

普通高等教育“十二五”规划教材



21世纪学前教育专业规划教材

学前儿童数学教育与活动设计

赵振国 主编

 北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



学前儿童数学教育与活动设计

赵振国 主 编
李 娟 张亚杰 赵华民 副主编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

学前儿童数学教育与活动设计 / 赵振国主编. —北京: 北京大学出版社, 2016. 1
(21 世纪学前教育专业规划教材)

ISBN 978-7-301-20887-8

I. ①学… II. ①赵… III. ①学前儿童—数学教学—高等学校—教材 IV. ①G613.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 212126 号

- 书 名 学前儿童数学教育与活动设计
Xueqian Ertong Shuxue Jiaoyu yu Huodong Sheji
- 著作责任者 赵振国 主编
- 丛书主持 李淑方
- 责任编辑 李淑方 吴卫华
- 标准书号 ISBN 978-7-301-20887-8
- 出版发行 北京大学出版社
- 地 址 北京市海淀区成府路 205 号 100871
- 网 址 <http://www.pup.cn> 新浪微博: @北京大学出版社
- 电子信箱 zyl@pup.pku.edu.cn
- 电 话 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62753056
- 印 刷 者 三河市博文印刷有限公司
- 经 销 者 新华书店
- 787 毫米 × 1092 毫米 16 开本 17.5 印张 420 千字
2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
- 定 价 40.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题, 请与出版部联系, 电话: 010-62756370

前 言

“学前儿童数学能力发展与教育活动设计”是学前教育学科体系中争议较大的课程,从《幼儿园教育指导纲要(试行)》把数学领域并入到科学领域之后,学界就出现了数学教育是否还需要独立的教材的争论。但在本科教材的体系中,数学教育和科学教育一直以来仍然是两个独立的体系。

本教材立足于基础性、前沿性、重点性和实践性特征,以《幼儿园教育指导纲要(试行)》和《3~6岁儿童学习与发展指南》中的基本理念为出发点,强调学前儿童数学教育的教学法的性质,关注理论指导下的实践方法和教育指导策略的应用。本教材在系统论述早期数学教育的基本性质及早期儿童数学学习的基本特点的基础上,从幼儿园数学教育活动的理论和实践两个方面,分别探讨了早期儿童数学能力发展与教育的基本理论、幼儿园数学教育活动设计和组织实施的基本原理,以及幼儿园数学教育中关键性经验内容教育活动的设计与实施策略。教材从教学法的特征出发,分析了幼儿园数学教育活动中所涉及的关键性经验和幼儿在这些关键性经验上的发展序列,基于发展的考察提出幼儿园教育活动的具体设计和实施策略。

本教材共分为10章,主要内容包括早期数学教育的性质和幼儿数学学习的基本特点、早期儿童数学能力发展与教育的基本理论、幼儿园数学教育活动的理论、幼儿园数学教育活动的组织与实施、学前儿童感知集合活动的设计与实施、学前儿童数概念与运算教育活动的设计与实施、学前儿童测量与统计教育活动的设计与实施、学前儿童空间与时间教育活动的设计与实施、整合思想下的学前儿童数学教育实践、学前儿童数学教育的研究与趋势。每章内容前有本章教学目标和内容概要,章后附有本章小结和思考练习题,以利于学生在学习过程中加强对各章内容的理解和把握。

本教材的四位编写人员均是直接从事学前儿童数学认知发展与教育领域的研究和教学工作的一线教师,具有扎实的专业基础和数学教育领域的实践性经验。其中三位老师先后师从于华东师范大学的周欣教授,对学前儿童数学教育的认识和思考一脉相承。他们在教学和研究中与幼儿园的教学联系紧密,对幼儿园的数学教育具有较深入的思考。全书共10章,其中1.2节和1.3节由河南大学的赵华民老师编写;1.1节、2.1节、第3章、4.1节、第6章、第8章由河南大学赵振国博士编写;第4章、第10章由河南大学张亚杰博士编写;2.2节和2.3节、第5章、第7章、第9章由河北大学李娟博士编写。本书的整体架构、纲目拟定和修改及统稿工作由赵振国完成。

本教材的出版是全体编写人员共同努力的结果。我们力图吸收同类教材的优点,弥补相关教材的一些不足,特别是借鉴了华东师范大学黄瑾教授和南京师范大学张俊教授的相关著作,汇集前人的研究成果而形成本教材。但由于能力有限,本教材肯定有需要进一步改进和完善的地方,我们恳请所有使用该教材的师生提出宝贵的意见,这将成为我们继续努力的方向和动力。

对于本教材参考和引用的国内外学者的著作和研究成果,以及一些网络中的资源和案

例,我们在此一并表示感谢。我们还要特别感谢北京大学出版社为本教材提供的出版平台,感谢李淑方老师从策划到成书所付出的努力。感谢北京大学出版社的编辑老师在本教材出版过程中所做出的细致而辛苦的工作。

