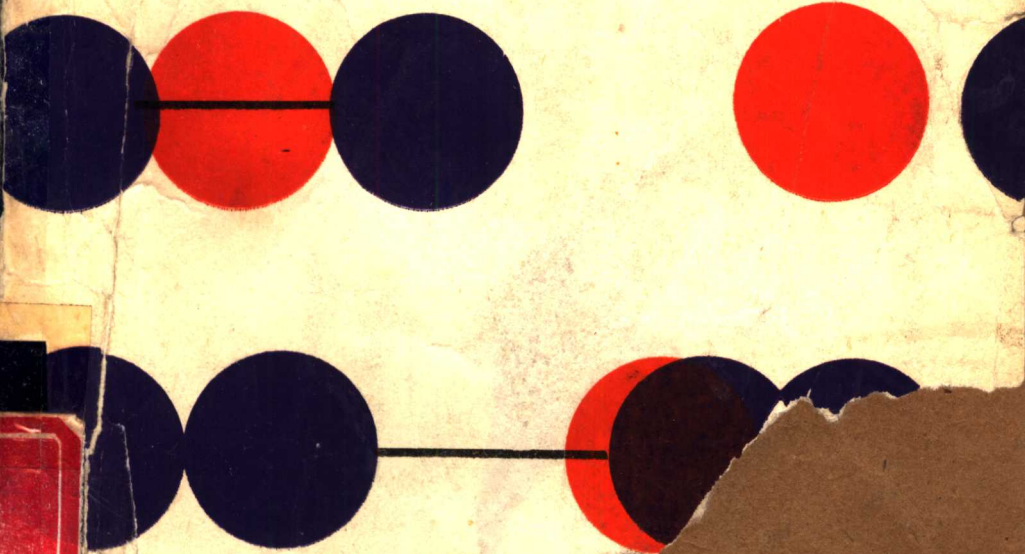


电磁射线理论基础

阮颖铮 编 著



成都电讯工程

高等学校教学参考书

电磁射线理论基础

阮颖铮 编著

国家教委博士学科点专项科研基金及
高等学校重点学科建设基金资助项目

成都电子科技大学出版社

电磁射线理论基础

阮颖铮

*

成都电讯工程学院出版社出版

成都电讯工程学院印刷厂印刷

四川省新华书店发行

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.375 字数 157 千字

版次1989年4月第一版 印次1989年4月第一次印刷

印数 1-1800 册

中国标准书号 ISBN 7-81016-056-7/TN · 29

(15452·58)

定价: 2.60元

序

本书根据作者在电子科技大学为研究生讲授“电磁射线理论”课程的讲稿经补充和修改而成。书中系统地讨论了用射线方法求解高频电磁场问题的基本理论和实际应用。全书共分五章。第一、二章是电磁射线理论的数学基础和物理基础；第三章讨论了几何光学基本理论，并用于求解射线轨迹，以及场的振幅和相位计算；第四章几何绕射理论是几何光学的一种发展和推广，它利用几何光学的方法来分析边缘和曲面上的绕射射线，并计算绕射场。第五章复射线理论是几何光学的另一推广，它对以高斯波束为代表的局部不均匀平面波的传播和散射，提供了一种十分有用的分析计算方法。

本书有关内容，主要取材于纽约理工大学(Polytechnic University)L·B·费尔森教授和其他几位学者的论文和专著，其中也包括作者本人近年来所进行的科研及成果。

本书可以作为电磁场与微波技术学科的研究生或高年级大学生的教学用书，也可供从事无线电物理、电磁场理论、天线、电磁散射和电波传播等方面的教学、科研和工程技术人员参考。

本书在编写和出版过程中，得到国家教委高校工科电磁场课程教学指导小组、高等教育出版社、成都电讯工程学院出版社、电子科技大学电磁场工程系等单位的有关领导和同志们的大力支持与帮助，使本书得以尽快出版，作者谨在此表示衷心的感谢。由于作者水平有限，书中错误之处在所难免，恳望读者不吝指正。

