HOW NOT TO BE WRONG

The
Power of
Mathematical
ng

魔鬼数学

大数据时代，数学思维的力量

[美] 乔丹 · 艾伦伯格（Jordan Ellenberg）◎著
胡小锐◎译

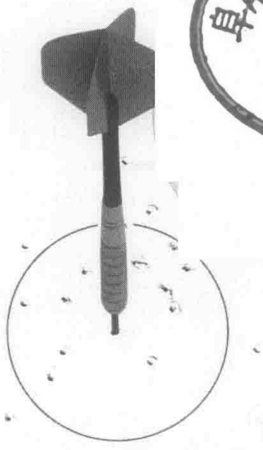
一个数学界的超级明星为你揭示混沌的
世界表象之下隐藏的数学逻辑之美，
教你运用数学思维的力量，
做出正确的工作与生活决策。

中信出版集团 · CHINACITICPRESS

魔鬼数学

大数据时代，数学思维的力量

[美] 乔丹·艾伦伯格（Jordan Ellenberg）◎著
胡小锐◎译



HOW NOT TO BE WRONG

The Power of Mathematical Thinking

中信出版集团·CHINACITICPRESS·北京

图书在版编目（CIP）数据

魔鬼数学：大数据时代，数学思维的力量 /（美）艾伦伯格著；胡小锐译．—北京：中信出版社，2015.9
书名原文：How Not to Be Wrong
ISBN 978-7-5086-5243-6

I. ①魔… II. ①艾…②胡… III. ①数学－普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第118066号

魔鬼数学：大数据时代，数学思维的力量

著　　者：[美]乔丹·艾伦伯格
译　　者：胡小锐
策划推广：中信出版社（CITIC Press Corporation）
出版发行：中信出版集团股份有限公司
（北京市朝阳区惠新东街甲4号富盛大厦2座　邮编　100029）
（CITIC Publishing Group）
承 印 者：三河市西华印务有限公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：25.5　　字　　数：410千字
版　　次：2015年9月第1版　　印　　次：2015年9月第1次印刷
京权图字：01-2014-8119　　广告经营许可证：京朝工商广字第8087号
书　　号：ISBN 978-7-5086-5243-6/F·3408
定　　价：59.00元

献给坦妮娅（Tanya）

学习数学的精髓时不能只抱着应付差事的心理，而应该把这些知识融入日常思维，并通过各种激励手段使它们反复出现在你的脑海里。

——伯特兰·罗素（Bertrand Russell），
《数学研究》（*The Study of Mathematics*）

HOW NOT TO
BE WRONG

引言

数学知识什么时候能派上用场呢？

在地球上某个地方的一间教室里，一位数学老师布置了30道定积分练习题作为学生的周末作业。要做完这些题，肯定需要花费大量时间，因此，一名学生大声地表达了自己的疑惑。

这名学生的兴趣非常广泛，但是她对做数学题几乎没有任何兴趣。她自己也清楚这一点，因为上个周末，她就花了好多时间完成另外30道（其实没有多大区别的）定积分练习题。她看不出做这些题有什么意义，于是与老师进行了交流。交流过程中，这名学生准备提问老师最不愿意回答的问题："这些知识我什么时候能用上呢？"

这位老师很可能会这样回答："我知道这些题目非常枯燥，可是你别忘了，你还不知道自己将来会选择什么样的职业。现在，你看不到这些知识与你有什么关系，但是你将来从事的职业有可能非常需要这些知识，所以你应该快速准确地完成这些定积分练习题。"

师生两人都知道这其实是一个谎言，而且学生通常不会对这样的回答感到满意，毕竟，即使有的成年人可能会用到积分、$(1-3x+4x^2)^{-2}dx$、余弦公式或者多项