编 者

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 关于数学的认识	1
1.2 学前儿童数学学习的特点	12
1.3 早期数学教育的性质和任务	16
第 2 章 早期儿童数学能力发展与教育的基本理论	30
2.1 早期儿童数学学习与认知发展	30
2.2 早期儿童数学能力发展理论的主要流派	33
2.3 不同幼儿园课程模式与早期儿童数学教育	41
第 3 章 幼儿园数学教育活动设计基本理论	48
3.1 幼儿园数学教育活动设计的理论基础	48
3.2 幼儿园数学教育活动设计的基本要素和基本过程	57
3.3 不同学习形式的数学教育活动设计	71
3.4 学前儿童数学教育活动设计举例	78
第 4 章 幼儿园数学教育活动的组织与实施	85
4.1 幼儿园数学教育活动组织与实施的有效性	85
4.2 幼儿园数学教育活动组织与实施中的师幼互动	93
4.3 幼儿园数学教育活动的评价与反思	98
4.4 幼儿园数学教育活动的案例与分析	105
第 5 章 学前儿童感知集合活动的设计与实施	119
5.1 学前儿童感知集合的发展及其特点	119
5.2 学前儿童有关分类的数学教育活动的设计与实施	127
5.3 学前儿童集合比较教育活动的设计与实施	136
5.4 学前儿童有关模式的数学教育活动的设计与实施	141
第 6 章 学前儿童数概念与运算教育活动的设计与实施	149
6.1 学前儿童初步数概念和数运算的关键性经验	149

6.2	学前儿童初步数概念和运算能力的发展及其特点	153
6.3	学前儿童数概念及数运算教育活动的设计与实施	160
第7章	学前儿童测量与统计教育活动的设计与实施	178
7.1	学前儿童关于量的关键性经验	178
7.2	学前儿童量的认知能力的发展	182
7.3	学前儿童关于量的概念的教育活动的设计与实施	184
7.4	学前儿童测量与统计教育活动的设计与实施	196
第8章	学前儿童空间与时间教育活动的设计与实施	207
8.1	学前儿童关于空间和时间的关键性经验	207
8.2	学前儿童空间概念和时间概念的形成与发展	213
8.3	学前儿童空间概念教育活动的设计与实施	220
8.4	学前儿童时间概念教育活动的设计与实施	238
第9章	整合思想下的学前儿童数学教育实践	245
9.1	幼儿园数学教育活动整合与渗透的原理	245
9.2	幼儿园数学教育活动的整合与多渠道渗透	248
第10章	学前儿童数学教育的研究及发展趋向	257
10.1	学前儿童数学教育研究中的几个关系	257
10.2	学前儿童数学教育研究的发展趋向	258
	参考文献	267

第1章 绪 论

教学目标

1. 在了解数学产生与发展历史的基础上,掌握数学学科的基本特性及其价值功能。
2. 在理解儿童思维发展规律的基础上,理解和掌握学前儿童数学学习的规律和特点。
3. 了解数学与学前儿童生活的关系,理解学前儿童数学教育的性质、任务和意义。

数学是研究客观世界中事物之间的数量关系和空间关系的科学,数学的产生与发展离不开客观现实世界。作为一门基础性和工具性学科,数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性特征。同时,在人的成长和发展中,在整个人类社会的发展中,数学也发挥着重要的作用,主要体现在数学的应用价值、思维价值、科学价值、文化价值、审美价值和教育价值上。

对于年幼的学前儿童来说,数学不仅是儿童感知和认识外部世界的方式,也是其思维发展的重要途径。幼儿具有独特的思维发展特点,依据其思维发展的规律,幼儿的数学学习也具有自身的特点。早期儿童的数学教育只有遵循幼儿数学学习的这种特点和规律,才能有效地完成儿童的数学启蒙教育,激发儿童对数学的兴趣和探究欲,才能更好地发展其数学思维能力,建立其对初浅数学知识和概念的理解,为其入学打下良好的基础。

本章主要阐述了数学学科的产生、发展及其基本特性,数学的基本价值,学前儿童数学思维发展和数学学习的特点,学前儿童数学教育的任务和意义。

1.1 关于数学的认识

数学作为一门具有独特研究对象的科学,与其他学科一样,具有自身的发生、发展的历史。而对数学发展历史的了解,既有助于我们对数学学科基本特性形成一种清晰的认识,也有助于我们正确理解数学学科在人类生活中的价值功能。

一、数学简史

从数学的起源来看,数学和其他科学知识一样,是人类在自身的发展过程中,在同自然界的博弈和较量的过程中,对具体事物进行经验性的总结和提取的产物。数和数学是人类的伟大发明。数学的诞生,标志着人类的逻辑智慧和抽象能力的发展达到了成熟的水平。^①

“数学”一词源于希腊文。在希腊语中意味着某种“已学会或被理解的东西”或“已获得的知识”,甚至意味着“可获得的东西”“可学会的东西”,即“通过学习可获得的知识”。在中国的《周礼·地官·大司徒》中有:“三曰六艺:礼、乐、射、御、书、数。”“数”就是“数

^① 张慧和. 学前儿童数学教育[M]. 重庆:西南师范大学出版社,2001:2.

