非线性波动模型的相干结构及其相互作用

作 者：张解放
专 业：流体力学
导 师：刘宇陆

上海大学出版社
·上 海·

2004 年上海大学博士学位论文

非线性波动模型的相干结构及其相互作用

作　者：张解放
专　业：流体力学
导　师：刘宇陆

上海大学出版社
· 上海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

Coherent Structures and Interactions of Nonlinear Wave Models

Candidate: Zhang Jie-fang
Major: Fluid Mechanics
Supervisor: Prof. Liu Yu-lu

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	缪国平	教授，上海交通大学	200030
委员：	黄国翔	教授，华东师范大学物理系	200062
	盛正卯	教授，浙江大学物理系	310027
	陶明德	教授，复旦大学	200433
	戴世强	教授，上海大学	200072
	刘曾荣	教授，上海大学	200444
导师：	刘宇陆	教授，上海大学	200072

评阅人名单：

戴世强	教授，上海大学	200072
高以天	教授，北京航天航空大学	100083
方海平	教授，中国科学院上海应用物理研究所	201800

评议人名单：

盛正卯	教授，浙江大学物理系	310027
楼森岳	教授，上海交通大学物理系	200030
黄国翔	教授，华东师范大学物理系	200062
王道增	教授，上海大学	200072
李志斌	教授，华东师范大学计算系	200062
廖世俊	教授，上海交通大学力学系	200030

答辩委员会对论文的评语

非线性波动是一类普遍存在于物理、力学以及生物等系统的自然现象。作者在广泛调研和阅读大量国内外文献的基础上，以 2+1 维非线性波动模型作为博士论文研究课题，选题具有前沿性。作者在 2+1 维非线性波动模型的求解方法、相干结构构造以及相互作用性质等方面作了大量的研究工作。主要成果和创新性进展如下：

(1) 拓广了 Hirota 双线性方法的应用，求解了 2+1 维非线性 Schrödinger 模型、Maccari 模型及破裂非线性波动模型，得到了具有不同特征、含任意函数的广义平面相干孤子结构；

(2) 改进和发展了 Painlevé 截断展开法和齐次平衡法，使其可用于 2 + 1 维非线性方程的变量分离求解，并首次得到了 2+1 维的长波短波共振作用模型、Nizhnik-Novikov-Veselov 模型及色散长波模型的变量分离新解；

(3) 拓展了形变映射方法，给出了获得 2+1 维非线性波动模型双周期迭加解的有效途径；

(4) 研究了半线孤子、平面相干孤子、多团解、环孤子、呼吸子、混沌斑图、分形斑图、褶皱波以及双周期波，揭示了它们的 2+1 维相干结构，并结合图形分析方法，深入探讨了它们的基本特征；

(5) 研究了不同类相干结构的相互作用问题，包括弹性碰撞和非弹性碰撞，分析了 2+1 维相干结构的产生、湮灭、分裂和聚合等现象，得到了一些有意义的新结果。

论文研究方法正确，工作具有创新性，表明作者在本学科领域已经掌握坚实宽广的基础理论和系统深入的专门知识，具有较强的独立从事科研工作的能力。论文行文流畅，条理清晰。答辩过程中，表达简洁明了，回答问题正确。答辩委员会经讨论一致认为该论文达到了博士学位论文的要求，是一篇优秀的博士论文。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票（六票）一致通过该生的博士论文答辩，建议授予博士学位。

答辩委员会主任：缪国平

2004 年 2 月 6 日

摘 要

孤立波，作为一种特殊的相干结构，反映了一类稳定的自然波动现象．本学位论文以源于实际水波和其它物理问题的 $2+1$ 维 (二个空间变量，一个时间变量) 非线性波动模型 (方程) 为研究对象，深入研究了它们的求解问题，揭示出 $2+1$ 维非线性波动模型不仅蕴涵比 $1+1$ 维非线性波动模型更加丰富的相干结构，而且具有多种不同方式的相互作用性质．主要工作如下：

第一部分：研究 $2+1$ 维非线性波动模型的求解问题．在三个方面展开了工作：

(1) 利用 Hirota 双线性方法进一步研究了 $2+1$ 维 Schrödinger 方程，$2+1$ 维 Maccari 方程和 $2+1$ 维破裂非线性波动方程，获得了具有不同特征并带有任意函数的广义 dromion 结构；

(2) 反散射方法可以看成是非线性波动问题中的 Fourier 变换法，但分离变量法对非线性波动问题的推广直到最近才有所突破．变量分离法有效地解决了 $2+1$ 维非线性波动模型的求解问题．我们分别利用 Painlevé 截断展开方法和齐次平衡方法实现了多类 $2+1$ 维非线性波动模型，如 $2+1$ 维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程，$2+1$ 维色散长波方程，$2+1$ 维长波短波共振作用方程，$2+1$ 维长色散波方程，$2+1$ 维广义 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程等的变量分离求解，给出了一些新的结果；