式除法等知识，人数也屈指可数。

这个回答就连老师也不会满意。我对于这一点很有发言权，因为在我多年担任数学老师的时光里，我就为成百上千的大学生布置过很多定积分练习题。

值得庆幸的是，对于这个问题，我们能找到一个更好的答案：

“尽管一些数学课程会要求你完成一道又一道计算题，让你觉得这些机械的计算过程不榨干你的所有耐心与精力就不会罢休，但事实并非如此。学习数学必须计算这些定积分题，就像足球运动员需要接受举重与韧性训练。如果你希望踢好足球（我是指抱着一种认真的态度，达到竞技水平），就必须接受大量枯燥、重复、看似毫无意义的训练。职业足球运动员在比赛时会用到这些训练内容吗？不会的，我们从未在赛场上看到有足球运动员举杠铃或者在交通锥之间穿梭前行。但是，我们肯定会看到他们应用力量、速度、观察力与柔韧性，而要提高这些能力，他们必须常年接受枯燥乏味的训练。可以说，这些训练内容是足球运动的一个组成部分。

“如果你选择足球作为谋生手段或者希望加入校队，你就别无选择，只能利用周末时间，在训练场上接受大量枯燥乏味的训练。当然，如果你觉得自己无法接受这样的训练，你仍然可以踢足球，只不过是和朋友们一起踢，纯粹以娱乐为目的。我们也有可能穿过防守队员的防线完成华丽的传球，或者像职业运动员那样起脚远射得分，并为此激动不已。此外，踢足球还能强健体魄，愉悦心情。与坐在家里观看职业比赛的电视转播相比，效果要好得多。

“数学与足球非常相似。你的就业目标可能与数学没有相关性，这很正常，大多数人的情况都是这样。但是，你仍然可以运用数学知识，甚至你手头正在做的事情有可能就用到了数学知识，只不过你自己不知道。数学与逻辑推理紧密地交织在一起，可以增强我们处理事务的能力。掌握了数学知识，就像戴了一副X射线眼镜一样，我们可以透过现实世界错综复杂的表面现象，看清其本质。多少个世纪以来，由于人们辛勤钻研、反复辩论，数学的各种公式与定理已经得到了千锤百炼，可以帮助我们在处理事务时避免犯错。利用数学这个工具，我们可以更深入、更准确地理解我们这个世界，而且可以取得更有意义的成果。我们需要做的就是找到一位良师或者一本好书，引导我们学习数学中的一些规则和基本方

法。现在，我愿意担任这样的指导老师，告诉你如何实现这个目的。”

其实，由于时间关系，我在上课时基本不会这样长篇累牍地解释这个问题。但是在写书时，我可以稍微展开一些。我要告诉你，我们每天考虑的那些问题，包括政治、医药、商业、宗教等方面的问题，都与数学有着不可分割的联系。我希望这个事实有助于你接受我上文中介绍的那个重要观点。同时，了解这个观点还可以帮助你培养更敏锐的洞察力。

不过，如果那名学生非常精明，即使我真的在课堂上苦口婆心地劝导，她仍然会心存疑惑。

“老师，你的话听起来很有道理。”她会说，“但是，太抽象了。你刚才说掌握了数学知识之后，本来有可能做错的事，现在不会出错了。但是，哪些事情会是这样的呢？能不能举一个真实的例子？”

这时候，我会给她讲亚伯拉罕 · 瓦尔德（Abraham Wald）与失踪的弹孔这个故事。

亚伯拉罕 · 瓦尔德与失踪的弹孔

同很多的“二战”故事一样，这个故事讲述的也是纳粹将一名犹太人赶出欧洲，最后又为这一行为追悔莫及。1902 年，亚伯拉罕 · 瓦尔德出生于当时的克劳森堡，隶属奥匈帝国。瓦尔德十几岁时，正赶上第一次世界大战爆发，随后，他的家乡更名为克鲁日，隶属罗马尼亚。瓦尔德的祖父是一位拉比，父亲是一位面包师，信奉犹太教。瓦尔德是一位天生的数学家，凭借出众的数学天赋，他被维也纳大学录取。上大学期间，他对集合论与度量空间产生了深厚的兴趣。即使在理论数学中，集合论与度量空间也算得上是极为抽象、晦涩难懂的两门课程。