阮颖铮

1988年10月于成都

目 录

第一章 射线理论的数学基础

§1.1 三维欧氏空间中的曲线	(1)
1.1.1 曲线及其参量	(1)
1.1.2 曲线基坐标系	(5)
§1.2 三维欧氏空间中的曲面	(6)
1.2.1 曲面及其参量	(6)
1.2.2 曲面的曲率矩阵	(10)
1.2.3 二元函数的极值	(14)
§1.3 复变函数	(16)
1.3.1 解析函数	(16)
1.3.2 复变函数的积分	(19)
1.3.3 复变函数的奇点	(20)
1.3.4 解析延拓的概念	(22)
§1.4 积分的渐近计算	(23)
1.4.1 无限积分的渐近计算	(23)
1.4.2 变换多项式 $r(s)$ 的选择	(26)
1.4.3 有限端点的积分	(28)
1.4.4 鞍点和最陡下降路径	(31)
§1.5 单鞍点最陡下降法	(32)
1.5.1 一阶孤立鞍点的最低阶近似	(35)
1.5.2 一阶鞍点的完整渐近展开	(38)
1.5.3 高阶鞍点的一阶渐近近似	(41)
§1.6 变形最陡下降法	(42)
1.6.1 一阶鞍点靠近一阶极点	(42)
1.6.2 一阶鞍点靠近高阶极点	(45)
1.6.3 一阶鞍点靠近支点	(47)
1.6.4 两个相邻的一阶鞍点	(47)
1.6.5 三个相邻的一阶鞍点	(48)
1.6.6 一阶鞍点靠近积分端点	(48)

1.6.7 绕过支点的积分.....	(49)
--------------------	------

第二章 电磁射线理论的物理基础

§2.1 引言.....	(52)
§2.2 理想媒质中的波动方程.....	(54)
§2.3 理想媒质中的均匀平面波.....	(58)
§2.4 损耗媒质中的均匀平面波.....	(61)
§2.5 均匀平面谐波在平界面上的反射和折射.....	(65)
2.5.1 反射定律和折射定律.....	(65)
2.5.2 布鲁斯特角.....	(69)
2.5.3 全反射和临界角.....	(70)
2.5.4 反射系数.....	(72)
2.5.5 阻抗概念.....	(76)
2.5.6 能量关系.....	(79)
2.5.7 里昂托维奇边界条件.....	(80)
§2.6 柱面波和球面波.....	(82)
§2.7 局部不均匀平面波.....	(83)
§2.8 瞬变电磁波.....	(86)

第三章 几何光学理论

§3.1 引言.....	(90)
§3.2 从波动光学过渡到几何光学.....	(91)
§3.3 几何光学基本原理.....	(95)
3.3.1 费马原理.....	(95)
3.3.2 反射定律和折射定律.....	(96)
3.3.3 几何光学强度定律.....	(99)
§3.4 高频场的射线光学结构.....	(100)
3.4.1 程函方程和输运方程.....	(100)
3.4.2 射线轨迹.....	(102)
3.4.3 相位函数.....	(107)
3.4.4 振幅变化.....	(109)
3.4.5 标量场的射线光学表达式.....	(113)
§3.5 电磁场的射线光学结构.....	(114)
§3.6 曲面的反射.....	(118)

3.6.1 反射射线的追踪.....	(119)
3.6.2 反射场的计算.....	(125)

第四章 几何绕射理论

§4.1 引言.....	(131)
§4.2 绕射射线和绕射系数.....	(132)
§4.3 边缘的绕射.....	(136)
4.3.1 边缘绕射射线的追踪.....	(137)
4.3.2 直边缘绕射场的计算.....	(140)
4.3.3 一致性绕射理论.....	(143)
4.3.4 曲边缘绕射场的计算.....	(146)
4.3.5 等效电流源法.....	(147)
4.3.6 边缘绕射小结.....	(149)
§4.4 尖顶的绕射.....	(149)
§4.5 曲面的绕射.....	(150)
4.5.1 表面绕射射线的追踪.....	(151)
4.5.2 表面绕射场的计算.....	(153)