学”，这个字在甲骨文中已经出现，“数”字本身也是一个多音多义的字。后来，算学、数学两个词并用的情况一直延续了几百年，直到1939年才统一使用“数学”一词。

数学与其他科学分支一样，是在一定的条件下发生与发展的。数学起源于人类的生活实践，其由具体走向抽象，由感性走向逻辑，由零散走向系统的发展过程具有阶段性，研究者根据一定的原则把数学发展史分成若干时期。目前学术界通常将数学发展划分为四个时期：数学萌芽期（公元前600年以前）；初等数学时期（公元前600年至17世纪中叶）；变量数学时期（17世纪中叶至19世纪20年代）；现代数学时期（19世纪20年代以来）。

在公元前6世纪以前，在早期的一些古代文明社会中已经出现了数学的开端和萌芽。数学的早期萌芽与原始社会的形成紧密相关，原始社会时期人们的各种实践活动和智力的发展促使了数学的发生。在人类与自然的接触以及各种生产和生活实践中，数学的研究对象——空间形式和数量关系必然以某种形式反映到人的头脑中来，于是人类逐渐总结和形成了一些片断的、零散的、感性的，关于客观世界中事物的数量关系和空间关系的认识。最初数目的出现和几何图形的绘制等就是对这些生活经验的简单抽象的结果。人类由“手指记数”“石子记数”“刻痕记数”“结绳记事”等具体的感性经验带来一些简单的运算，形成了一些最原始的计数和运算的方法，标志着“算术”的诞生。在这些原始文明社会中，有些社会只能分辨“1”“2”和“许多”；有些则知道并能够运算大的整数。也有一些能够把数作为抽象概念来认识，并采用特殊的字来代表个别的数，引入了数的记号，如在公元前2000年左右古巴比伦的阿卡德文字中就已经有了整数的写法。在古巴比伦和古埃及文明中，已经有整数和分数的算术，包括进位制记数法，有初步的代数和几何上的一些经验公式。此外，古人也认识到简单的几何概念，如直线、圆和角。

数的概念在中国的起源可以追溯到原始社会，如河姆渡和半坡时期的陶器上均有与数目有关的内容。《易·系辞传》上说：“上古结绳而治，后世圣人易之以书契。”这说明结绳记数和刻划记数是当时普遍的记数方法。在此基础上形成了数目字，半坡出土的陶器上的符号中就包含了数目字。在商甲骨文中已经有了十进制的记数系统。在出土的各种石器和陶器上，也反映出随着原始社会生产的发展，人们逐渐有了平面、球、圆、柱、锥、平行、垂直等许多初级的几何概念。但在原始文明中，数学的应用只限于简单交易、田地面积的计算、陶器上的几何图案、织布上的花格和计时等方面。数学仅是一种工具，形式上是些无联系的简单法则，用于解决人们日常生活中所遇到的问题。因而这个时期的数学是作为与实践直接有关的，从经验中提取出来的许多单个法则的总合而建立起来的。这些法则还没有形成统一的具有逻辑关系的系统，尚未形成真正的抽象思维的数学。数学也并未成为一门独立的学科，人们也未曾对数学本身进行过研究。

希腊人在文明史上首屈一指，在数学史上成就斐然。希腊人创造的文明和文化对世界数学的奠基具有决定作用。在公元前6世纪到17世纪中叶的数学学科初步形成时期中，古希腊和中国的数学家对数学思想的发展具有突出的贡献。这个时期可以称之为初等数学即常量数学时期。由于采用了拼音文字和草片纸张，希腊的文化活动空前繁荣。希腊人对数学本身的一个重大贡献就是有意识地承认并强调：数学上的东西如数和图形是思维的抽象，同实际事物或实际形象是截然不同的。这就决定了数学的性质。毕达哥拉斯(Pythagoras)领导的学派，以“万物皆数”为信条，将数学理论从具体的事物中抽象出来，予数学以特殊独立的地位。希腊数学黄金时期出现了名垂千古的三大几何学家：欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)及阿波洛尼乌斯(Appollonius)。欧几里得总结古典希腊数学，用公理方法

整理几何学,写成13卷《几何原本》(*Elements*)。这部划时代巨著的意义在于它树立了用公理法建立起演绎数学体系的最早典范。不仅确立了欧氏几何的诞生,也为数学发展史树立了第一块伟大的丰碑。

中国的数学经过原始社会和奴隶社会的长期积累,到西汉时期已经有了丰富的内容。早期的数学知识大都是孤立的,虽然墨家学派曾尝试用形式逻辑方法研究数学概念,但未形成体系。到西汉末期,出现了专门的数学著作,特别是《九章算术》的完成,标志着中国的初等数学形成了体系。如果把《九章算术》和《几何原本》做一比较,就会发现它们各有特点:《几何原本》以形式逻辑方法贯穿内容,未涉及应用问题,而《九章算术》以问题性质分类编排,以解应用问题为主;《几何原本》以几何为主而略有算术内容,《九章算术》包含了算术、代数、几何等内容。这两部数学书的不同特点在东、西方有深刻的影响,形成了东、西方数学的不同风格。希腊数学产生了数学精神,即数学证明的演绎推理方法、数学的抽象化以及自然界依数学方式设计的信念,为数学乃至科学的发展起了至关重要的作用。而由这一精神所产生的理性、确定性、永恒不可抗拒的规律性等一系列思想,则在人类文化发展史上占据了重要的地位。

