SC 圣才考研网
www.100exam.com

扫一扫 送本书 手机版
摇一摇 找学友互动学习
播一播 看名师直播答疑

国内外经典教材辅导系列·理工类

浙江大学《概率论与数理统计》

（第4版）

笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网
www.100exam.com

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

国内外经典教材辅导系列·理工类

浙江大学《概率论与数理统计》（第4版）笔记和课后习题（含考研真题）详解

主编：圣才考研网

www.100exam.com

中国石化出版社

内 容 提 要

国内外经典教材辅导系列是一套全面解析当前国内外各大院校权威教科书的辅导资料。本书是浙江大学《概率论与数理统计》(第4版)的学习辅导书。本书基本遵循第4版的章目编排，共分为14章，每章由三部分组成：第一部分为复习笔记，总结本章的重难点内容；第二部分为课(章)后习题详解，对第4版的所有习题都进行了详细的分析和解答；第三部分为考研真题详解，精选近年考研真题，并提供了详细的解答。

圣才考研网(www.100exam.com)提供浙江大学《概率论与数理统计》网授精讲班【教材精讲+考研真题串讲】、3D电子书、3D题库(详细介绍参见本书书前彩页)。随书赠送大礼包增值服务【300元视频课程+30元3D电子书+40元3D题库+70元手机版电子书/题库+20元圣才学习卡】。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找到所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

图书在版编目(CIP)数据

浙江大学《概率论与数理统计》(第4版)笔记和课后习题(含考研真题)详解/圣才考研网主编.—北京：中国石化出版社,2015.6
(国内外经典教材辅导系列)
ISBN 978-7-5114-3416-6

Ⅰ.①浙… Ⅱ.①圣… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第130030号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街58号
邮编:100011 电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
保定华泰印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本17.75印张4彩页480千字
2015年11月第1版 2015年11月第1次印刷
定价:38.00元

《国内外经典教材辅导系列·理工类》

编 委 会

序　言

我国各大院校一般都把国内外通用的权威教科书作为本科生和研究生学习专业课程的参考教材，这些教材甚至被很多考试(特别是硕士和博士入学考试)和培训项目作为指定参考书。为了帮助读者更好地学习专业课，我们有针对性地编著了一套与国内外教材配套的复习资料，并提供配套的名师讲堂、3D 电子书和 3D 题库。

浙江大学盛骤等主编的《概率论与数理统计》(高等教育出版社)是我国高校采用较多的概率论与数理统计权威教材之一。作为该教材的配套辅导书，本书具有以下几个方面的特点：

1. 整理名校笔记，浓缩内容精华。本书每章的复习笔记均对本章的重难点进行了整理，并参考了国内名校名师讲授该教材的课堂笔记。因此，本书的内容几乎浓缩了该教材的所有知识精华。

2. 解析课后习题，提供详尽答案。本书参考大量概率论与数理统计相关资料，对浙江大学《概率论与数理统计》的课(章)后习题进行了详细的分析和解答，并对相关重要知识点进行了延伸和归纳。

3. 精选考研真题，巩固重难点知识。为了强化对重要知识点的理解，本书精选了近几年考研数学中关于概率论与数理统计部分的真题，并提供详细的解答。所选考研真题基本涵盖了各个章节的考点和难点。

与本书相配套，圣才考研网提供浙江大学《概率论与数理统计》网授精讲班【教材精讲 + 考研真题串讲】、3D 电子书、3D 题库(免费下载，送手机版)(详细介绍参见本书书前彩页)。