第五章 复射线理论

§5.1 引言.....	(159)
§5.2 复源点和复射线.....	(161)
5.2.1 复源点及其场量表达式.....	(161)
5.2.2 复源点场的属性.....	(164)
5.2.3 复源点场的参量.....	(170)
§5.3 复射线追踪法.....	(172)
5.3.1 实射线在圆柱界面上的反射和折射.....	(172)
5.3.2 复射线在圆柱界面上的反射和折射.....	(178)
5.3.3 一般情况下的复射线追踪.....	(180)
§5.4 复射线近轴近似法.....	(181)
5.4.1 近轴场的近似计算.....	(182)
5.4.2 轴向场的近似计算.....	(187)
§5.5 复射线追踪和近轴近似的比较.....	(189)

第一章 射线理论的数学基础

在电磁射线理论中, 需要涉及一些基本的数学知识。如在讨论射线轨迹和边缘绕射时, 要了解空间曲线的知识; 在讨论波前或界面性质时, 要知道空间曲面的特性; 在进行场强计算时, 要用到复变函数、积分的近似计算和某些特殊函数的知识。本章就微分几何、复变函数和积分的近似计算等问题作一简要介绍, 对这些问题的进一步讨论, 读者可参阅有关数学参考书。

§1.1 三维欧氏空间中的曲线

在物理学中, 常用空间曲线来表示质点运动的轨迹; 在射线电磁学中, 则用曲线来表示光线或电磁射线在空间的传播路径, 或用来描述产生电磁绕射的边缘。因此有必要先了解一些有关空间曲线的基本概念。

1.1.1 曲线及其参量

在笛卡尔直角坐标系中一条光滑曲线 C , 可用参数方程表示为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t); t_1 < t < t_2 \quad (1.1)$$

式中 x 、 y 和 z 均为参数 t 的连续可微函数, 并在 t 轴的区间 (t_1, t_2) 内有定义, t_1 、 t_2 可分别为 $-\infty$ 或 $+\infty$ 。式(1.1)可写成矢量形式

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t), y(t), z(t)), t_1 < t < t_2 \quad (1.2)$$

曲线上参量为 t 的点 P 称为 $\mathbf{r}(t)$, 或简称为 $P(t)$ 点, 或 t 点。曲线的正方向规定为参数增加的方向(见图1.1), 并称矢量

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (1.3)$$

为曲线在 t 处的切向矢量。如果在 $t=t_0$ 处, $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, 则称 t_0 点为曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的正则点, 否则就称为奇点。曲线 C 上所有点都是正则点时, 称该曲线为正则曲线。本书中讨论的曲线总是指正则曲线。

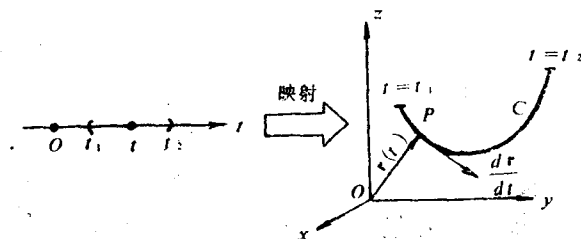


图 1.1 三维空间中的曲线

对于正则曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 积分

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (1.4)$$

称为曲线从参数 t_0 到 t 处的弧长, 其中 $|\mathbf{r}'(t)|$ 为切向矢量 $\mathbf{r}'(t)$ 的模

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \quad (1.5)$$

显然, 弧长 s 是参数 t 的可微函数, 且

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| \quad (1.6)$$

对于正则曲线, $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, 所以 $s'(t) > 0$ 。因此, 我们也可取弧长 s 作为新的参量, 于是式(1.2)可写为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(s), y(s), z(s)), \quad s_1 < s < s_2 \quad (1.7)$$

由式(1.6)可知, $ds/ds = 1 = |d\mathbf{r}(s)/ds|$, 这表明以弧长为参数时, 曲线的切向矢量就是单位切向矢量 $\mathbf{t}(s)$

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{r}'(s) \quad (1.8)$$

我们定义另一个参数

$$K = |\boldsymbol{\nu}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad (1.9)$$

为曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在 s 点的曲率, 当 $K \neq 0$ 时, 其倒数 $\rho = 1/K$ 称为曲线在 s 点的曲率半径。由式(1.9)可知, K 等于曲线上各点的单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 对弧长 s 的变化率的模。因为单位矢的模恒等于 1, 故 K 表示了切向矢量的方向对弧长的变化率, 即反映了曲线的弯曲程度。对于一条空间直线, 由于 $\boldsymbol{\nu}$ 的大小和方向都没有变化, $\boldsymbol{\nu}'(s) \equiv 0$, 故直线的曲率恒等于零。