但是，在瓦尔德于 20 世纪 30 年代中叶完成学业时，奥地利的经济正处于一个非常困难的时期，因此外国人根本没有机会在维也纳的大学中任教。不过，奥斯卡 · 摩根斯特恩（Oskar Morgenstern）给了瓦尔德一份工作，帮他摆脱了困境。摩根斯特恩后来移民美国，并与人合作创立了博弈论。1933 年时，摩根斯特恩还是奥地利经济研究院的院长。他聘请瓦尔德做与数学相关的一些零活儿，所付

的薪水比较微薄。然而，这份工作却为瓦尔德带来了转机，他进入了考尔斯经济委员会（该经济研究院当时位于科罗拉多州的斯普林斯市）。尽管政治气候越发糟糕，但是瓦尔德并不愿意彻底放弃理论数学的研究。纳粹攻克奥地利，让瓦尔德更加坚定了这一决心。在科罗拉多就职几个月之后，他得到了在哥伦比亚大学担任统计学教授的机会。于是，他再一次收拾行装，搬到了纽约。

从此以后，他被卷入了战争。

在第二次世界大战的大部分时间里，瓦尔德都在哥伦比亚大学的统计研究小组（SRG）中工作。统计研究小组是一个秘密计划的产物，它的任务是组织美国的统计学家为“二战”服务。这个秘密计划与曼哈顿计划（Manhattan Project）[①]有点儿相似，不过所研发的武器不是炸药，而是各种方程式。事实上，统计研究小组的工作地点就在曼哈顿晨边高地西 118 街 401 号，距离哥伦比亚大学仅一个街区。如今，这栋建筑是哥伦比亚大学的教工公寓，另外还有一些医生在大楼中办公，但是在 1943 年，它是“二战”时期高速运行的数学中枢神经。在哥伦比亚大学应用数学小组的办公室里，很多年轻的女士正低着头，利用“马前特”桌面计算器计算最有利于战斗机瞄准具锁定敌机的飞行曲线公式。在另一间办公室里，来自普林斯顿大学的几名研究人员正在研究战略轰炸规程，与其一墙之隔的就是哥伦比亚大学统计研究小组的办公室。

但是，在所有小组中，统计研究小组的权限最大，影响力也最大。他们一方面像一个学术部门一样，从事高强度的开放式智力活动，另一方面他们都清楚自己从事的工作具有极高的风险性。统计研究小组组长艾伦·沃利斯（W. Allen Wallis）回忆说：“我们提出建议后，其他部门通常就会采取某些行动。战斗机飞行员会根据杰克·沃尔福威茨（Jack Wolfowitz）的建议为机枪混装弹药，然后投入战斗。他们有可能胜利返回，也有可能再也回不来。海军按照亚伯·基尔希克（Abe Girshick）的抽样检验计划，为飞机携带的火箭填装燃料。这些火箭爆炸后有可能会摧毁我们的飞机，把我们的飞行员杀死，也有可能命中敌机，干掉敌人。”

① 曼哈顿计划是第二次世界大战期间由美国牵头，英国、加拿大共同参与的一项核武器研发计划。——译者注

数学人才的调用取决于任务的重要程度。用沃利斯的话说，“在组建统计研究小组时，不仅考虑了人数，还考虑了成员的水平，所选调的统计人员都是最杰出的。”在这些成员中，有弗雷德里克·莫斯特勒（Frederick Mosteller），他后来为哈佛大学组建了统计系；还有伦纳德·萨维奇（Leonard Jimmie Savage）①，他是决策理论的先驱和贝叶斯定理的杰出倡导者。麻省理工学院的数学家、控制论的创始人诺伯特·维纳（Norbert Wiener）也经常参加小组活动。在这个小组中，米尔顿·弗里德曼（Milton Friedman）这位后来的诺贝尔经济学奖得主只能算第四聪明的人。