购买本书享受大礼包增值服务，手机扫描本书封面大礼包二维码或登录圣才考研网(www.100exam.com)，刮开所购图书封面防伪标的密码，即可享受大礼包增值服务：①视频课程(23 小时，价值 300 元)；②本书 3D 电子书(价值 30 元)；③3D 题库【考研真题 + 课后习题 + 章节题库 + 模拟试题】(价值 40 元)；④手机版【电子书/题库】(价值 70 元)；⑤圣才学习卡(价值 20 元)，可在圣才学习网旗下所有网站进行消费。扫一扫本书封面的二维码，可免费下载本书手机版；摇一摇本书手机版，可找所有学习本书的学友，交友学习两不误；本书提供名师考前直播答疑，手机电脑均可观看，直播答疑在考前推出(具体时间见网站公告)。

圣才考研网(www.100exam.com)是圣才学习网旗下的考研考博专业网站，提供考研公共课和全国 500 所院校考研考博专业课辅导【一对一辅导、网授精讲班等】、3D 电子书、3D 题库(免费下载，免费升级)、全套资料(历年真题及答案、笔记讲义等)、国内外经典教材名师讲堂、考研教辅图书等。

考研辅导：www.100exam.com(圣才考研网)

官方总站：www.100xuexi.com(圣才学习网)

圣才学习网编辑部

目　录

第1章　概率论的基本概念

1.1　复习笔记

在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为随机现象.

一、随机试验

1. 定义

试验包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.

2. 试验的特点

(1)可以在相同的条件下重复地进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

二、样本空间、随机事件

1. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

2. 随机事件

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集：

(1)在每次试验中它总是发生的，S 称为必然事件.

(2)空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，也是样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为不可能事件.

3. 事件间的关系与事件的运算

事件间的关系与事件的运算按照集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1)包含关系

①若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，即事件 A 发生必导致事件 B 发生；

②若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2)和事件

事件 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，…的和

事件.

(3)积事件

事件 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件. 当且仅当 A, B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 A_1, A_2, …, A_n 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 A_1, A_2, …的积事件.

(4)差事件

事件 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生、B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

(5)互斥

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的. 即事件 A 与事件 B 不能同时发生. 基本事件是两两互不相容的.

(6)逆事件

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$, $\overline{A}=S-A$.

(7)定律

设 A, B, C 为事件，则有：

①交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

②结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

③分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

④德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

三、频率与概率

1. 频率

(1)定义

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$.

(2)基本性质

①$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

②$f_n(S)=1$；

③若 A_1, A_2, …, A_k 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

2. 概率

(1)定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

①非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

②规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

③可列可加性：设 A_1, A_2, …是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, i, $j=1$,

2，…，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$.

(2)性质

①$P(\varnothing) = 0$；

②(有限可加性)若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

③设 A，B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \text{与} P(B) \geqslant P(A)$$

④对于任一事件 A，$P(A) \leqslant 1$；

⑤(逆事件的概率)对于任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$；

⑥(加法公式)对于任意两事件 A，B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；

一般，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，可以用归纳法证得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

四、等可能概型(古典概型)

1. 定义

如果一个试验具有以下两个特点：

(1)试验的样本空间只包含有限个元素；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同.

则这种试验称为等可能概型，又称古典概型.

2. 等可能概型的计算公式

若事件 A 包含 k 个基本事件，即 $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cdots \cup \{e_{i_k}\}$，这里 i_1，i_2，…，i_k 是 1，2，…，n 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件的总数}}$$

五、条件概率

1. 条件概率

(1)定义

设 A，B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

(2)性质

①非负性：对于每一事件 B，有 $P(B|A) \geqslant 0$；

②规范性：对于必然事件 S，有 $P(S|A) = 1$；

③可列可加性：设 B_1，B_2，…是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

2. 乘法定理

(1)设 $P(A) > 0$，则有 $P(AB) = P(B|A)P(A)$，又称乘法公式.

(2)一般，设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$

3. 全概率公式和贝叶斯公式

(1)样本空间划分的定义

设 S 为试验 E 的样本空间，B_1，B_2，…，B_n 为 E 的一组事件. 若

①$B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，n；

②$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$，

则称 B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 S 的一个划分.

若 B_1，B_2，…，B_n 是样本空间的一个划分，则对每次试验，事件 B_1，B_2，…，B_n 中必有一个且仅有一个发生.