对于单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$, 我们有 $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$, 两边对 s 求导, 就得到 $\boldsymbol{\nu}'(s) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, 这表明单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 和它的导数矢量 $\boldsymbol{\nu}'(s) = \mathbf{r}''(s)$ 是正交的。当 $\mathbf{r}''(s) \neq 0$ 时, 我们定义 $\boldsymbol{\nu}'(s) = \mathbf{r}''(s)$ 方向上的单位矢量 $\hat{n}$ 为曲线在 s 处的主法向矢量

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|} = \frac{1}{K} \mathbf{r}''(s) = \frac{1}{K} \boldsymbol{\nu}'(s) \quad (1.10)$$

上式表明主法向矢量 $\hat{n}$ 平行单位切向矢量的导数矢量 $\boldsymbol{\nu}'(s)$ 。通过点 $\mathbf{r}(s)$, 由单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 与主法向矢量 $\hat{n}$ 所张的平面, 称为点 s 处的密切平面。单位矢量

$$\hat{\delta} = \boldsymbol{\nu} \times \hat{n} \quad (1.11)$$

称为曲线在 s 处的副法向矢量, 它正交于密切平面。式(1.11)表明单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 、主法向矢量 $\hat{n}$ 和副法向矢量 $\hat{\delta}$ 三者互相垂直。通过点 s 由单位切向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 与副法向矢量 $\hat{\delta}$ 所张成的平面, 称为 s 处的从切平面, 通过点 s 由主、副法向矢量 $\hat{n}$ 和 $\hat{\delta}$ 所张成的平面, 称为处的法平面(见图2.1)。

由式(1.11)有 $\hat{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, 两边对 s 求导可得

$$\hat{\delta}'(s) \cdot \boldsymbol{\nu} = -\hat{\delta} \cdot \boldsymbol{\nu}'(s) = -K \hat{\delta} \cdot \hat{n} = 0$$

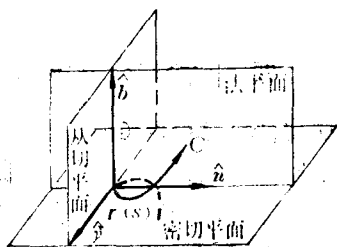


图 1.2 空间曲线的切向矢量和法向矢量

上式表明 $b'(s)$ 与 b 正交，又因为 $b \cdot b = 1$ ，两边求导后，可得 $b'(s) \cdot b = 0$ ，所以 $b'(s)$ 也与 b 正交。这样，矢量 $b'(s)$ 必然平行于主法向矢量 n 。对于 $r''(s) \neq 0$ 的空间曲线，我们定义由

$$b'(s) = -\tau n \quad (1.12)$$

所确定的函数 $\tau(s)$ 为曲线在 s 处的挠率。上式两端分别点乘以 n ，可得挠率为

$$\tau = -b'(s) \cdot n \quad (1.13)$$

因为 n 为单位矢量，故有

$$|\tau| = |b'(s)| \quad (1.14)$$

由上式可知，挠率表示了副法向矢量（亦即密切平面）的方向对弧长的变化率。显然，对于平面上的一条曲线，由于密切平面就是该曲线所在平面，因而曲线上各点的副法向矢量互相平行， $b'(s) \equiv 0$ ，故平面曲线的挠率恒等于零。

因为 $b \cdot n = 0$ ，两边对 s 求导，可得 $-b'(s) \cdot n = n'(s) \cdot b$ ，于是由式 (1.13)、(1.10) 和 (1.11) 可得

$$\tau = \frac{r'(s) \cdot r''(s) \times r'''(s)}{K^2} = \frac{r'(s) \cdot r''(s) \times r'''(s)}{|r''(s)|^2} \quad (1.15)$$

当曲线以任意变量 t 为参数时，利用 $r'(s) = r'(t)dt/ds$ 及其导

数的式子, 可得曲率和挠率的计算公式

$$K(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \quad (1.16)$$

$$\tau(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2} \quad (1.17)$$

1.1.2 曲线基坐标系

由以上讨论可知, 曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的每一点 s 处, 都有三个互相正交的单位矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 、 $\hat{n}$ 和 $\hat{b}$, 它们满足由式 (1.11) 所确定的右旋关系。

