高等学校教学用书

微积分学讲义

第③册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚　蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

微积分学讲义

第三册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚
蒋　铎　李有兰　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

微积分学讲义

第三册

邝荣雨　薛宗慈　陈平尚
蒋　铎　李有兰　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：10.75　字数：266 千
1990 年 3 月第 1 版　　1990 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—2 500

ISBN 7-303-00844-6/O·115
定价：2.75 元

内 容 提 要

本书分四册．第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分的理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算．这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书．最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考．

本书是作者在总结最近几年在北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的．作者将现行的数学分析课程的内容分为两个阶段（首先侧重于概念、计算，进而侧重于理论、方法）进行讲授，教学效果达到预期的目的．

本册分三章：欧氏空间、多元函数微分学、多元函数积分学．

目　　录

—9—

欧 氏 空 间

§1 R^n 与 映 射

1.1 映射(函数)

我们即将展开对多元微积分的研究．因此有必要把已经学过的有关 R^n 与映射的知识、术语与记号统一进行归纳和总结．

设 X、Y 是两个集合，若存在一个法则 f，对每个 $x\in X$，有唯一的 $y\in Y$ 与它对应，则称 f 是 X 到 Y 的**映射(函数、变换、算子)**，记作

$$f:\ X\to Y,\ x\longmapsto y \text{ 或 } X\xrightarrow{f}Y \text{ 或 } x\overset{f}{\longmapsto}y.$$

称 y 为 x 的**象**，记作 $y=f(x)$，也称它为**因变量**或**函数值**；称 x 为 y 的**原象**，也称它为**自变量**．称 X 为 f 的**定义域**，称集合 $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 为 f 的**值域**，也称为 X 的**象**．取 $Y_1\subset Y$，称集合 $f^{-1}(Y_1)=\{x\in X\,|\,f(x)\in Y_1\}$ 为 Y_1 的**原象**．当函数值是(实或复)数时，常称映射为**泛函**．

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 与 $X\xrightarrow{g}Y$ 是两个映射，若 $\forall x\in X$，$f(x)=g(x)$，则称 f 与 g **相等**，记作 $f=g$．

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个映射，$A\subset X$，若存在映射 $A\xrightarrow{\varphi}Y$，对 $\forall x\in A$，$\varphi(x)=f(x)$，则称 φ 是 f 在 A 上的**限制**，记作 $\varphi=f|_A$，称 f 是 φ 在 X 上的**扩张(延拓)**．

设 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个映射，若 $f(X)=Y$，则称 f 是**满射**．

若 $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是**单射**(**单叶映射**)．

若 f 既是满射，又是单射，则称 f 是**双射**(**1-1 映射**或**满单射**)．

几个常用的映射．

常值映射：f：$X \to Y$，$x \longmapsto c$．(其中 c 是 Y 中一个固定元素)

恒等映射：j_X：$X \to X$，$x \longmapsto x$．

投影映射：p_1：$X \times Y \to X$，$(x, y) \longmapsto x$ 叫做**第一坐标投影**(映射)．

p_2：$X \times Y \to Y$，$(x, y) \longmapsto y$ 叫做**第二坐标投影**(映射)．

设 $X \xrightarrow{g} Y$ 与 $Y \xrightarrow{f} Z$ 是两个映射，那么对每个 $x \in X$，按照法则 g，有唯一的 $y = g(x) \in Y$ 与它对应，再按照法则 f，有唯一的 $z = f(y) \in Z$ 与它对应，这样对每个 $x \in X$，有唯一的 $z \in Z$ 与它对应，我们把这个法则叫做 g 与 f 的**复合映射**(**合成映射**)，记作

$$f \circ g: X \to Z, \quad x \longmapsto z = f[g(x)] = f \circ g(x)$$

若有 $X \xrightarrow{g} Y$，$Y \xrightarrow{f} Z$，$Z \xrightarrow{h} W$，易证

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$$

即映射的复合运算满足结合律，但不满足交换律，即一般来说

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

设 $X \xrightarrow{f} Y$ 是一个映射，若存在映射 $Y \xrightarrow{g} X$，使得 $f \circ g = j_Y$ 且 $g \circ f = j_X$，则称 g 是 f 的**逆映射**(**逆射**)．