(2)全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$$

(3)贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1, 2, \cdots, n$$

注：在 $n=2$ 的情况下，全概率公式和贝叶斯公式分别成为

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

六、独立性

1. 两个事件独立

(1)定义

设 A，B 是两事件，如果满足等式 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A，B 相互独立.

(2)两个定理

①设 A，B 是两事件，且 $P(A)>0$，若 A，B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$. 反之亦然.

②若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立

$$A 与 \overline{B}，\overline{A} 与 B，\overline{A} 与 \overline{B}$$

2. 三个事件独立

设 A，B，C 是三个事件，如果满足等式

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$

则称事件 A，B，C 相互独立.

3. n 个事件独立

(1)定义

设 A_1，A_2，…，A_n 是 $n(n\geqslant 2)$个事件，如果对于其中任意2个，任意3个，…，任意 n 个事件的积事件的概率，都等于各事件概率之积，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立.

(2)两个推论

①若事件 A_1，A_2，…，$A_n(n\geqslant 2)$相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件也是相互独立的.

②若 n 个事件 A_1，A_2，…，$A_n(n\geqslant 2)$相互独立，则将 A_1，A_2，…，A_n 中任意多个事件换成它们各自的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

1.2 课后习题详解

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1)记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)；

(2)生产产品直到有10件正品为止，记录生产产品的总件数；

(3)对某工厂出厂的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出了2件次品就停止检查，或检查了4件产品就停止检查，记录检查的结果；

(4)在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

解：(1)以 n 表示该班的学生数，总成绩的可能取值为0，1，2，3，…，$100n$，试验的样本空间为

$$S=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100n\right\}$$

(2)设在生产第10件正品前共生产了 k 件不合格品，样本空间为

$$S=\{10+k\mid k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$

或写成

$$S=\{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\}$$

(3)采用0表示检查到一件次品，以1表示检查到一件正品，例如0110表示第一次与第四次检查到次品，而第二次与第三次检查到的是正品，样本空间可表示为

$$S=\{00,\ 100,\ 0100,\ 0101,\ 0110,\ 1100,\ 1010,\ 1011,\ 0111,\ 1101,\ 1110,\ 1111\}$$

(4)取一直角坐标系，则有 $S=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$，若取极坐标系，则有

$$S=\{(\rho,\ \theta)\mid \rho<1,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}$$

2. 设 A，B，C 为三个事件，用 A，B，C 的运算关系表示下列各事件：

(1)A 发生，B 与 C 不发生；

(2)A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3)A，B，C 中至少有一个发生；

(4)A，B，C 都发生；

(5)A，B，C 都不发生；

(6)A，B，C 中不多于一个发生；

(7)A，B，C 中不多于两个发生；

(8)A，B，C 中至少有两个发生.

解：以下分别用 $D_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$表示(1)，(2)，…，(8)中所给出的事件. 一个事件不发生即为它的对立事件发生，例如事件 A 不发生即为 $\overline{A}$ 发生.

(1)A 发生，B 与 C 不发生，表示 A，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 同时发生，故 $D_1=A\overline{B}\,\overline{C}$或写成 $D_1=A-B-C$；

(2)A 与 B 都发生而 C 不发生，表示 A，B，$\overline{C}$ 同时发生，故 $D_2=AB\overline{C}$或写成 $D_2=AB-C$；

(3)①方法 1　由和事件的含义知，事件 $A\cup B\cup C$ 即表示 A，B，C 中至少有一个发生，故 $D_3=A\cup B\cup C$；

②方法 2　事件“A，B，C 至少有一个发生”是事件“A，B，C 都不发生”的对立事件，因此，$D_3=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$；