(3) 直接代数法在孤立波的求解中具有重要的地位，由于计算机符号软件的广泛应用，对直接代数法的完善、发展和应用起了很好的作用. 我们对近年创立的 Jacobi 椭圆函数方法和形变映射方法作了介绍和讨论，并具体研究了多类 $2+1$ 维非线性波动模型，如 $2+1$ 维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程，$2+1$ 维长短波共振方程，$2+1$ 维破裂孤子方程，$2+1$ 维非线性 Burgers 方程，$2+1$ 维 Wu-Zhang 方程，$2+1$ 维 Schrödinger 方程，$2+1$ 维 Boussinesq 方程，给出了双周期波结构和迭加椭圆函数周期解.

第二部分：研究不同类型的 $2+1$ 维相干结构的构造和它们相互作用问题. 在诸多专家学者相关研究工作的启示和基础上，从 $2+1$ 维非线性波动方程的变量分离通用解表示出发，通过适当地选择这些任意函数，构造起 $2+1$ 维非线性波动模型具有十分丰富的相干结构，包括多线孤立波解、多 lump 解、多 solitoff 解、多 dormion 解、多 compacton 解、多 peakon 解、多 foldon 解、格子 dormion 解、振荡型 dormion 解、环孤子解、运动和静止呼吸子解、瞬子解、双周期波斑图结构、混沌斑图结构、分形斑图结构等等. 通过利用 Maple, Mathematica 等符号软件处理复杂的求解运算，极大地提高了研究工作的深入和效率. 借助图形分析和数学解析法，对各种相干结构进行了分析研究，总结归纳了已经揭示的各类相干结构的特征和数学机理，而且许多是 $1+1$ 维情形所没有的现象. Dromion 为所有方向都呈指数衰减的相干局域结构，可以由直线孤子，也可以由曲线孤子形成，不仅局域在直线或曲线的交点，也可以存在与曲线的近邻点上. Solitoff 是非局

域的，除了一个特定方向外，其他所有方向都为指数衰减，二直线孤子由于共振的影响变为一半直线孤子 -solitoff 解. Dromion 格子为多 dromion 点阵. 振荡形 dromion 解在空间某一方向上产生振荡. 多团解，环孤子为非点状的局域激发，环孤子解在闭合曲线的内部不为零，闭合曲线外部指数衰减. 呼吸子无论幅度、形状、峰间的距离，峰的数目都进行了呼吸. 瞬子的幅度随时间的变化而变化. 周期性孤子解在空间分别呈现周期性特征. 尖峰孤立子解在波峰处有一个尖点，其一阶导数不连续. 紧孤立子解就是那些在某个有限区域上高度不为零，而在这个有限区域之外其高度为零的一类特殊行波. 褶皱孤立波，可以在两个方向同时褶皱，也可以在一个方向褶皱. 双周期波斑图结构在两个空间方向都表现为周期性，而且发现周期、振幅都可以变化. 混沌斑图结构和分形斑图结构展示出孤立波形态中的混沌和分形特征. 通过图形分析方法，本文还考察了多种 2 + 1 维相干结构之间的相互作用过程，发现 2 + 1 维相干结构的相互作用性质要比 1 + 1 维孤子丰富的多，其相互作用可以是弹性碰撞、非弹性碰撞和完全非弹性碰撞，并具有产生、湮没、分裂和聚合等等现象.

关键词：非线性，相干结构，相互作用

Abstract

Solitary wave, which is a special coherent structures, describes a kind of stable nature wave phenomena. In this dissertation, the exact solutions of the 2 + 1-dimensional (two spatial-dimensions and one time dimension) nonlinear wave models (equations) which originate from practical water wave and other physical problems are investigated by means of symbolic computation and the more abundant localized and non-localized coherent structures in 2 + 1-dimensional nonlinear wave models are revealed as well as the rich interaction properties for these structures are discussed.

Part I is devoted to investigate exact solutions of 2 + 1-dimensional nonlinear wave equations.

