国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列·22

王竹溪遗著选集

第三分册

量子电动力学
重正化理论大要

王竹溪 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

经典系列·22

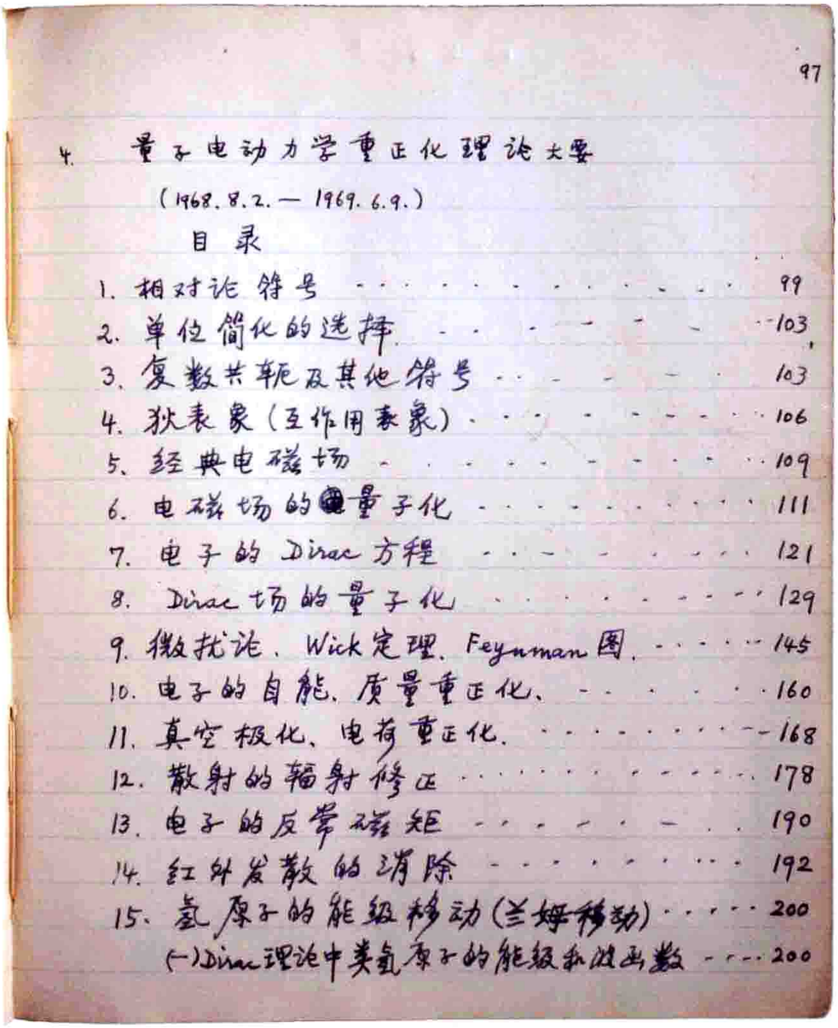
王竹溪遗著选集

第三分册

量子电动力学
重正化理论大要

王竹溪 著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS



97

4. 量子电动力学重正化理论大要

(1968.8.2.—1969.6.9.)

目录

《量子电动力学重正化理论大要》原稿笔记本一之97页

7. 量子电动力学重正化理论大要

（接微分方程笔记本 230 页之后）

（四）磁矩部分（续）

令 $p=\sigma t$，$p'=\sigma t'$，得 $\left(x=\frac{t^2+t'^2}{2tt'}\right)$

$$(\Delta E_a)_m = -\frac{6}{m}2\pi e^2\alpha\sigma^5\iint_0^\infty dt\,dt'\,tt'\Big\{\overline{F}_1(\sigma t)G_1(\sigma t')\big[tQ_{l_2}(x)-t'Q_{l_1}(x)\big] + \overline{G}_1(\sigma t)F_1(\sigma t')\big[tQ_{l_1}(x)-t'Q_{l_2}(x)\big]\Big\} \tag{339}$$

现在具体用到 2S 态和 2P 态。

$2S_{1/2}$ 态：F 和 G 见 204 页 (284)：

$$(\Delta E_a)_m = \frac{4e^2\alpha^4 m}{\pi^3}\iint_0^\infty \frac{dt\,dt'\,t^2t'^2(1-t^2)(1-t'^2)}{(1+t^2)^3(1+t'^2)^3} = \frac{4e^2\alpha^4 m}{\pi^3}\left[\int_0^\infty \frac{dt\,t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\right]^2$$

$$= \frac{e^2\alpha^4 m}{16\pi} \Longrightarrow \left(m \text{ 改为 } \frac{mc^2}{\hbar} \text{ 就变成频率 } \nu\ 3\right)$$