由定义易知，若映射 $X \xrightarrow{f} Y$ 存在逆映射，则此逆映射由 f 唯一确定，因此可以把它记作 f^{-1}．

【性质 1.1】 f：$X \to Y$ 存在逆射 $\Longleftrightarrow$ f 是双射．

请读者自行证之，或参看有关书籍．

由此看出，若 $X \xrightarrow{f} Y$ 存在逆射 f^{-1}，则 f^{-1} 也是双射，且 $(f^{-1})^{-1}=f$。

【例 1】 积分运算 $\int_a^b f(x)dx$ 是可积函数族 $\mathscr{R}[a, b]$ 到实数域 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射(泛函)，记作

$$\int_a^b: \mathscr{R}[a, b] \to \boldsymbol{R}, \ f \longmapsto \int_a^b f(x)dx.$$

并称为**积分算子**.

【例 2】 微分运算 $\frac{d}{dx}f(x)$ 是可微函数族 $\mathscr{D}(a, b)$ 到函数族 $\mathscr{F}(a, b)$ 的一个映射，记作

$$\frac{d}{dx}: \mathscr{D}(a, b) \to \mathscr{F}(a, b), \ f \longmapsto f',$$

并称为(**一阶**)**微分算子**. 常记作 $D=\frac{d}{dx}$.

【例 3】 加法运算 $a+b$ 是卡氏积 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射，记作

$$+: \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \ (a, b) \longmapsto a+b.$$

【例 4】 乘法运算 $a\cdot b$ 是卡氏积 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射，记作

$$\bullet: \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \ (a, b) \longmapsto a\cdot b.$$

一般来说，我们把映射 $X\times X \xrightarrow{\varphi} X$ 叫做 X 的一个**代数运算**.

通俗地说，每架收音机就是一个算子 $f \xrightarrow{F} \hat{f}$，它把电磁信号 f 转变为音频信号 $\hat{f}$. 另外，我们身上的每个感官，也可看成是具有自己定义域与值域的算子(转换器).

下面介绍一些特殊而重要的映射.

在高等代数中，我们学过一类重要的映射，就是**线性映射**，即满足条件

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2),\quad x_1、x_2 \in \boldsymbol{X},\quad \alpha_1、\alpha_2 \in F$$

的映射 L：$X \to Y$，其中 X、Y 是数域 F 上的向量空间。当 Y 是(实或复)数域时，常称 L 为**线性泛函**。

【例 5】 由微积分性质易知，积分算子是线性泛函，(一阶)微分算子是线性算子。

【例 6】 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^n,$$

令

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$$

则 $\mathbf{L}$：$\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 是一个线性映射。

【例 7】 在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中，设 $\mathbf{L}$ 是将 $\boldsymbol{R}^2$ 的每个向量旋转角 θ 的一个映射，则 $\mathbf{L}$：$\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 是线性映射，称为旋转变换。

我们把定义域为自然数集 $\boldsymbol{N}$，值域在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的映射叫做 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**点列**，记作 $\{\mathbf{x}_k\}$，$k = 1, 2, \cdots$.

我们把定义域与值域都在有限维欧氏空间中的映射叫做**函数**或**变换**，即 $\mathbf{f}$：$\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$.

当 $n = 1$ 时，称 f 为**单元函数**；当 $n > 1$ 时，称 f 为**多元函数**.

当 $m = 1$ 时，称 f 为**数值函数**；当 $m > 1$ 时，称 $\mathbf{f}$ 为**向量值函数**.

如果设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$，$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \boldsymbol{R}^m$，令

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_m(\mathbf{x})) \in \boldsymbol{R}^m$$

其中 $f_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 $\mathbf{f}$ 的标量函数。那么 $\mathbf{f}$ 即可写成向量形式，也可写成数量形式，即

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

有时要把 n 元函数 $\mathbf{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成 k 元（$k<n$）函数，这就是任意固定 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中某 $n-k$ 个变量，把 $\mathbf{f}$ 看成其它 k 个变量的函数. 例如固定 x_i，则 $\mathbf{f}$ 就是 $n-1$ 元函数，此时记作 $\mathbf{f}(x_1, \cdots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. 又如有三元函数 $\mathbf{f}(x, y, z)$. 若固定 x，则得到（y 与 z 的）二元函数 $\mathbf{f}(\cdot, y, z)$；若固定 x, y，则得到（z 的）一元函数 $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, z)$.

我们把 n 元线性向量值函数 $\mathbf{L}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 仍叫做**线性变换**.