(1) The Hirota bilinear method is improved and investigated several 2 + 1 dimensional nonlinear wave models, such as 2 + 1-dimen-sional Schrödinger equation, 2 + 1-dimensional Maccari equation and 2 + 1-dimensional breaking soliton equation, the generalized dromion structures with arbitrary functions are obtained and some characteristics are found;

(2) The variable separation method is established to deal with 2 + 1-dimensional nonlinear wave models. The Painlevé truncated

expansion approach and homogenous balance approach are employed respectively to explore the variables separation solution of $2+1$-dimensional nonlinear wave models, such as $2+1$-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation, $2+1$-dimensional dispersive long wave equation, $2+1$-dimensional resonant interaction between long and short wave equation, $2+1$-dimensional long dispersive wave equation, $2+1$-dimensional generalized Nizhnik-Novikov-Veselov equation, and a quite "universal" variable separation solution formula with several arbitrary function which is valid for a large classes of $2+1$- dimensional nonlinear wave models is obtained;

(3) The direct algebraic methods are generalized to solving $2+1$-dimensional nonlinear wave models. The Jacobi elliptic function method and formal mapping method are introduced and discussed respectively and several class of $2+1$-dimensional nonlinear wave models , such as $2+1$-dimensional breaking soliton equation, $2+1$-dimensional resonant interaction between long and short wave equation, $2+1$-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation, $2+1$-dimensional Burgers equation, $2+1$-dimensional Wu-Zhang equation, $2+1$-dimensional Schrödinger equation, $2+1$-dimensional Bou-ssinesq equation are studied by making use of Maple and mathematica. Their doubly periodic wave structures and line superposition periodic solutions of Jacobi elliptic functions which will change in their amplitudes, shapes and period are obtained.

PartII is devoted to reveal the abundant coherent structures and interaction properties contained in $2+1$-dimensional nonlinear wave equations. From the 'universal'variable separation solution of $2+1$-dimensional nonlinear wave models and by introducing suitably these arbitrary functions, we constructed the considerable abundant coherent structures, including multi-line solitary wave solutions, multi-lump solutions, multi-solitoff solutions, multi-dromion solutions, multi-compacton solutions, multi-peakon solutions, multi-foldon solutions, lattice dromiln solutions, oscillating dromion solutions, ring-soliton solutions, motive and static breather solutions, instanton solutions, doubly periodic wave solutions, chaos pattern structures, fractal pattern structures and so on. The development of computer algebra and the application of Maple and Mathematica improve our study and enhance efficiency greatly. Based on the plots and mathematical analysis, we explored all this exotic coherent structures. Dromions are localized solutions decaying exponentially in all directions, which can be driven not only by straight line solitons but also by curved line solitons and can be located not only at the cross points of the lines but also at the closed points of the curves. The solitoff solution decays exponentially in all directions except for a preferred one, two straight line soliton become only one half straight line soliton because of the resonance effect. The dromion lattice is a special type of multi-dromion solutions. The oscillating dromion solutions is a dromion oscillating in spatial dimensional direction. The lumps and ring soliton solutions are not the point-like localized excitations, and ring soliton solutions are not equal to zero identically at some closed curves and decay exponentially away from the closed curves. The breathers may breath in their amplitudes, shapes, distances among the peaks and even the number of the peaks. The amplitude(s) of the instanton will change together with the time. Peakon has a peak point at wave peak in which one order derivative is not continuous. Compacton with finite wavelength is a class of solitary wave with compact support. Foldon is a class of solitary wave with multi valued which can be folded not only in one direction but also in two directions. The periodic solitons show periodic characteristic in space. The doubly periodic wave pattern structures display periodic change in two space direction. The chaotic pattern structures and fractal pattern structures reveal chaotic and fractal characteristic in solitary wave. We also investigated the interaction behaviors between (among) various kinds of $2+1$-dimensional coherent structures and found their interaction properties can be elastic, non-elastic or completely non-elastic. $2+1$-dimensional coherent structures are not only more abundant characteristic than $1+1$-dimensions cases, but also possess fission, fusion, growing and decaying phenomenon.

Keywords: Nonlinear. coherent structure, interaction

目 录

第一章 绪 论

1.1 波动问题的研究概述

波动是自然界中最常见的现象之一，波动问题是一个长久不衰的科学论题 [1–7]. 它的独特之处在于人们可以在任何技术水平上研究它，其理论、方法及其应用遍及包括物理学、数学、力学、光学、化学、生物学、地理学等等自然科学领域，而且也已渗透到经济学和社会学等等社会科学领域. 水波的特性以及声、光传播特征，是日常经验中所熟悉的. 而著名的湍流现象和微观粒子的波粒二象性也与其密切相关，不过至今还没有得到最后的和彻底的解决.

为了从理论上了解波动现象，以及解决出现的实际问题，数学的概念及其技巧已经有了相当丰富的发展. 广义地讲，如果一个偏微分方程具有能描述波动现象的解，那么这个方程就被称为波动方程. 一般情况下，波动方程同时含有时间和空间变量，因此它是一类重要的时空动力学系统. 早期，由于人类认识的局限、研究手段的限制和处理实际问题的要求精度不高，往往将一个实际的波动问题进行简单的和理想化的假设，从而得出较容易研究的线性化模型，如弦振动方程、热传导方程等. 线性化模型满足