$\rightarrow 50.863\,26$ MHz $\sim 7.706\,4042$
$+314.$　　　　$+268$

（用 3　$e^2=\alpha$，$Z=1$，$\alpha\sim\overline{3}.863\,1564 = -2.136\,8436$，$\rightarrow 137.0388$
$+89.$
$\alpha^5\sim\overline{11}.315\,7820 = -10.684\,2180$ ）
$+444.$

$m\sim\overline{28}.959\,4748$
$c^2\sim 20.953\,6415.$
$\hbar\sim\overline{27}.821\,2243$
$mc^2/\hbar\sim 20.091\,8920.$
-175

$20.091\,8920.$
$\overline{11}.315\,7820$
$\pi\sim -.497\,1499.$
$16\sim -1.204\,1200.$
$7.706\,4042$

$-.477\,1213$
$7.229\,2829$
$+2604$

$2P_{1/2}$ 态：

$$(\Delta E_a)_m = \frac{8e^2\alpha^4 m}{3\pi^3}(I_1 - I_2),$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\iint\frac{dt\,dt'\,t^4t'^4(t'^2-t^2)^2}{(1+t^2)^3(1+t'^2)^3}\ln\left|\frac{t+t'}{t-t'}\right|$$

$$I_2 = \iint\frac{dt\,dt'\,t^2t'^2(t^2+t'^2)}{(1+t^2)^3(1+t'^2)^3} = \frac{3\pi^2}{128} = \frac{3\pi^2}{8\times16}$$

《量子电动力学重正化理论大要》原稿笔记本二之63页

内　容　简　介

本书是我国著名理论物理学家王竹溪教授的一份研究笔记，包括相对论符号、单位简化的选择、复数共轭及其他符号、狄表象（互作用表象）、经典电磁场、电磁场的量子化、电子的Dirac方程、Dirac场的量子化、微扰论、Wick定理、Feynman图、电子的自能、质量重正化、真空极化、电荷重正化、散射的辐射修正、电子的反常磁矩、红外发散的消除、氢原子的能级移动（兰姆移动）、π介子等16节，其中氢原子的能级移动（兰姆移动）这一节又分为Dirac理论中类氢原子的能级和波函数、适用于束缚态的场论微扰展开方法、求能级移动的一般公式、兰姆移动的自能部分、磁矩部分、真空极化部分等5小节，系统扼要地归纳阐述了量子电动力学的基本原理，着重并详细给出了量子电动力学重正化理论的计算. 全书概念严格准确，理路清晰明白，方法巧妙简洁，推演细致缜密，讨论普遍深入，体现了王竹溪一贯严谨与简洁的风格和品味，以及他具体细致的作风. 书中有许多精辟独到的见解，和他自己研究的结果. 特别是重正化理论，包括理论的总体思路和脉络、公式的细致推导和演算、数值的具体计算和结果，详尽到计算的数表，这是在一般量子电动力学书籍中很难见到的. 本书适合大学物理系高年级学生和研究生，以及对量子电动力学及其重正化理论有兴趣的广大读者.

目　　录①

① 本书取自王竹溪题为“量子电动力学重正化理论大要”的笔记，详见后记．在原稿目录上两行分别为标题“量子电动力学重正化理论大要”和“ (1968.8.2.—1969.6.9.) ”，见前面的彩页一．　—— 编者注

1. 相对论符号 ①

量子电动力学所研究的问题是, 电子和正电子与电磁场作用下的各种现象, 其所以是量子的, 因为电子正电子和电磁场都是量子化的. 量子电动力学比经典电动力学的范围窄些, 因为经典电动力学讨论带电粒子与电磁场相互作用下的各种现象, 而量子电动力学中带电粒子只限于电子和正电子. 在量子理论中, 各种粒子 (包括带电的和不带电的) 相互作用下的各种现象的理论称为量子场论, 即把各种粒子作为各种场. 量子场论也叫做基本粒子理论. 现在写这个大要, 限于量子电动力学的狭小范围, 其中只有电子, 正电子, 和光子这两类基本粒子.

量子电动力学中必须用狭义相对论. 这是因为电子和正电子运动的速度一般是很高的, 而在电子偶产生和消灭的过程中牵涉的能量是高的. 另一方面, 电磁场本身是洛伦兹不变的.