由高等代数知道，当取定 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 的基以后，线性变换 $\mathbf{L}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 的一般表达式是

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

或简记作

$$(y_j) = (a_{ij})(x_i)$$

或写成

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}.$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 叫做 $\mathbf{L}$ 关于 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 给定基的矩阵，简称为**$\mathbf{L}$ 的矩阵**. $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一向量 $\mathbf{x}$ 在给定基下的坐标，$y_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中向量 $\mathbf{y}$ 在给定基下的坐标.

由高等代数还知道，取定 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^m$ 的基以后，全体线性变换 $\mathbf{L}$: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 组成的集合与全体 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 组成的集合是同构的. 这样我们就可以把线性变换之间的运算转化为矩阵之间的运算. 形象地说，线性变换 $\mathbf{L}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 扮演着它的函数表达式的角色，在这个意义上我们甚至可认为 $\boldsymbol{A}$ 就是 $\mathbf{L}$.

当 $m=1$ 时，L 的矩阵是 $1 \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 此时线性变换(线性泛函) L 的一般表达式是

$$L(\mathbf{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

下面简单介绍一些线性变换或矩阵的范数概念.

设 $\mathbf{L}$: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 是线性变换，$\boldsymbol{A}$ 是它的矩阵，称

$$\|\mathbf{L}\| = \|\boldsymbol{A}\| = \sup_{|\mathbf{x}|=1}\{|\mathbf{L}(\mathbf{x})|\} = \sup_{|\mathbf{x}|=1}\{|\boldsymbol{A}\mathbf{x}|\}$$

为线性变换 $\mathbf{L}$ 或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**范数**，它好象是 $\mathbf{L}$ 或 $\boldsymbol{A}$ “大小”的一种度量.

【性质 1.2】

1° $|\mathbf{L}(\mathbf{x})| \leqslant \|\mathbf{L}\| |\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

2° $|a_{ij}| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \leqslant \left[\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

【证明】 我们仅证 1°，读者自证 2°.

当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 时，1° 显然成立；当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时，令 $c=\dfrac{1}{|\mathbf{x}|}>0$，有 $|c\mathbf{x}|=1$，所以

$$|\mathbf{L}(c\mathbf{x})| \leqslant \sup_{|c\mathbf{x}|=1}\{|\mathbf{L}(c\mathbf{x})|\} = \|\mathbf{L}\|.$$

故

$$|\mathbf{L}(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}||\mathbf{L}(c\mathbf{x})| \leqslant \|\mathbf{L}\||\mathbf{x}|. \qquad \square$$

由矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 概念可以引进矩阵函数概念，即若每个 $a_{ij}(\mathbf{x})$ 是 n 元数值函数，则

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{mn}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

称为$m\times n$ **矩阵函数**．由此可引进矩阵函数连续的概念，即若

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\|\boldsymbol{A}(\mathbf{x})-\boldsymbol{A}(\mathbf{x}_0)\|=0$$

则称矩阵函数 $\boldsymbol{A}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ **连续**．利用性质 1.2 之 2° 可以证明：

$\boldsymbol{A}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 连续 $\Longleftrightarrow a_{ij}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x}_0$ 连续 $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$

1.2 R^n 空间

由高等代数知道，$\boldsymbol{R}^n$ 不仅具有“代数结构”，即它是实数域上的向量空间，而且具有“几何结构”，即它是具有内积的向量空间，这种空间在分析学中叫做**(实)内积空间**．$\boldsymbol{R}^n$ 中任何两个向量 $\mathbf{x}=(x_i)$，$\mathbf{y}=(y_i)$ 的内积，记作

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

叫做 **Euclid 内积**．在分析学中，我们把具有 Euclid 内积的有限维实内积空间 $\boldsymbol{R}^n$ 叫做 ***n* 维欧几里德空间**，简称**欧氏空间**，其中元素叫做**点**或**向量**．取定它的标准正交基

$$\mathbf{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是 $\boldsymbol{R}^n$ 中任一向量 $\mathbf{x}=(x_i)$ 可唯一地写成

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{e}_i$$

且

$$x_i=\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i.$$

由内积可引进范数(长度)概念．在一般的内积空间V中，我们称范数

$$\|\xi\|=\sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$$

是由内积导出的范数．在 $\boldsymbol{R}^n$ 中，称实数

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

为 $\mathbf{x}$ 的 **Euclid 范数 (Euclid 长度)**

由范数可引进距离概念. 在一般的内积空间 V 中, 我们称距离

$$\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$$

是相应于范数的距离. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中,称实数

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的 **Euclid 距离**.