经过文艺复兴运动之后,伴随天文学等科学的发展,数学发展史上形成了一个重要的转折期,到16世纪,对于运动的研究成为自然科学的中心问题。作为变化着的量的一般性质及它们之间依赖关系的反映,在数学中产生了变量和函数的概念,而数学对象的这种根本扩展就决定了向数学新阶段的过渡。数学科学进入了从常量数学到变量数学的转型。新的欧洲数学的第一个重大进展是在算术和代数方面。用符号表示未知量及未知量的乘幂等符号体系的建立是代数性质上最重大的变革。欧洲数学家在16世纪到18世纪期间创造的成果比希腊人在大约10个世纪中所创造的还要多得多。在此期间,代数上升为一门科学以及它的方法和理论的大大扩展,射影几何和概率论的开端,解析几何,函数概念,以及微积分等都是重大的创新。数学概念逐渐远离直接经验而从人的脑子中不断涌出。这就使数学从感觉的学科转向思维的学科。而分析方法在微积分中表现出的有效性,使代数成为数学中占优势的实体。作为一种新的数学工具,法国科学家笛卡尔采用代数方法研究几何问题而创立的解析几何,以及牛顿和莱布尼兹发明的采用代数记号和方法在代数的概念上建立的微积分,成为近代数学建立的主要标志和基础。

和前两个世纪一样,19世纪科学上的进展,给数学带来了较大的变化。代数学受到伽罗瓦(Galois)的全新的刺激,数论、偏微分方程、常微分方程、单复变函数论等分支趋于成熟,几何学也再次活跃起来,并由于非欧几何的引入,以及射影几何的复兴而发生根本的变化。从技巧性发展的观点来看,复变函数论是新的创造中最为重要的。但从最终影响数学本性的角度来看,最重大的发展还是非欧几何。数学爆炸成为上百个分支,使数学家的研究出现了专业化和脱节的倾向。20世纪初,在数学公理化的运动中,公理化方法不仅使许多旧的和新的数学分支的逻辑基础得以建立,而且也确切地揭示出每个分支以哪些假定为基础,使得有可能比较和弄清各个分支间的联系。

在20世纪的数学发展中,现代数学呈现出更加抽象高深和庞大复杂的特点。集合论、突变函数论、泛函分析、拓扑学、抽象代数等新颖学科不断涌现,人们对于数学的认识也发生了根本的改变,数学应当包含那些并不是直接地或间接地由于研究自然界的需要而产生出来的任意结构,这样的观点逐步被人们接受,数学成为研究数与形、运动与变化,以及研究数学自身问题的学问,从而形成了纯粹数学和应用数学的分裂。特别是电子计

算机的出现,为数学的应用研究开辟了广阔的前景。20世纪五六十年代以来,数学扩展到自然科学、技术科学和人文社会学科等领域,不仅促进了物理数学、生物数学、经济数学等新的边缘学科的诞生,而且使现代数学新的理论和思想在实践应用中进一步推动着数学的发展。

从数学的发展历史来看,第一,数学是处于一种动态发展不断变化的过程中。它就是一个探究和认识的过程,是人类不断创造和发明的广阔领域,是不会终结的产物。第二,数学的产生与发展始终贯穿于人类对自然界及生活世界的实践性探索。生活实践与技术发展的需要是推动数学发展的根本源泉。第三,数学是抽象知识的结合体,这些知识可供个体学习或再发现,然后发展知识本身。第四,数与形是数学中相辅相成的两个部分,数是在对物质世界的形的特征的考察过程中逐步抽象和演进的,而数的发展又推动了人类对自然界中的形的问题的深入认知。公元前6世纪以前的数学主要是关于“数”的研究,而此后由于希腊数学的兴起,突出了对“形”的研究。第五,数学产生于问题,表达了一定时期人们的需要。数学的发展始终贯穿着问题的解决和广泛的应用,数学发展的过程就是人类探寻数学方法以解决各种自然科学问题的科学数学化过程,从牛顿以来的三百多年中,数学中的许多最重要的问题时常是其他学科提出来的。

二、数学的基本特性

自古希腊以来,数学哲学就试图诠释“数学是什么”的看似是纯理论的问题。其实,这对于数学教育来说却是很实际、很重要的问题。然而遗憾的是,许多数学教师对于“数学是什么”这样的基本问题很少思考。赫什认为,问题不在于教学的最好方式是什么,而在于数学到底是什么。

数学是先验的,还是经验的?从毕达哥拉斯的“万物皆数”到柏拉图的“理念世界”,再到文艺复兴时代,许多思想家都在探寻数学的实质。哥白尼、开普勒、伽利略、牛顿等都认为是上帝按数学方式设计了自然界,数学活动的任务就是发现这些方式。而另外有些人认为数学是研究客观世界的数和形的科学,数学知识是人们不断实践而获得的成果。到近现代,许多人认为数学是理性与经验完美结合的产物。

近年来,随着人们对数学性质认识的不断深入,人们对数学提出了一些新的视角。如把数学看作一种普遍的符号语言。数学用符号表示数量关系和空间形式,数学为其他科学提供了一种严密而简洁的语言,能够有效地描述结果和自然现象。正如卡西尔(E. Cassirer)所言:“数学是一种普遍的符号语言——它与对事物的描述无关而只涉及对关系的一般表达。”^①如把数学看作是一种方法,数学不仅是一种解决问题的方法,而且是一种思维方法,数学能使人们的思维方式严格化,形成有步骤地进行推理的习惯。数学除了提供定理和理论以外,还提供了包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、推断,以及符号运用等有特色的思维方式。数学使思维产生活力。而在许多数学家看来,数学是人类精神的自由创造物。集合论的创始人康托,就认为数学的本质在于自由。

^① [德]卡西尔. 人论[M]. 上海:上海译文出版社,1985:275.