在应用狭义相对论上, 过去在经典理论中都使用虚坐标 $x_4 = \mathrm{i}ct$, 现在在量子理论和量子电动力学中也有用这个虚坐标的. 但是在量子理论中用虚坐标有不方便的地方, 因为波函数和矩阵元都是复数, 常常要取复共轭, 而在取复共轭时 x_4 不能跟着取复共轭, 这引起不便, 也就是说有两种虚数, 一种是能取复共轭的, 一种是不能取复共轭的. 用虚坐标还有一种不方便, 那就是从理论到与实际比较时, 还需要多一步化虚数为实数的手续. 这个不方便, 在经典理论中也是存在的. 为了避免这两种不方便, 许多人就采用了在广义相对论中引进的张量分析法, 把矢量和张量的指标分两种写法, 相应于抗变张量和协变张量两种②, 抗变张量的指标在右肩, 协变张量的指标在右脚. 这时令 $x^0 = ct$, 取实数. 现在写这个大要, 采用张量分析法.

在张量分析法中, 习惯上把坐标和时间 (x, y, z, ct) 简写为 x^μ $(\mu = 1, 2, 3, 0)$, [极大多数人把 0 放在 1 的前面.] 一个抗变矢量 A^μ 与相应的协变矢量 A_μ 的关

① 原稿在本标题上一行尚有书名“量子电动力学重正化理论大要”, 现按出版编辑的风格删去. —— 编者注

② 抗变张量 (contravariant tensor) 又称逆变张量. —— 编者注

系是：

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu, \qquad A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \tag{1}$$

其中两个相同指标出现时要对它求和，就是说要对指标 ν 求和，ν 由 1 到 0. $g_{\mu\nu}$ 名为度规张量，是下列度规二次式中的系数：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}) \tag{2}$$

其中对 μ, ν 两个指标都求和． $g^{\mu\nu}$ 是从下列方程解出的：

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^{\ \sigma} = \begin{cases} 1, & \mu = \sigma, \\ 0, & \mu \neq \sigma. \end{cases} \tag{3}$$

在狭义相对论中度规 (2) 有两种选择法，一种是

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 - c^2(\mathrm{d}t)^2, \tag{4}$$

另一种是

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2. \tag{4'}$$

大多数人采用第二种 (4′), 但是本大要将采用第一种 (4), 因为这种与旧理论用虚坐标 x_4 的最相近.

两个矢量 A 和 B 的标积是

$$\begin{aligned} A \cdot B &= g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu \\ &= A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 - A^0B^0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中最后一式是用度规 (4) 的结果. [假如用度规 (4′), 则是三个负的，一个正的.] 由于用了 (4), $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 的数值是

$$\begin{aligned} &g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, g_{00} = -1, \qquad g_{12} = g_{13} = g_{10} = g_{23} = g_{20} = g_{30} = 0, \\ &g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1, g^{00} = -1, \qquad g^{12} = g^{13} = g^{10} = g^{23} = g^{20} = g^{30} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

有时为了区别指标数值 1, 2, 3 与 0, 常用拉丁字母 i, j, k, l 等代表 1, 2, 3 等字，而希腊字母 μ, ν, σ 等则代表全体四个指标 1, 2, 3 和 0. 这样， (5) 又可写为①

$$A \cdot B = A^l B^l - A^0B^0 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - A^0 B^0. \tag{7}$$

[注 I：使度规 (4) 不变的变换名洛伦兹变换， $x \to x'$ ：

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu. \tag{I.1}$$

① 原稿用下划线表示三维矢量，例如 $\underline{A}$, 这是手写体表示矢量的一种形式．手写体表示矢量的另一形式是加一箭头，例如 $\vec{A}$. 印刷体则习惯用斜黑体，即 $\underline{A} = \vec{A} = \boldsymbol{A}$. —— 编者注

为了使 (4) 不变，要求

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^{\mu}\mathrm{d}x'^{\nu}=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu},$$

即

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma}=g_{\rho\sigma}\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\sigma},$$

即

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}=g_{\rho\sigma}. \tag{I.2}$$

这可简写为

$$\Lambda^{\mathrm{T}}g\Lambda=g, \tag{I.3}$$

其中把 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}$ 都当作矩阵， Λ^{T} 是 Λ 的转置矩阵，用一正写 T 加于矩阵右肩表示转置.