$\boldsymbol{R}^n$ 中最基本的不等式是下面的

【性质 1.3】 设 $\mathbf{x}$、$\mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^n$, 有

1° **Cauchy-Schwavz 不等式**: $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$.

2° **三角形不等式**: $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

请读者自行证之.

下面介绍 $\boldsymbol{R}^n$ 中一些几何概念.

集合 $U(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\}$ 与 $\mathring{U}(\mathbf{a};\delta) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\}$ 分别称为点 $\mathbf{a}$ 的 **δ-球形邻域** (简称 **δ-邻域**)与 **δ-球形空心邻域**. 前者也称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**开球**(简称**球**).

集合 $\overline{U}(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leqslant \delta\}$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**闭球**.

集合 $S(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \delta\}$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**球面**.

集合 $K(\mathbf{a}; \delta) = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid |x_i - a_i| < \delta\}$ 称为点 $\mathbf{a}$ 的 **δ-方形邻域**(也称为以点 $\mathbf{a} = (a_i)$ 为中心, 以 2δ 为边长的 **n 维开方体**).

集合 $\mathring{K}(\mathbf{a}; \delta) = K(\mathbf{a}; \delta)\backslash\{\mathbf{a}\}$ 称为点 $\mathbf{a}$ 的 **δ-方形空心邻域**.

集合 $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ 与 $\bar{I} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 分别称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 **n 维开区间**与 **n 维闭区间**, 其中 (a_i, b_i) 与 $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中的开区间与闭区间.

从 $\boldsymbol{R}$ 中的区间 I 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的连续函数

$$\mathbf{f}: \boldsymbol{R} \supset I \to \boldsymbol{R}^n, \quad t \longmapsto \mathbf{p} = \mathbf{f}(t)$$

(连续概念已在本书第一册中讲过)的值域 $\Gamma = \mathbf{f}(I)$ 叫做 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一条(**参数**)**曲线**，连续函数 $\mathbf{f}$ 叫做曲线 Γ 的(**参数**)**表示**，简称为**参数式**或**参数方程**

设 $I = [\alpha, \beta] \subset \boldsymbol{R}$，若 $\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta)$，则称 $\Gamma = \mathbf{f}([\alpha, \beta])$ 为**封闭曲线**．若 $\mathbf{f}$ 是 $[\alpha, \beta)$ 或 $(\alpha, \beta]$ 上的1-1函数，则称 $\Gamma = \mathbf{f}([\alpha, \beta])$ 为**简单曲线**(即自身不相交的曲线)．当 $\mathbf{f}(\alpha) \neq \mathbf{f}(\beta)$ 时，点 $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\alpha)$ 与 $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\beta)$ 称为 Γ 的**端点**．

例如 $\boldsymbol{R}^2$ 中平面曲线 Γ 的参数表示是

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(t) = (x(t), y(t)) \in \boldsymbol{R}^2, \quad t \in I$$

或

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I$$

$\boldsymbol{R}^2$ 中的简单曲线常称为 **Jordan 曲线**．

若曲线 Γ 的参数表示是

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(t) = t\mathbf{x}_1 + (1 - t)\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \boldsymbol{R}^n, \quad t \in \boldsymbol{R}$$

则称它的值域

$$\mathbf{f}(I) = \{\mathbf{p} \in \boldsymbol{R}^n \mid \mathbf{p} = t\mathbf{x}_1 + (1 - t)\mathbf{x}_2, t \in \boldsymbol{R}\}$$

为 $\boldsymbol{R}^n$ 中连结点 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 的**直线**．请读者写出连结两点的**直线段**．

例如 $\boldsymbol{R}^2$ 中连结两点 $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ 与 $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ 的平面直线参数表示的数量形式是

$$\begin{cases} x = x_2 + t(x_1 - x_2) \\ y = y_2 + t(y_1 - y_2), \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}$$

设 $D \subset \boldsymbol{R}^n$，若连结 D 中任何两点的直线段 $l \subset D$，则称 D 为**凸集**．

设 $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \boldsymbol{R}^n$，$\mathbf{x}_0 \in \boldsymbol{R}^n$，集合

$$P_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\}$$

叫做 $\boldsymbol{R}^n$ 中通过 $\mathbf{x}_0$ 的(**超**)**平面**，$\mathbf{a}$ 叫做它的**法向量**．