小组中天赋最高的当属亚伯拉罕·瓦尔德。瓦尔德是艾伦·沃利斯在哥伦比亚大学就读时的老师，在小组中是数学权威。但是在当时，瓦尔德还是一名“敌国侨民”，因此他被禁止阅读他自己完成的机密报告。统计研究小组流传着一个笑话：瓦尔德在用便笺簿写报告时，每写一页，秘书就会把那页纸从他手上拿走。从某些方面看，瓦尔德并不适合待在这个小组里，他的研究兴趣一直偏重于抽象理论，与实际应用相去甚远。但是，他干劲儿十足，渴望在坐标轴上表现自己的聪明才智。在你有了一个模糊不清的概念，想要把它变成明确无误的数学语言时，你肯定希望可以得到瓦尔德的帮助。

于是，问题来了。我们不希望自己的飞机被敌人的战斗机击落，因此我们要为飞机披上装甲。但是，装甲会增加飞机的重量，这样，飞机的机动性就会减弱，还会消耗更多的燃油。防御过度并不可取，但是防御不足又会带来问题。在这两个极端之间，有一个最优方案。军方把一群数学家聚拢在纽约市的一个公寓中，就是想找出这个最优方案。

军方为统计研究小组提供了一些可能用得上的数据。美军飞机在欧洲上空与敌机交火后返回基地时，飞机上会留有弹孔。但是，这些弹孔分布得并不均匀，机身上的弹孔比引擎上的多。

① 关于萨维奇，这里有必要告诉大家他的一些逸事。萨维奇的视力极差，只能用一只眼睛的余光看东西。他曾经耗费了6个月的时间来证明北极探险中的一个问题，其间仅以肉糜饼为食。

飞机部位	每平方英尺[①]的平均弹孔数
引擎	1.11
机身	1.73
油料系统	1.55
其余部位	1.80

军官们认为，如果把装甲集中装在飞机最需要防护、受攻击概率最高的部位，那么即使减少装甲总量，对飞机的防护作用也不会减弱。因此，他们认为这样的做法可以提高防御效率。但是，这些部位到底需要增加多少装甲呢？他们找到瓦尔德，希望得到这个问题的答案。但是，瓦尔德给出的回答并不是他们预期的答案。

瓦尔德说，需要加装装甲的地方不应该是留有弹孔的部位，而应该是没有弹孔的地方，也就是飞机的引擎。

瓦尔德的独到见解可以概括为一个问题：飞机各部位受到损坏的概率应该是均等的，但是引擎罩上的弹孔却比其余部位少，那些失踪的弹孔在哪儿呢？瓦尔德深信，这些弹孔应该都在那些未能返航的飞机上。胜利返航的飞机引擎上的弹孔比较少，其原因是引擎被击中的飞机未能返航。大量飞机在机身被打得千疮百孔的情况下仍能返回基地，这个事实充分说明机身可以经受住打击（因此无须加装装甲）。如果去医院的病房看看，就会发现腿部受创的病人比胸部中弹的病人多，其原因不在于胸部中弹的人少，而是胸部中弹后难以存活。

数学上经常假设某些变量的值为 0，这个方法可以清楚地解释我们讨论的这个问题。在这个问题中，相关的变量就是飞机在引擎被击中后不会坠落的概率。假设这个概率为零，表明只要引擎被击中一次，飞机就会坠落。那么，我们会得到什么样的数据呢？我们会发现，在胜利返航的飞机中，机翼、机身与机头都留有弹孔，但是引擎上却一个弹孔也找不到。对于这个现象，军方有可能得出两种分析结果：要么德军的子弹打中了飞机的各个部位，却没有打到引擎；要么引擎就是飞机的死穴。这两种分析都可以解释这些数据，而第二种更有道理。因此，需要加装装甲的是没有弹孔的那些部位。

① 1 平方英尺≈0.093 平方米。——编者注

美军将瓦尔德的建议迅速付诸实施，我无法准确地说出这条建议到底挽救了多少架美军战机，但是数据统计小组在军方的继任者们精于数据统计，一定很清楚这方面的情况。美国国防部一直认为，打赢战争不能仅靠更勇敢、更自由和受到上帝更多的青睐。如果被击落的飞机比对方少 5%，消耗的油料低 5%，步兵的给养多 5%，而所付出的成本仅为对方的 95%，往往就会成为胜利方。这个理念不是战争题材的电影要表现的主题，而是战争的真实写照，其中的每一个环节都要用到数学知识。