由此可解得

$$\Lambda^{-1}=g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}}g. \tag{I.4}$$

根据 (3), 得

$$g^{-1}=(g^{\mu\nu}).$$

由于 $g^{\mu\nu}$ 的数值与 $g_{\mu\nu}$ 的相等，所以 $g^{-1}=g$. 这样就有

$$\Lambda^{-1}=g\Lambda^{\mathrm{T}}g. \tag{I.4$'$}$$

(I.4) 完全写出为

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\lambda}=g^{\sigma\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}g_{\mu\lambda}. \tag{I.5}$$

在 (I.2) 中取 $\rho=\sigma=0$ ：

$$(\Lambda^{0}{}_{0})^{2}=1+\Lambda^{l}{}_{0}\Lambda^{l}{}_{0}\geqslant 1. \tag{I.6}$$

由 (I.3) 取行列式，得

$$(\det\Lambda)^{2}=1,\qquad \therefore\ \det\Lambda=\pm 1. \tag{I.7}$$

(注 I 完)

2. 单位简化的选择

在相对论中常出现 c, 在量子论中常出现 $\hbar$, 为了简化公式，选择单位使

$$c = \hbar = 1.$$

长度单位不变，选时间单位使 $c = 1$, 再选质量单位使 $\hbar = 1$. 由新单位中的量回到通常单位的量须作下列变换：(左方为新单位的量，箭头右方为通常单位的量，左方不出现 c 和 $\hbar$)

$$t \longrightarrow ct\ (\text{时间}), \qquad m \longrightarrow \frac{mc}{\hbar}\ (\text{质量}), \qquad p \longrightarrow \frac{p}{\hbar}\ (\text{动量}),$$

$$E \longrightarrow \frac{E}{\hbar c}\ (\text{能量}), \qquad e \longrightarrow \frac{e}{\sqrt{\hbar c}}\ (\text{电荷}), \qquad A_\mu \longrightarrow \frac{A_\mu}{\sqrt{\hbar c}}\ (\text{电磁势}). \tag{8}$$

由此得知，在新单位中， m, p, E 的量纲都是长度的倒数， e 和 A_μ 无量纲.

本大要的电磁单位用高斯制，不用洛伦兹制，这是因为这里不用拉氏函数的变分法的缘故.

3. 复数共轭及其他符号

复数共轭用上加一横表示，如

$$c = a + \iota b, \qquad \bar{c} = a - \iota b, \tag{9}$$

虚数用希腊字母 ι 表示，以与拉丁字母 i 上多一点的相区别，拉丁字母 i 仍用来作为一般的指标①.

算符的共轭用右肩加 † 表示，如 $A^\dagger$ 为 A 的共轭算符. 矩阵也是这样，如

$$(A^\dagger)_{jl} = \overline{A_{lj}},$$

即

$$A^\dagger = \overline{A^{\mathrm{T}}},$$

右肩上 T 表示转置 (即 $(A^{\mathrm{T}})_{jl} = A_{lj}$).

微分符号 ∂_μ 是

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

并令

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu \sim \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

(注意单位使 $c = \hbar = 1$).

量子化时有

$$p_\mu \sim -\iota\partial_\mu.$$

有

$$p^0 = E, \qquad p_0 = -E.$$

所以

$$E \sim \iota\partial_0.$$

对易关系和反对易关系用 $[A, B]_\pm$：

$$[A, B]_+ = AB + BA, \qquad [A, B]_- = AB - BA. \tag{10}$$

常常把 $[A, B]_-$ 简写为② $[A, B]$. 不用 Dirac 书③ 上的泊松括号，这是因为常

---

① 现在国内习惯用正体字母 i 表示虚单位，即 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，而把斜体字母 i 用作一般的指标或变量. —— 编者注

② 也常把 $[A, B]_+$ 写为 $\{A, B\}$，见 J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **74** (1948) 1439. —— 编者注

③ P.A.M. 狄拉克，《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社，1965. 下同. —— 编者注

常要用产生和湮没算符的缘故.

关于二次量子化符号，采用通常的，以 $b^\dagger$ 为产生算符， b 为湮没算符. 不用 Dirac 书上的. 在分立谱的情形下，玻色子的对易关系为

$$[b_\alpha, b_\beta]_- = 0, \qquad [b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger]_- = 0, \qquad [b_\alpha, b_\beta^\dagger]_- = \delta_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

令

$$n_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha, \tag{12}$$

对易关系有

$$[n_\alpha, n_\beta]_- = 0, \qquad [n_\alpha, b_\beta]_- = -b_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \qquad [n_\alpha, b_\beta^\dagger]_- = b_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta}. \tag{13}$$

在连续谱情形下，把 δ 符号改为 δ 函数.