知识卡片 1-1

对于“数学是什么”这个问题的回答,一般地说,可以分为两类——隐喻性回答和实质性回答。

所谓隐喻性回答,指的是用比喻的方式来表述数学是什么,如数学是思维,数学是艺术,数学是语言等。这些隐喻性回答对于了解数学、理解数学,进而喜欢数学、学习数学,再进而研究数学、应用数学或教授数学都是非常重要的。

实质性回答可分为两种类型,科学性回答和哲学性回答。

一位数学家认为,数学是研究数与形的科学。一位哲学家认为,数学是一门演算的科学。可以说,前者是从数学研究的基本概念的角度阐述的,而后者是从数学研究的操作的角度阐述的,就具体的论说而言都是十分精辟的。^①

尽管不同的人对数学的本质有不同的认识,对数学知识有不同的分类。但不可否认的是,数学知识与其他知识相比具有其自身的特征。

(一)抽象性

数学知识是人们对现实世界抽象的结果,甚至是对抽象的对象进一步抽象的结果。数学知识的抽象性反映在数学对象、数学方法和数学符号等诸多方面。恩格斯称数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学。这种“空间形式”和“数量关系”是从具体现实世界中抽取出来的。它研究的不是具体事物自身的特性,而是事物与事物之间的抽象关系。这种抽象跨越了事物的物质性区别,只保留了它们的结构与形式。准确地说,现代数学中研究的不仅是直接从现实世界抽象出来的量的关系和空间形式,而且还研究那些在数学内部以已经形成的数学概念和理论为基础定义出来的关系和形式。可以说,数学探求的是一些结构与模式,它们能为我们的宇宙带来次序,并使它简单明了。数学的本质特征就是在从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行研究。数学家在数、空间、科学、计算机以及想象中寻求模式,数学理论解释模式间的关系。

拿数字符号来说,儿童对数字“5”的认识,虽然源自于现实世界中的5根手指、5本书、5朵花等,但“5”这个数量属性并不与任何一朵花或任何一本书的特征(大小、颜色、味道等)有关,而是存在于花朵与花朵、书与书的相互关系之中。是对5根手指的关系、5本书的关系、5朵花的关系进行抽象以后所获得的属性,它反映的是数量为“5”的一个整体所具有的属性。“一个数字不仅仅是一个名称的代表,而且是一种抽象的逻辑关系的体现。关系不存在于实际的物体之中,它是抽象的,超出物体现实之上的。这种关系能够表明某个数字在一个次序中的位置,还能够表明一组物体中包含多少物体,而且它还是稳定的,不管在空间上如何重新排列和出现。”^②儿童掌握数量“5”,不仅要去除手指、书、花朵等具体物的无关特征而抽取其数量关系特征,而且这种关于具体物的关系特征还要继续抽象到普遍的数学关系,即5可以表示任何数量是“5”的物体的数量特征。拿空间形式来说,在现实生活中,我们充其量只能看到三维空间,但在数学中可以讨论 n 维空间的问题。而非欧几何更是脱离了人们的现实世界。

^① 孙宏安.对“数学是什么”的哲学思考[J].大连理工大学学报(社会科学版),2001(3):39.

^② 黄瑾.学前儿童数学教育[M].上海:华东师范大学出版社,2007:5.

总之,数学知识与其他知识的不同之处在于:“它完全舍弃了具体现象去研究一般性质,在抽象的共性中考察这些抽象系统本身,而不管它们对个别具体现象的应用界限。”^①数学知识的抽象性特征具体表现在以下三个方面:第一,在数学的抽象中保留了量的关系和空间形式而舍弃了其他一切。第二,数学的抽象是经过一系列阶段而产生的,它们达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象。第三,数学自身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子中。因此,数学概念没有直接的现实原型。也正是因为数学的这种高度的抽象性,才使数学的应用范围日益扩展到前人不能设想的领域。

(二)逻辑性

数学揭示的是客观世界的逻辑关系,同时数学知识本身的体系也具有严密的逻辑性。逻辑推断和证明是数学研究的基本方法和原则。数学的概念、定理和法则均是彼此紧密联系的,它们构成了一个严密的体系,具有逻辑的严格性。数学知识的严格性正是依赖于它的演绎的逻辑性特征。

以数概念为例,数关系就是各种逻辑关系的集中体现。其中既有对应关系,又有序列关系和包含关系。如在计数时,首先必须保证口述动作和手点动作的协调一致,这就涉及一一对应的逻辑观念;其次是序列关系的正确,口述的数序与点物的动作序列必须是连续而有序的,不能有遗漏或重复;最后要把所有的动作合起来形成一个总数,这就涉及整体和部分的包含关系。

数学知识的严格性表现在数学定义的准确性、推理和计算的逻辑严格性以及数学结论的确定无疑。数学中任何定义、公理的推断都离不开严谨的逻辑分析和归纳演绎;而数学探索的过程也少不了逻辑方法的参与,它包括非正式的思考、猜测、验证和推理等。数学是建立在演绎推理的基础上的,演绎推理出来的结论确保了其正确性。正如爱因斯坦所言:“为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重,一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的,并且经常处于会被新发现的事实推翻的危险之中。”^②希腊数学至今还依旧像两千年前一样有效,牛顿和莱布尼兹的微积分三百多年来也未发生本质的变化。但数学的逻辑严格性也不是绝对的、一成不变的,而是相对的、发展着的。冯·诺伊曼就说,不要把数学上动不得的严密性看得太天经地义了。大多数最妙的数学灵感都来源于经验,并且简直无法相信会存在绝对的、永远不变的、脱离所有人经验的数学严密性概念。