瓦尔德拥有的空战知识、对空战的理解都远不及美军军官，但他却能看到军官们无法看到的问题，这是为什么呢？根本原因是瓦尔德在数学研究过程中养成的思维习惯。从事数学研究的人经常会询问："你的假设是什么？这些假设合理吗？" 这样的问题令人厌烦，但有时却富有成效。在这个例子中，军官们在不经意间做出了一个假设：返航飞机是所有飞机的随机样本。如果这个假设真的成立，我们仅依据幸存飞机上的弹孔分布情况就可以得出结论。但是，一旦认识到自己做出了这样的假设，我们立刻就会知道这个假设根本不成立，因为我们没有理由认为，无论飞机的哪个部位被击中，幸存的可能性是一样的。用数学语言来说，飞机幸存的概率与弹孔的位置具有相关性，相关性这个术语我们将在第 15 章讨论。

瓦尔德的另一个长处在于他对抽象问题研究的钟爱。曾经在哥伦比亚大学师从瓦尔德的沃尔福威茨说，瓦尔德最喜欢钻研的"都是那些极为抽象的问题"，"对于数学他总是津津乐道，但却对数学的推广及特殊应用不感兴趣"。

的确，瓦尔德的性格决定了他不大可能关注应用方面的问题。在他的眼中，飞机与枪炮的具体细节都是花里胡哨的表象，不值得过分关注。他所关心的是，透过这些表象看清搭建这些实体的一个个数学原理与概念。这种方法有时会导致我们对问题的重要特征视而不见，却有助于我们透过纷繁复杂的表象，看到所有问题共有的基本框架。因此，即使在你几乎一无所知的领域，它也会给你带来极有价值的体验。

对于数学家而言，导致弹孔问题的是一种叫作"幸存者偏差"（survivorship bias）的现象。这种现象几乎在所有的环境条件下都存在，一旦我们像瓦尔德那

样熟悉它，在我们的眼中它就无所遁形。

以共同基金为例。在判断基金的收益率时，我们都会小心谨慎，唯恐有一丝一毫的错误。年均增长率发生 1%的变化，甚至就可以决定该基金到底是有价值的金融资产还是疲软产品。晨星公司大盘混合型基金的投资对象是可以大致决定标准普尔 500 指数走势的大公司，似乎都是有价值的金融资产。这类基金 1995~2004 年增长了 178.4%，年均增长率为 10.8%，这是一个令人满意的增长速度[①]。如果手头有钱，投资这类基金的前景似乎不错，不是吗？

事实并非如此。博学资本管理公司于 2006 年完成的一项研究，对上述数字进行了更加冷静、客观的分析。我们回过头来，看看晨星公司是如何得到这些数字的。2004 年，他们把所有的基金都归为大盘混合型，然后分析过去 10 年间这些基金的增长情况。

但是，当时还不存在的基金并没有被统计进去。共同基金不会一直存在，有的会蓬勃发展，有的则走向消亡。总体来说，消亡的都是不赚钱的基金。因此，根据 10 年后仍然存在的共同基金判断 10 年间共同基金的价值，这样的做法就如同通过计算成功返航飞机上的弹孔数来判断飞行员躲避攻击操作的有效性，都是不合理的。如果我们在每架飞机上找到的弹孔数都不超过一个，这意味着什么呢？这并不表明美军飞行员都是躲避敌军攻击的高手，而说明飞机中弹两次就会着火坠落。

博学资本的研究表明，如果在计算收益率时把那些已经消亡的基金包含在内，总收益率就会降到 134.5%，年均收益率就是非常一般的 8.9%。《金融评论》（*Review of Finance*）于 2011 年针对近 5 000 只基金进行的一项综合性研究表明，与将已经消亡的基金包括在内的所有基金相比，仍然存在的 2 641 只基金的收益率要高出 20%。幸存者效应的影响力可能令投资者大为吃惊，但是亚伯拉罕 · 瓦尔德对此已经习以为常了。