③方法 3　事件“A，B，C 中至少有一个发生”表示三个事件中恰有一个发生或恰有两个发生或三个事件都发生，因此，D_3 又可写成

$$D_3=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$$

(4)$D_4=ABC$；

(5)$D_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(6)“A，B，C 中不多于一个发生”表示 A，B，C 都不发生或 A，B，C 中恰有一个发生，因此，$D_6=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

又“A，B，C 中不多于一个发生”表示“A，B，C 中至少有两个不发生”，亦即 $\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{B}\,\overline{C}$,$\overline{A}\,\overline{C}$ 中至少有一个发生，因此又有 $D_6=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}$；

又“A，B，C 中不多于一个发生”是事件 $G=$“A，B，C 中至少有两个发生”的对立事件. 而事件 G 可写成 $G=AB\cup BC\cup CA$，因此又可将 D_6 写成

$$D_6=\overline{AB\cup BC\cup CA}=\overline{AB}\cap\overline{BC}\cap\overline{CA}$$

(7)“A，B，C 中不多于两个发生”表示 A，B，C 都不发生或 A，B，C 中恰有一个发生或 A，B，C 中恰有两个发生. 因此

$$D_7=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$$

又“A，B，C 中不多于两个发生”表示 A，B，C 中至少有一个不发生，亦即 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ 中至少有一个发生，即有 $D_7=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

又“A，B，C 中不多于两个发生”是事件“A，B，C 三个都发生”的对立事件，因此又有 $D_7=\overline{ABC}$；

(8)$D_8=AB\cup BC\cup CA$，也可写成 $D_8=ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

3. (1)设 A，B，C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A，B，C 至少有一个发生的概率.

(2)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B$，$\overline{A}\,\overline{B}$，$A\cup B\cup C$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$\overline{A}\,\overline{B}\cup C$ 的概率.

(3)已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，(i)若 A，B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$；(ii)若 $P(AB)=\frac{1}{8}$，求 $P(A\overline{B})$.

解：(1) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$$=\frac{5}{8}+P(ABC)$$

由 $ABC\subset AB$，已知 $P(AB)=0$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，得 $P(ABC)=0$，所求概率为 $P(A\cup B\cup C)=\frac{5}{8}$.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}$$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}$

$P(\bar{A}\bar{B}C)=P(\bar{A}\bar{B}(S-\bar{C}))=P(\bar{A}\bar{B}-\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\bar{A}\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$

$$=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60}$$

记 $p=P(\bar{A}\bar{B}\cup C)$，由加法公式

$$p=P(\bar{A}\bar{B})+P(C)-P(\bar{A}\bar{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}$$

(3) (i) $P(A\bar{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}$;

(ii) $P(A\bar{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

4. 设 A、B 是两个事件

(1) 已知 $A\bar{B}=\bar{A}B$，验证 $A=B$；

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

解：(1) 假设 $A\bar{B}=\bar{A}B$，故有 $(A\bar{B})\cup(AB)=(\bar{A}B)\cup(AB)$，则 $A(\bar{B}\cup B)=(\bar{A}\cup A)B$，即 $AS=SB$，故有 $A=B$.

(2) A，B 恰好有一个发生的事件为 $A\bar{B}\cup\bar{A}B$，其概率为

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A(S-B))+P(B(S-A))$$
$$=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-2P(AB)$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂

(1) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率；

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解：(1) $p=1-P$(取到的 5 片药片均不是安慰剂) $-P$(取到的 5 片药片中只有 1 片是安慰剂)，即

$$p=1-\binom{5}{0}\binom{10-5}{5}\bigg/\binom{10}{5}-\binom{5}{1}\binom{10-5}{4}\bigg/\binom{10}{5}=\frac{113}{126}$$

(2) $p=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率；

(2) 求最大号码为 5 的概率.

解： 在房间里任选 3 人，记录其佩戴的纪念章的号码，10 人中任选 3 人共有 $N(S)=\binom{10}{3}=120$ 种选法，此即为样本点的总数. 以 A 记事件"最小的号码为 5"，以 B 记事件"最大的号码为 5".