正是数学富于逻辑性的特点,使得数学探索和学习的过程成为一种积极思维的有意义、有趣味的过程。数学知识从简单到复杂,知识演进层层递进,环环相扣,循序渐进。儿童只有掌握了数学知识之间的逻辑关系,建立逻辑观念,才能理解和把握数学知识的体系。当然,儿童也正是在发现逻辑关系、形成抽象概念和运用数学方法解决实际问题的数学探索和学习过程中,不断锻炼和提升自己的逻辑判断和思维能力。

(三)精确性

数学的精确性主要是指数学定义的精确性、逻辑的严密性和数学结论的确定性。数学的精确性是其他学科所无法比拟的。数学的抽象性和逻辑性特征使得数学的对象成为一种纯理性的存在,可以在封闭的演绎联系中得到表现,因此它是所有科学的典范。在欧几里得

① 胡典顺. 数学:意义的领域[D]. 武汉:华中师范大学,2009:28.

② 许良英,范岱年. 爱因斯坦文集(第一卷)[M]. 北京:商务印书馆,1976:136.

的《几何原本》之前,柏拉图就认为几何是“永恒知识”的一门学科,其确实性就来自数学对象永恒不变的完美性。相比之下,物理世界的客体总是不断产生或消逝。物理世界变化不定,因此只是更高级的理想实体的一种近似。亚里士多德认为,几何学的成功不是基于完美的永恒客体,而是基于它的方法。对亚里士多德来说,数学的确实性建立在从自明的假设和明确陈述的定义出发而作的逻辑推导的可靠性之上,要是其他学科能够在同样的逻辑形式中得到理解,它们就会分享那种确实性。

笛卡儿认为,数学的这种逻辑性和精确性使其可成为一切知识的形式。他说:“那些长串连贯的推理,无一不是简单而容易,几何学者习惯用以推演更难证明的事理,使我联想到,凡人的能力所能认识的范围内,皆有同样情形。只要你不承认任何不真者为真,常常遵守应有的演绎程序,由一事理推演到另一事理,则最后绝不会有遥不可接、隐不可明的事理。至于必须从哪些事理开始,我已不难知道它;事实上,我已经知道,应当从最简单、最容易认识的事理开始。观察以前在科学上探求真理的学者,唯有数学家能找出一些确实自明的证明。”^①

数学作为一种语言符号,它是精确性的语言。“数学语言追求的是精密性和确定性,即用简练的、抽象的符号反映严密的逻辑推理,并获得确定的结果。”^②数学的这种精确性特征,要求学习者必须通过严谨的、严密的思维来解决问题。它也使我们能够更为准确地认识世界。

(四)应用性

数学的生命力,其源泉在于它的概念和结论尽管极为抽象,但却是从现实中抽取出来的,并且在其他科学中、在技术中、在全部的生活实践中都有广泛的应用。这一点,对于了解数学是最主要的。数学应用的广泛性也是它的特点之一。

我们经常地、几乎每时每刻地在生产中、在日常生活中、在社会生活中运用最普通的数学概念和结论,甚至并没意识到这一点。如果离开数学,全部现代技术都是不可能的。几乎所有科学部门都多多少少很实质地利用着数学。康德在《纯粹理性批判》中试图证明确立数学和数学性是自然科学的基础。他认为,任何一门自然科学,只有当它能应用数学工具进行研究时,才能算是一门发展渐趋完善的真实科学。而且一门科学对于数学工具的应用程度,就是这门科学渐变为真实科学的发展程度。

在人类的智力活动中,不受数学影响的领域已寥寥无几。从美国的《独立宣言》、马尔萨斯的《人口论》、阿基米德的杠杆定律、牛顿的《自然哲学之数学原理》,到爱因斯坦的相对论,无不说明这一点。数学对于科学家来说是一种“实践上的必需品”,失去数学,他们将寸步难行。几乎在所有重大科学理论发展和完善的过程中,数学都起着不可或缺的作用,数学研究的成果往往是重大科学发明的催生素。例如,流体力学、电磁理论、相对论、量子力学、计算机、信息论、控制论、现代经济学、生物学等理论的发展和完善,数学要么直接为其提供研究工具,要么间接地影响其发展,成为幕后的无名英雄。数学是科学和技术的基础,没有高深的数学就不可能有强大的科学,高技术本质上是数学技术。不仅自然科学,各门社会学科也同样地不断求助于数学。如经济学、管理学、政治科学、心理学、社会学、人类学等。数学家已经清醒地认识到,并不是数学像细流一样渗透到应用之中去,数学与科学是一对同等的伙伴,互相为对方提供思想、概念、问题及解决办法。

^① [法]笛卡儿. 笛卡儿思辨哲学[M]. 高新建,等译. 北京:九州出版社,2006:18.

^② 张慧和. 学前儿童数学教育[M]. 重庆:西南师范大学出版社,2001:5.