数学是常识的衍生物

年轻的读者朋友看到这里，可能会问我：哪里能用得上数学知识啊？的确，

① 公平地说，标准普尔 500 指数同期增长了 212.5%，增长速度更快。

瓦尔德是一位数学家，他在解决弹孔问题时也表现得很睿智，但是这跟数学有关系吗？他们产生这样的疑问是有道理的。在瓦尔德的回答里，我们没有看到三角恒等式和积分，也看不到任何不等式和公式。

其实，瓦尔德真的用到了某些公式。但是，我在讲述这个故事时把这些公式略去了，因为我现在写的这个部分仅仅是本书的引言部分。在为一名幼童介绍人类繁衍问题的书中，引言部分显然不能详细地告诉他们婴儿是如何进入妈妈的肚子的。我们很可能会这样说："自然界中的所有东西都会变化。到了秋天，树会落叶，等到了春天，它们又会变得郁郁葱葱。蛹里的幼虫在破茧而出后会变成五彩斑斓的蝴蝶，你也是自然界的一部分，因此……"

因此，我在引言部分采用了同样的方法。

然而，我们毕竟都是成年人了，所以，我稍稍偏离主题，从瓦尔德的真实报告中抽取一页让大家看看。

……可以得出 Q_i 的下限。在这里，我们假设由 q_i 减少至 q_{i+1} 时，上下两端的极限值是确定的。因此，我们可以得出 Q_i 的上限和下限。

假设

$\lambda_1 q_1 \leqslant q_{i+1} \leqslant \lambda_2 q_1$,

其中，$\lambda_1<\lambda_2<1$，且表达式

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_0 \quad \text{(A)}$$

成立。

上述表达式难以求出具体的解，但是在 $i<n$ 时，我们可以根据下列步骤得出 Q_i 的上限和下限的近似值。所采用的假定数据集为

$a_0=0.780$　$a_3=0.010$

$a_1=0.070$　$a_4=0.005$

$a_2=0.040$　$a_5=0.005$

$\lambda_1=0.80$　$\lambda_2=0.90$

条件A满足，因为通过替换

$$0.07+\frac{0.04}{0.8}+\frac{0.01}{0.8^3}+\frac{0.005}{0.8^6}+\frac{0.005}{0.8^{10}}=0.205\ 29$$

小于

$1-a_0$=0.22。

Q_i的下限

第一步要解方程式66。在这一步，我们需要找出下列4个方程式的正数根g_0、g_1、g_2和g_3。

希望大家看完之后不会头晕眼花。

瓦尔德的独到见解其实根本不需要以上述形式表达。我们没有用到任何数学概念，也可以把这个问题解释得一清二楚。因此，学生们提出的问题确实有道理。数学到底是什么？仅仅是一些常识性的东西吗？

是的，数学就是一些常识。从某个基础层面看，这是毫无疑问的。你有5件物品，再加上7件，跟你有7件物品再加上5件，结果毫无区别，你能解释这是为什么吗？你无法解释，因为在思考把不同的物品合并到一起的问题时，我们就是这样做的。数学家们经常会就常识已经了解的现象给出不同的名称。我们不会说“把这些物品加上那些物品，与把那些物品加上这些物品，结果是相同的”，而会说“加法具有交换性”。由于我们青睐各种数学符号，因此我们有时会这样写：

对于任意的a与b，有$a+b=b+a$。

尽管这样的公式看上去过于正式，但实际上我们所讨论的内容是每个孩子都清楚的事实。

乘法的情况稍有不同，但下面这个公式看上去与上面的公式非常相似：

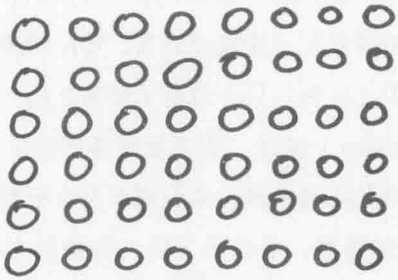
对于任意的a与b，有$a\times b=b\times a$。

这个句子所表达的意思不像加法交换律那样，让人一看立刻就会说：“是啊。”

两个6件套的物品与6个两件套的物品总数相等，这是一种“常识”吗?