我们把 $\{\mathbf{r}; \boldsymbol{\nu}, \hat{n}, \hat{b}\}$ 称为曲线在 s 处的弗朗内(Frenet)标架, 它是单位正交的右旋标架, 所以可用它来作新的直角坐标系的标架, 并用这个新的直角坐标系来研究空间曲线的性质。因为这个坐标系是以一条空间曲线为基础的, 三个坐标的单位矢量沿曲线各点不断改变方向, 因此称这个坐标系为曲线基坐标系。如果该曲线代表一条电磁射线的轨迹, 对由射线上各点的 $\boldsymbol{\nu}$ 、 $\hat{n}$ 和 $\hat{b}$ 就构成了射线基坐标系。

由于曲线上各点都有各自的弗朗内标架, 因而有必要研究在两个邻近点 s 和 $s + \Delta s$ 处两套标架之间的关系。当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时, 这就等于是研究坐标系单位矢量沿弧长的变化率 $\boldsymbol{\nu}'(s)$ 、 $\hat{n}'(s)$ 和 $\hat{b}'(s)$ 。

由式 (1.10) 和 (1.12) 可知,

$$\boldsymbol{\nu}'(s) = K \hat{n} \quad \text{和} \quad \hat{b}'(s) = -\tau \hat{n}$$

又由式 (1.11) 知 $\hat{n} = \hat{b} \times \boldsymbol{\nu}$, 对其两边求导可得

$$\hat{n}'(s) = \hat{b}'(s) \times \boldsymbol{\nu} + \hat{b} \times \boldsymbol{\nu}'(s)$$

$$= -\tau \hat{n} \times \boldsymbol{\nu} + \hat{b} \times K \hat{n} = \tau \hat{b} - K \boldsymbol{\nu}$$

于是, 弗朗内标架中三个单位矢量的导数矢量可写为

$$\begin{cases} \vartheta'(s) = K \hat{n} \\ \hat{n}'(s) = -K \vartheta + \tau \delta \\ \delta'(s) = -\tau \hat{n} \end{cases} \quad (1.18)$$

式(1.18)称为曲线论的基本公式(弗朗内公式)。当曲线 C 的曲率 K 和挠率 τ 已知时,邻近点之间弗朗内标架的变化情况就知道了。可见研究曲线在一点近邻的几何性质时,弗朗内标架是一个十分有用的工具。在很多地方,我们都会用到这种“活动坐标架”的方法。

关于曲线论的基本定理和曲线整体性质的进一步讨论,读者可参考一般的微分几何书籍^[1]。

§ 1.2 三维欧氏空间中的曲线

1.2.1 曲面及其参量

在射线电磁学中,曲面可以表示波的等相位面(波前)或散射体的表面。根据空间解析几何可知,在笛卡尔坐标系中的一个光滑曲面 S 可用参数方程表示为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (1.19)$$

式中 x 、 y 和 z 均为参数 u 、 v 的可微函数,它们在 (u, v) 平面上的域 D 内有定义(见图1.3)。式(1.19)也可改写成矢量形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (1.20)$$

设 $P_0(u_0, v_0)$ 是曲面 S 上的任意一点。如在式(1.20)中令 $v = v_0$ 而改变 u ,则可得到曲面 S 上过 P_0 点的一条曲线

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$$

称为过 P_0 点的 u 坐标曲线(简称 u 曲线)。同样,令 $u = u_0$ 而改变 v ,则可得到过 P_0 点的 v 曲线

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$$

因此,由曲面上每一点的 u 曲线和 v 曲线构成一个参数曲线网(图1.4)。

过 P_0 点的 u 曲线和 v 曲线在该点的切向矢量分别为

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

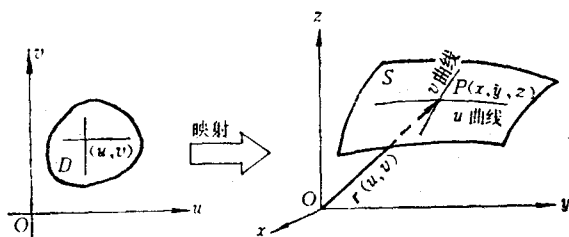


图 1.3 三维空间中的曲面

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

如果这两个切向矢量彼此独立，即 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \neq 0$ ，就称 P_0 点为曲面 S 上的一个正则点，否则称为奇点。由正则点构成的曲面 S 称为正则曲面。因此，对于正则曲面上的任意点 $P(u, v)$ ，我们有