我们已经看到数学给生物学、神经科学、信息技术以及纳米技术赋予力量,发现所到之处数学都是极好伙伴。数学对其他学科作出了许多贡献,几乎改变我们做的所有事情。同时,这些学科正用一些有趣的新型问题向数学家发出了挑战,这些问题又导致了新的应用,且越是基础的数学,其用处越广。

三、数学的价值

从数学的产生与发展的历史,以及数学的基本特征的分析来看,作为一门系统的科学,数学的应用价值、思维价值和科学价值是数学的重要价值,这已经成为人们的共识。但随着人们对数学教育的不断反思、对数学本质的深入理解,数学的文化价值、教育价值和审美价值也逐步为人们所挖掘和理解。

(一)应用价值

所谓数学的应用价值,是指“数学对于人类认识世界和改造世界的实践活动所具有的重要作用和价值”^①。从数学的产生与发展的历史可见,数学产生于人类生产生活的实践活动,并在应对与解决人类在利用和改造自然过程中所面临的问题中获得推动和发展。因而数学从其诞生的那天起就背负了广泛的应用性特征及其价值。

我国著名的数学家华罗庚曾经说过:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。”^②数学作为一种方法,它既是一种思维的方法,也是一种解决问题的方法。它是人们解决现实问题和科学问题所必须使用、精通的工具与手段。德国哲学家康德曾经这样说道:“我坚决认为,任何一门自然科学,只有当数学化之后,才能称得上是真正的科学。”马克思也说过:“一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。”在现代社会,数学更是与各个学科研究领域乃至整个人类的生活息息相关,一些高精尖的技术领域所用的方法归根结底都是数学在起作用。如爱因斯坦,在其借助黎曼几何和不变量理论作为工具,实现了广义相对论等重大理论之后反思道:“在几年独立的科学研究之后,我才逐渐明白了在科学探索的过程中,通向更深入的道路是同最精密的数学方法联系在一起的。”爱因斯坦的广义相对论恰恰揭示了非欧几何的现实意义,成为历史上数学应用最精彩的例子之一。

因此,让儿童认识到数学与其他科学乃至社会生产生活是紧密相关的,让儿童认识到数学是有具体应用的学问,能激发他们对数学学习的兴趣和认同感。

(二)思维价值

数学是一种思维方式。长期以来,数学被认为是“思维的体操”和“思维的工具”。国际数学教育委员会在《九十年代的中小学数学》这一文件中指出:许多世纪以来,数学一直被看作是训练思维能力的最佳学科,数学教学的目标是保证每一个孩子都能数学地思考,必须将数学思维的发展作为数学教育的首要目标。所谓数学的思维方式,著名数学家外尔(H. Weyl)认为:“首先是指数学用以渗入研究外部世界的科学,例如物理学、化学、生物学、经济学等,甚至渗入我们关于人类事务的日常思维活动中的那种推理形式,其次是数学家留给自己应用于自己领域中的推理形式。”^③

① 黄瑾. 幼儿园数学教育与活动设计[M]. 北京:高等教育出版社,2010:6.

② 周春荔,等. 数学学科教育学[M]. 北京:首都师范大学出版社,2000:23.

③ Herman Weyl. 数学的思维方式[J]. 数学译林,1982(4).

数学牢固地扎根于人类智慧之中,其自诞生起就与思维结下了不解之缘,数学要通过思维来反映,数学又是思维的工具。数学除了提供定理和理论外,它还提供了有特色的思维方式,包括建立模式、抽象化、最优化、逻辑分析、推断,以及运用符号等,这是普遍适用并且强有力的思考方式。发展人的思维能力是数学重要的文化功能,没有数学就不存在有组织的逻辑思维。原始民族就已经表现了一定的数学思维能力。随着人类文明的发展,数学表现出了人类思维的本质和特征。任何一种完善的形式化思维,都不能忽略这种数学思维形式。数学思维可以帮助我们由日常思维过渡到形式思维。通过数学思维的训练,确实能够增强思维本领,提高抽象能力、逻辑推理能力和辩证思维能力。数学使思维产生活力,并使思维不受偏见、轻信与迷信的影响和干扰。张奠宙先生认为:“数学素质就是数学思维能力,亦即数学运算能力、逻辑思维能力和空间想象力,其核心则是逻辑思维能力。”^①

“数学是关于人类接近世界的方法。人类只要思考就是以数学的方式思考。”^②数学是一所优秀的思维学校,数学是一门睿智的训练学科,数学是一种抽象的思维模式。数学保持着精确,并使精细的分析和现实的计算成为可能。精确的数学语言让我们有条不紊地思考复杂的决策,而不是只凭轶事、猜测和雄辩。

(三)科学价值

数学的科学价值,是指数学对自然科学的产生与发展的作用和意义。自19世纪20年代以来,数学的研究对象和方法在本质上越来越突显出与自然科学的区别,数学也就从科学中分离出来,自成体系。当今时代,科学技术迅猛发展,科学数学化的趋势越来越明显,现代科学正朝着广泛应用数学的方向发展。