也许算不上常识，却可以变成一种常识。在我刚学数学时发生的一件事，让我至今记忆犹新。我那时大约6岁，我躺在父母房间的地板上，脸贴着长绒地毯，眼睛盯着房间里的立体声音响，音响播放的可能是甲壳虫乐队的蓝版专辑（Blue Album）第二面的歌曲。在20世纪70年代，立体声音响都有刨花板做的面板，在侧面凿有气孔。这些气孔排列成矩形，每行有8个，每列有6个。我平躺在那儿，看着这些气孔——6行8列。我一边上下左右打量着这些气孔，一边翻来覆去地琢磨：6行，每行8个孔；8列，每列6个孔。

突然，我明白了：每列6个、共8列，与每行8个、共6行的总数一样多。没有人告诉我这个规律，但我知道结果就是这样。因为无论你怎么数，气孔的数量都不变。



我父母的立体声音响，1977年

我们在教授数学时，往往会告诉学生们很多法则。学生们按部就班地学习这些法则，而且必须按照老师的指示来学习，否则就会得C−。其实，他们所学的并不能被称为数学，数学研究的应该是事物的某些必然规律。

坦率地说，并不是所有的数学知识都像加法、乘法那样，凭直觉就能轻而易举地掌握。比如，我们不能借助常识来学习微积分。但是，即使是微积分，也是由常识演变而来的。艾萨克·牛顿（Isaac Newton）将我们对直线运动物体的物理直觉加以整理，把它变成一种形式主义的产物，对运动进行了普适性的数学描述。只要我们掌握了牛顿的这套理论，就可以解决那些可能令我们束手无策的难题。同样，我们的大脑有一种先天能力，可以评判某种结果发生的可能性。但

是，这种能力非常弱，在评判发生可能性极低的事件时更加不可靠。在这种情况下，我们需要适度地用一些可靠的原理与技术手段去辅助我们的直觉，于是概率这种数学理论应运而生。

数学界使用的交流语言非常特殊，功能十分强大，可以准确、方便地传递复杂的内容。但是，由于其他人对这套语言并不熟悉，因此他们以为数学家的思维方式与普通人大相径庭。事实上，这样的想法大错特错。

掌握了数学知识，就像给常识装上了核能驱动的假肢，可以让我们走得更远、更快。尽管数学的功能十分强大，数学的符号体系与抽象性有时让人难以理解，但是数学思维与我们思考实际问题的方法并无多大区别。大家可以想象钢铁侠用拳头在砖墙上砸出一个洞的场景，这个方法有助于我们理解数学思维的特点。一方面，托尼·史塔克（Tony Stark）砸穿砖墙的力量并非来自他的肌肉，而是来自一套精准的同步伺服系统，这套伺服系统的动力由一个小型贝塔粒子发电机提供。另一方面，对于托尼·史塔克而言，他所做的就是砸墙这个动作，跟没有装备时的砸墙动作并无区别，只不过有了装备之后，难度变小了。

克劳塞维茨（Clausewitz）说过："数学就是常识的衍生物。"

如果没有数学帮助我们弄清条理，常识有可能会把我们引入歧途。前面说的美国军官就是受到常识的误导，准备给飞机上防护能力已经很强的部位加装装甲。但是，尽管数学具有很强的条理性，如果仅凭抽象推理，而不经常性地辅以我们在数量、时间、空间、运动、行为及不确定性等方面的直觉感知，也就是说脱离了常识的帮助，那么，数学领域的任何活动都将变成循规蹈矩地生搬书本知识，不会产生任何有益的结果。换言之，这样的数学就像学生们在学习微积分时所发的牢骚一样，毫无意义可言。

这是非常危险的。1947 年，约翰·冯·诺依曼（John von Neumann）在他的论文《数学家》（*The Mathematician*）中发出警告：

> 如果数学这门学科逐步偏离现实生活的经验，并且渐行渐远，以至于第二代和第三代数学人无法在"现实生活"中萌生某些想法并直接受到启迪，那么我们将面临非常严重的威胁。它会在唯美的道路上越走越远，演变成