本书中讨论的曲面都是正则曲面。

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \neq 0 \quad (1.21)$$

在曲面 S 上的任意曲线 C ，可用 § 1.1 中的曲线参数方程表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$$

在参数 t_0 所对应的点 $P_0(u_0, v_0)$ 处，曲线 C 的切向矢量是

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=t_0} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right)_{t=t_0} \\ &= \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=t_0} + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) \left(\frac{dv}{dt} \right)_{t=t_0} \end{aligned} \quad (1.22)$$

上式表明，过 P_0 点的任意曲线的切向矢量，都可用 P_0 点的两条坐标曲线的切向矢量 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ 与 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 来线性表示（见图 1.5）。这就意味着，曲面上过 P_0 点的所有曲线的切向矢量所构成的一个二维线性空间，称为曲面 S 在 P_0 点处的切平面，即两条坐标曲线的切向

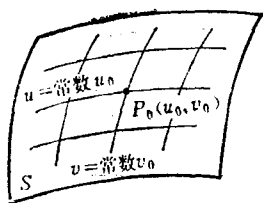


图 1.4 曲线上的参数曲线网

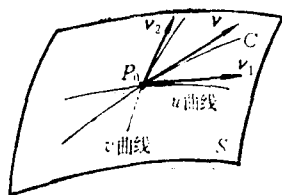
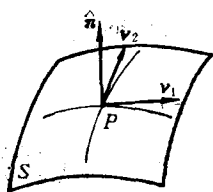


图 1.5 曲线上的切向矢量和切平面

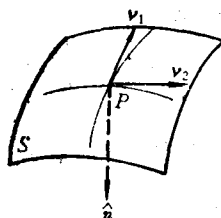
矢量 $\mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$ 和 $\mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$ 所张成的平面。在图 1.5 中分别用 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 表示两条坐标曲线的切向矢量, 用 $\mathbf{v}$ 表示任意曲线的 C 的切向矢量。

与曲面上任意点 P 处的切平面相垂直的方向称为曲面的法方向, 通过该点平行于法方向的直线称为曲面在该点的法线。因为曲面是正则的, 所以面曲上任意点 $P(u, v)$ 处的法线方向与 $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ 平行, 因此 $\pm \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ 都可取为法线方向。为确定起见, 我们规定把 $+\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ 方向作为法线方向的曲面, 称为正向曲面, 相反则称为反向曲面 (见图 1.6)。这样, 对于光滑曲面上的任何点, 都只有唯一的一条面法线。对正向曲面 S , 它的单位法向矢量 $\hat{n}$ 为

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} \quad (1-23)$$



(a) 正向曲面



(b) 反向曲面

图 1.6 正向曲面和反向曲面

与 §1.1 中空间曲线的情况相仿, 由两个线性独立的坐标曲线切向矢量 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}'_u$ 和 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{r}'_v$ 及法向矢量 $\hat{n}$, 三者结合起来可构成曲面

上一点的右旋坐标架(见图 1.6(a)), 在整个正则曲面 S 上就建立起一个和参数 u 、 v 有关的活动坐标系。

包含 P 点面法线的所有平面都称为曲面在该点的法平面, 法平面与曲面 S 相交的曲线 C 称为该点的法截线, 因有无限多个法平面, 故对应着无限多条法截线。法截线是平面曲线, 其挠率为零, 因而可以只用曲率半径 ρ 来描述。如果曲面上一点处沿所有方向的法截线都有相等的曲率半径, 则该点称为脐点。例如球面上所有的点, 以及某些旋转曲面的顶点等都是脐点。如果各条法截线的曲率半径不相等, 则其中必有一个最大的和一个最小的曲率半径 ρ_1 和 ρ_2 , 它们被称为曲面在该点的主曲率半径, 对应的法截线称为主法截线 C_1 和 C_2 。主法截线 C_1 和 C_2 在 P 点的切线方向称为曲面 S 在 P 点的主方向, 主方向的单位矢量记为 a_1 和 a_2 , 包含 C_1 和 C_2 的法平面则称为主平面。可以证明, 除脐点以外, 曲面上各点的两个主平面或两个主方向是正交的(见图 1.7)。如果曲面 S 上的一条曲线 C 在各点的切线方向都是主方向, 则该曲线称为曲率线。在整个曲面上可以得到两族这样的曲率线, 它们构成一个正交的曲线网, 称为曲率线网。