数学是科学的主要术语。数学语言与科学之间的联系,早在古希腊自然哲学中就已经突显。希腊哲学已经发现了一种新的语言——数的语言。这个发现标志着我们近代科学概念的诞生。数学思想方法对科学的发展也起着不可替代的作用。华罗庚说:“数学是一切科学的得力助手和工具。它有时由于其他科学的促进而发展,有时也先走一步,领先发展,然后再获得应用。任何一门科学缺乏了数学这一项工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态,更不能从已知数据推出未知的数据来,因而就减少了科学预见的可能性,或者减弱了科学预见的精确度。”^③在科学的产生和发展中,应用数学知识是最为直接的,也是最为广泛的。哥白尼的日心说、开普勒的行星运行理论等天文学的发展,物理学中牛顿的力学、麦克斯韦的电磁理论、爱因斯坦的相对论等理论无不建立在数学的基础上。物理学家伦琴因发现了X射线而成为1910年开始的诺贝尔物理奖的第一位获得者,当有人问这位卓越的实验物理学家和科学家需要什么样的修养时,他的回答是:“第一是数学,第二是数学,第三还是数学。”对计算机的发展作出过重大贡献的冯·诺依曼(J. V. Neuman)认为“数学处于人类智能的中心领域”。科学与数学结合也产生了一些交叉和边缘学科,如数学物理、生物数学、数学生态,等等。丘成桐指出:“数学的本性决定了,它会随着科学研究的需求而拓宽自身的领域,并会随着综合分析而更为深入。在这个新世纪,数学将成为所有科学的中心。”^④

(四)文化价值

文化是人类在社会历史实践过程中所创造的物质财富与精神财富的总和。数学对象并

① 张奠宙,李仕铸,李俊. 数学教育学导论[M]. 北京:高等教育出版社,2004:54.

② [美]斯图尔特·夏皮罗. 数学哲学——对数学的思考[M]. 郝兆宽,杨睿之译,上海:复旦大学出版社,2009:171.

③ 华罗庚. 华罗庚科普著作选集[M]. 上海:上海教育出版社,1984:328.

④ 丘成桐. 数学与科技[J]. 数学译林,2004(2).

非在物质世界中真实存在,而是人类抽象思维的产物,是“社会的建构”,在此意义下数学是一种文化。数学的文化价值是指“数学作为一种理性文化,对人类文化的构成以及人类精神世界的影响所具有的重要的作用和价值”。^① 数学一直是文明和文化的重要组成部分。数学也是形成现代文化的主要力量,是现代文化极其重要的因素。

数学活动就其性质来说是社会性的。美国学者怀尔德(R. L. Wilder)在《作为文化系统的数学》一书中提出数学文化的概念,把数学文化看成一种不断进化的物种。他认为“数学是一个由于其内在力量与外在力量共同作用而处于不断发展变化之中的文化系统,数学文化即是由数学传统与数学本身所组成的”。^② 哈蒙德(A. L. Hammond)则认为,数学是看不见的文化,数学是暗藏的文化。数学历来是人类文化的一个重要组成部分,数学代表人类心灵最高成就之一。作为人类精神最原始的创造,只有音乐堪与数学媲美。数学本身就是一个充满活力的繁荣的文化分支,它以其抽象性和逻辑性的本质特征成为理性文化中的核心。数学是研究客观世界量的关系的科学。这一“量的关系”的本质特征的文化意义可以表现在以下方面:首先,数学因其是从量的方面揭示事物的特性,因而必然是抽象的;其次,客观世界中的质与量的特征是普遍的,因而数学在生活世界中的应用是广泛而普遍的;再次,世间事物的联系和影响方式是多样和复杂的,因而,数学需要以不同的模式来描述事物间多样、复杂的量的关系。

数学是人类共同创造、共同享受的文化,它打有各民族的文化烙印。如作为中国古代灿烂文化一部分的传统数学,也表现出多方面的特征:鲜明的社会性,形数结合,以算为主,寓理于算等等。我国古代数学是从问题而不是从公理出发,以解决问题而不是以推理为宗旨。这与西方以欧几里得几何为代表的所谓演绎旨趣迥异,途径亦殊。

齐民友教授认为,数学作为一种文化,在过去和现在都大大地促进了人类思想的解放,他指出:“一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”“没有现代的数学就不会有现代文化,没有现代数学的文化是注定要衰落的。”^③ 科学史表明,一些划时代的科学理论成就的出现,无一不借助于数学的力量。数学对人类文化的发展有着重要影响。众所周知,希腊几何学哺育了柏拉图的理想主义哲学。事实上,如果不从数学在西方思想史上所起的重要作用方面了解它,就不可能完全理解人文学科、自然学科,人的所有创造和人类世界。

克莱因说:“数学是一种精神,一种理性的精神。正是这种精神,激发、促进、鼓舞并驱使人类的思维得以运用到最完善的程度,亦正是这种精神,试图决定性地影响人类物质道德和社会生活;试图回答人类自身提出的问题;努力去理解和控制自然;尽力去探索和确定已经获得的知识的最深刻和最完美的内涵。”^④ 数学是人类理性精神得到最充分发挥的领域。数学的理性精神对人内心世界的开掘与对人生价值、人生理想追求的倡导,提供了强大的精神动力,它以丰富的内涵,使学生在沟通情感中引起共鸣、共通,在思想中形成共识、共进。这是数学文化力量的真正所在,也是数学文化价值的精髓。

(五)审美价值

数学理论价值和实用价值已经被人们广泛地接受,但是数学审美价值尚没有被人们广

① 黄瑾. 幼儿园数学教育与活动设计[M]. 北京:高等教育出版社,2010:8.

② 周春荔,等. 数学学科教育学[M]. 北京:首都师范大学出版社,2000:27.

③ 齐民友. 数学与文化[M]. 长沙:湖南教育出版社,1990:12-13.

④ [美]M. 克莱因. 西方文化中的数学[M]. 张祖贵译. 上海:复旦大学出版社,2004.