(1) 因选到的最小号码为 5，则其中一个号码为 5 且其余两个号码都大于 5，它们可从 $6\sim10$ 这 5 个数中选取，故 $N(A)=\binom{5}{2}$，从而 $P(A)=N(A)/N(S)=\binom{5}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{1}{12}$；

(2) 同理，$N(B)=\binom{4}{2}$，故 $P(B)=N(B)/N(S)=\binom{4}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{1}{20}$.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

解： 以 S 表示：在 17 桶油漆中任取 9 桶给顾客. 以 A 表示事件"顾客取到 4 桶白漆、3 桶黑漆与 2 桶红漆"，则有 $N(S)=\binom{17}{9}$，$N(A)=\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}$，故事件 A 发生的概率为

$$P(A)=N(A)/N(S)=\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}\Big/\binom{17}{9}=\frac{252}{2431}$$

8. 在 1500 件产品中有 400 件次品、1100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率；

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

解： 总数 S：从 1500 件产品中任取 200 件产品. 以 A 表示事件"恰有 90 件次品"，以 B_i 表示事件"恰有 i 件次品"，$i=0$，1，以 C 表示事件"至少有 2 件次品".

(1) $N(S)=\binom{1500}{200}$

$N(A)=\binom{400}{90}\binom{1100}{200-90}=\binom{400}{90}\binom{1100}{110}$

故 $P(A)=N(A)/N(S)=\binom{400}{90}\binom{1100}{110}\Big/\binom{1500}{200}$；

(2) $C=S-B_0-B_1$，其中，B_0，B_1 互不相容，所以

$$\begin{aligned}P(C)&=P(S-B_0-B_1)=P(S-[B_0\cup B_1])\\&=1-P(B_0\cup B_1)=1-P(B_0)-P(B_1)\end{aligned}$$

因 $N(B_0)=\binom{1100}{200}$，$N(B_1)=\binom{400}{1}\binom{1100}{199}$

故 $P(B_0)=\binom{1100}{200}\Big/\binom{1500}{200}$，$P(B_1)=\binom{400}{1}\binom{1100}{199}\Big/\binom{1500}{200}$

因此有 $P(C)=1-\binom{1100}{200}\Big/\binom{1500}{200}-\binom{400}{1}\binom{1100}{199}\Big/\binom{1500}{200}$

$$=1-\left[\binom{1100}{200}+\binom{400}{1}\binom{1100}{199}\right]\Big/\binom{1500}{200}$$

9．从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解：总数 S：从5双不同的鞋子中任取4只．以 A 表示事件“所取4只鞋子中至少有两只配成一双鞋子”，则 $\overline{A}$ 表示事件“所取4只鞋子无配对”．先计算 $P(\overline{A})$ 较为简便．以下按 $N(\overline{A})$ 的不同求法，列出本题的3种解法，另外还给出一种直接求 $P(A)$ 的解法．

解法一：考虑4只鞋子是有次序一只一只取出的，从5双(10只)鞋子中任取4只共有 $10\times9\times8\times7$ 种取法，$N(S)=10\times9\times8\times7$．现在来求 $N(\overline{A})$：第一只可以任意取，共有10种取法，第二只只能在剩下的9只中且除去与已取的第一只配对的8只鞋子中任取一只，共8种取法；同理第三只、第四只各有6种、4种取法，从而 $N(\overline{A})=10\times8\times6\times4$．故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-N(\overline{A})/N(S)$$
$$=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}$$

解法二：从10只鞋子中任取4只，共有 $\binom{10}{4}$ 种取法，即 $N(S)=\binom{10}{4}$．为求 $N(\overline{A})$，先从5双鞋子中任取4双共有 $\binom{5}{4}$ 种取法，再自取出的每双鞋子中各取1只(在一双中取一只共有2种取法)，共有 2^4 种取法，即 $N(\overline{A})=\binom{5}{4}2^4$．故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{5}{4}2^4}{\binom{10}{4}}=\frac{13}{21}$$