$\boldsymbol{R}^2$ 中的超平面是通过 $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0)$ 的直线，方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

$\boldsymbol{R}^3$ 中的超平面是通过 $\mathbf{x}_0=(x_0, y_0, z_0)$ 的平面，方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

由高等代数还知道，通过原点 $\mathbf{0}$ 的超平面 $P_0=\{\mathbf{x}|\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=0\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个 $n-1$ 维子空间。

思　考　题

1.设 $f: X\to Y$, $x\mapsto y=f(x)$ 是映射，问 f, $f(x)$, $f(X)$ 各表示什么？

2.设一元数值函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 处处可导，问 f, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d}{dx}$ 各表示什么？

3.下面式子哪一个对，哪一个错？

$(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$;　　$f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$.

$f\circ g=g\circ f$　　$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

4.如何表示通过 $\boldsymbol{R}^n$ 中两点 $\mathbf{x}_1$ 与 $\mathbf{x}_2$ 的直线段？

练　习　题

9-1　求下列数值函数的自然定义域。

(1) $f(x,y)=\arcsin 2xy$;　　(2) $f(x,y)=\ln[x\ln(y-x)]$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

9-2　给出向量值函数 $f: \boldsymbol{R}^3\supset D\to\boldsymbol{R}^3$, $\mathbf{x}=(x,y,z)\mapsto(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ 如下：

(1) $f_1(x,y,z)=x^3+y^2$, $f_2(x,y,z)=y-z^2$, $f_3(x,y,z)=z^4$;

(2) $f_1(x,y,z)=x^2+y^2$, $f_2(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2}$,

$f_3(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

求它们的自然定义域 D 及值域 $\mathbf{f}(D)$.

9-3　设 $F(x,y)=x+y+f(x-y)$, $F(x,0)=x^2$, 求 $f(x)$ 及 $F(x,y)$.

9-4　画下列二元数值函数的图象。

(1) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; (2) $z=\sqrt{1-x^2}$.

9-5 问下列函数图象有何特点?

(1) $f(x,y)=f(x,-y)$. (2) $f(x,y)=-f(x,-y)$.

(3) $f(x,y)=f(-x,-y)$.

9-6 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中画出下列集合图形.

(1) $D=\{(x,y)|xy\neq 0\}$. (2) $D=\{(x,y)|y\geqslant|x|\}$.

(3) $D=\{(x,y)||x-y|\neq 1\}$. (4) $D=\{(x,y)|x^2=y^2\}$.

9-7 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中画出下列集合图形.

(1) $S=\{(x,y,z)|x+y+z=2\}$.

(2) $S=\{x,y,z)||x|+|y|+|z|=1\}$.

9-8 证明下列各式.(设 $\mathbf{x}=(x_i)\in\boldsymbol{R}^n$, $\mathbf{y}=(y_i)\in\boldsymbol{R}^n$)

(1) $|x_i|\leqslant|\mathbf{x}|\leqslant\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant n|\mathbf{x}|$

(2) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|$ (中线公式)

9-9 (1) 证明: $\boldsymbol{R}^n$ 中超平面 P 可写成 $p=\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n|\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=\alpha,\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\alpha\in\boldsymbol{R}\}$

(2) 求 $\boldsymbol{R}^4$ 中包含四个点: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3+4\mathbf{e}_4$ 的超平面 P.

(3) 求 $\boldsymbol{R}^5$ 中通过点 $\mathbf{x}_0=(5,1,0,1,-1)$ 且以 $\mathbf{a}=(2,-3,2,1,6)$ 为法向量的超平面 P.

9-10 (1) 设 $P=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3|2x+3y-z=0\}$, 求证: P 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的二维子空间, 并求 P 的基.

(2) 设 $p=\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n|\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=0,\mathbf{a}\neq\mathbf{0}\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的超平面, 求证: P 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的 $n-1$ 维子空间, 并求 P 的基.

(3) 一般的超平面 $p=\{\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n|\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=\alpha,\mathbf{a}\neq\mathbf{0},\alpha\in\boldsymbol{R}\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间吗?

9-11 (1) 求线性变换 $\mathbf{L}$: $\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^2$, $\mathbf{x}=(x,y,z)\mapsto\mathbf{L}(\mathbf{x})=(x-y+z,y-2x)$ 的矩阵.

(2) 设矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\0&5\end{pmatrix},$$