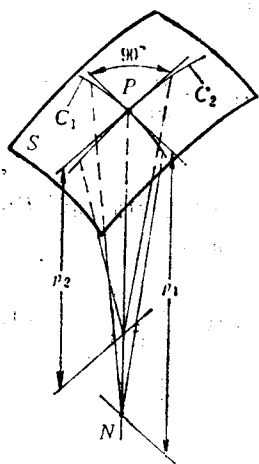


图 1.7 曲面上一点的主曲率半径和主方向

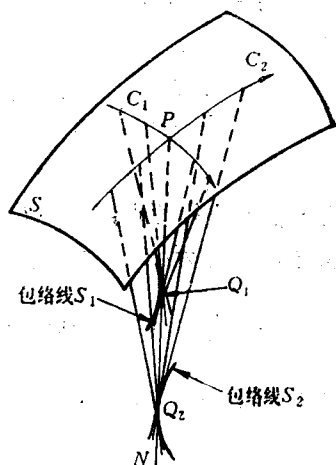


图 1.8 焦曲线

显然, 曲率线上各点的曲率半径都是曲面的主曲率半径, 这些曲率半径端点(称为曲率中心)的轨迹称为渐屈线或法包线, 即是法线的包络线, 因为各曲率半径都和法包线相切。在图 1.8 中, 设 C_1 是曲面 S 上过 P 点的一条曲率线, 它在 P 点处的曲率半径为 ρ_1 , 则在 P 附近沿 C_1 的各点处的曲率半径端点均在包络线 S_1 上。同样, 若 C_2 是通过 P 点的另一条曲率线, 在 P 点处曲率半径为 ρ_2 , 则在 P 附近、沿 C_2 各点的曲率半径端点都在包络线 S_2 上。 S_1 和 S_2 称为焦曲线或焦散线, 曲率线网的所有焦曲线的总和可以构成两个曲面, 称为焦曲面或焦散面。在特殊情况下, 这两个焦曲面可变为一个曲面、一条曲线或一个点。

1.2.2 曲面的曲率矩阵

假设曲面 S 上任意点 P 的法线为 z 轴, 过 P 点的两条正交曲线的切线方向分别为 v_1 和 v_2 , 则由 v_1, v_2 和 z 构成一个局部的直角坐标系(见图 1.9), 此时曲面可以表示为一个二元函数方程 $z = f(v_1, v_2)$ 。在坐标原点 $P(0, 0, 0)$ 的附近, 曲面 S 上的任意点 $Q(v_1, v_2, z)$ 可用上述函数的台劳级数展开式来描述

$$z = f(P) + \left. \frac{\partial f}{\partial v_1} \right|_P v_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial v_2} \right|_P v_2 + \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_1^2} \right|_P v_1^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_P v_1 v_2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} \right|_P v_2^2 \right\} + \dots \quad (1.24)$$

因为 P 点是坐标原点, 故 $f(P) = 0$; 又因为 v_1 和 v_2 为曲面过 P 点的切线方向, 故 $\partial f / \partial v_1|_P = \partial f / \partial v_2|_P = 0$; 如果再令

$$Q_{11} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_1^2} \right|_P, \quad Q_{12} = Q_{21} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_1 \partial v_2} \right|_P, \quad Q_{22} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial v_2^2} \right|_P \quad (1.25)$$

则在 P 点附近, 式 (1.24) 可近似简化 (忽略高阶项) 为

$$z = \frac{1}{2} (Q_{11} v_1^2 + 2 Q_{12} v_1 v_2 + Q_{22} v_2^2) \quad (1.26)$$