解法三：现在来求 $N(\overline{A})$．先从5只左脚鞋子中任取 k 只($k=0,1,2,3,4$)，有 $\binom{5}{k}$ 种取法．而剩下的 $4-k$ 只鞋子只能从(不能与上述所取的配对的) $5-k$ 只右脚鞋子中选取，即对于每个固定的 k，有 $\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}$ 种取法．故 $N(\overline{A})=\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}=80$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-N(\overline{A})/N(S)=1-\frac{80}{\binom{10}{4}}=\frac{13}{21}$$

解法四：以 A_i 表示事件“所取4只鞋子中恰能配成 i 双”($i=1,2$)，则 $A=A_1\cup A_2$，$A_1A_2=\varnothing$，故 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$，因 A_2 为4只恰能配成2双，它可直接从5双鞋子中成双地取得，故 $N(A_2)=\binom{5}{2}$，$N(A_1)$ 的算法是：先从5双中取1双，共有 $\binom{5}{1}$ 种取法，另外两只能从其他8只中取，共有 $\binom{8}{2}$ 种取法，不过这种取法中将成双的也算在内了，应去掉．从而 $N(A_1)=\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]=120$．$N(S)$ 仍为解法二中的 $\binom{10}{4}=210$ 种，故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{N(A_1)}{N(S)}+\frac{N(A_2)}{N(S)}$$
$$=\frac{120+10}{210}=\frac{13}{21}$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 *probability* 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 *ability* 的概率.

解：解法一：总数 S：自 11 个字母中随机地接连抽 7 个字母并依次排列. 将 11 个字母中的两个 b 看成是可分辨的，两个 i 也看成是可分辨的，$N(S)=A_{11}^7$. 以 A 记事件“排列结果为 ability”，则 $N(A)=4$(因 b 有两种取法，i 也有两种取法)，因而

$$P(A)=N(A)/N(S)=\frac{4}{A_{11}^7}=2.4\times10^{-6}$$

解法二：本题也可利用乘法定理来计算. 以 A_1，B_2，I_3，L_4，I_5，T_6，Y_7 依次表示取得字母 a，b，i，l，i，t，y 各事件，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7)&=P(A_1)P(B_2|A_1)P(I_3|A_1B_2)\\&\times P(L_4|A_1B_2I_3)P(I_5|A_1B_2I_3L_4)\\&\times P(T_6|A_1B_2I_3L_4I_5)P(Y_7|A_1B_2I_3L_4I_5T_6)\\&=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{A_{11}^7}\end{aligned}$$

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解：总数 S：将 3 只球随机地放人 4 个杯子中去，易知共有 4^3 种放置法. 以 A_i 表示事件“杯子中球的最大个数为 i”，$i=1$，2，3.

对于 A_3，只有当 3 只球放在同一杯子中时才能发生，有 4 个杯子可以任意选择，于是 $N(A_3)=\binom{4}{1}$，故

$$P(A_3)=N(A_3)/N(S)=\binom{4}{1}\Big/4^3=\frac{1}{16}$$

对于事件 A_1，只有当每个杯子最多放一只球时才能发生. 因而 $N(A_1)=4\times3\times2=A_4^3$，故

$$P(A_1)=N(A_1)/N(S)=A_4^3/4^3=\frac{3}{8}$$

对于 A_2，因 $A_1\cup A_2\cup A_3=S$，$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，故 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，从而

$$P(A_2)=1-\frac{1}{16}-\frac{3}{8}=\frac{9}{16}$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解：将部件自 1 到 10 编号，随机试验 E：随机地取铆钉，使各部件都装 3 只铆钉. 以 A_i 表示事件“第 i 号部件强度太弱”. 由题设，仅当 3 只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上，A_i 才能发生，由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 号部件上共有 $\binom{50}{3}$ 种取法，强度太