在位形空间有 ($\boldsymbol{x}$ 为三维的 x, y, z)

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha \langle \boldsymbol{x}|\alpha\rangle b_\alpha, \qquad \varphi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha b_\alpha^\dagger \langle \alpha|\boldsymbol{x}\rangle. \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x}')]_- = 0, \qquad [\varphi^\dagger(\boldsymbol{x}), \varphi^\dagger(\boldsymbol{x}')]_- = 0, \\ &[\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi^\dagger(\boldsymbol{x}')]_- = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ 是 $\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ 的简写.

各个不同数玻色子的基刃① 是

$$b_{\alpha_1}^\dagger b_{\alpha_2}^\dagger \cdots b_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle, \tag{16}$$

它的长度平方是

$$n_1! n_2! \cdots, \qquad (注意 b_\alpha|0\rangle = 0)$$

其中 n_1 是 α_i 中等于 $\alpha^{(1)}$ 的个数， n_2 是 α_i 中等于 $\alpha^{(2)}$ 的个数，等等，

$$\sum_i n_i = n.$$

在费米子情形下，令 $a_\alpha^\dagger$ 为产生算符， a_α 为湮没算符，分立谱的对易关系为

$$[a_\alpha, a_\beta]_+ = 0, \qquad [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger]_+ = 0, \qquad [a_\alpha, a_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta}. \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} &n_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha, &&[n_\alpha, n_\beta]_- = 0, \\ &[n_\alpha, a_\beta]_- = -a_\alpha \delta_{\alpha\beta}, &&[n_\alpha, a_\beta^\dagger]_- = a_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

注意 (18) 与 (12) 和 (13) 相同.

在位形空间有

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha \langle \boldsymbol{x}|\alpha\rangle a_\alpha, \qquad \psi^\dagger(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger \langle \alpha|\boldsymbol{x}\rangle. \tag{19}$$

① 态矢 ket vector 译为刃，也译为右矢. —— 编者注

$$\left.\begin{array}{ll}[\psi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x}')]_+ = 0, & [\psi^\dagger(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(\boldsymbol{x}')]_+ = 0, \\ [\psi(\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(\boldsymbol{x}')]_+ = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). & \end{array}\right\} \tag{20}$$

基刃仍然是

$$a_{\alpha_1}^\dagger a_{\alpha_2}^\dagger \cdots a_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle, \tag{21}$$

其中 α_i 没有相同的，(21) 的长度平方为 1, 并且

$$a_\alpha |0\rangle = 0.$$

4. 狄表象 (互作用表象)

量子力学常用的有三种表象，一种是 Schrödinger 表象，简称薛表象；一种是 Heisenberg 表象，简称海表象；一种是互作用表象，又叫做 Dirac 表象，简称狄表象.

薛表象： 态的刃是 $|\Psi(t)\rangle$, 与时间有关. 运动方程是

$$\iota\partial_0|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle. \tag{22}$$

若 H 与 t 无关，它的解可写为

$$|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\iota Ht}|\Psi(0)\rangle, \tag{23}$$

普遍可写为

$$|\Psi(t)\rangle = T|\Psi(0)\rangle. \tag{24}$$

在 H 与 t 无关的条件下,

$$T = \mathrm{e}^{-\iota Ht}. \tag{25}$$

海表象： 态的刃是 $|\Psi(0)\rangle$. 算符 v 在海表象中为 v_{H}, 要求

$$\langle\Phi_1(0)|v_{\mathrm{H}}|\Psi_2(0)\rangle = \langle\Phi_1(t)|v|\Psi_2(t)\rangle = \langle\Phi_1(0)|T^\dagger vT|\Psi_2(0)\rangle,$$

由于 $\Phi_1(0)$, $\Psi_2(0)$ 是任意的两态，得

$$v_{\mathrm{H}} = T^\dagger vT. \tag{26}$$

但按照量子力学的基本原理,

$$\langle\Phi(0)|\Psi(0)\rangle = \langle\Phi(t)|\Psi(t)\rangle,$$

即

$$T^\dagger T = 1. \tag{27}$$

由 (24) 看出， T 有倒数，故得

$$T^\dagger = T^{-1}. \tag{28}$$

因此 T 是幺正的. 把 (28) 代入 (26), 得

$$v_{\mathrm{H}} = T^{-1}vT. \tag{29}$$

对 v_{H} 求对 t 的微商，由 (26) 得 (设 v 不显含 t)

$$\iota\partial_0 v_{\mathrm{H}} = (\iota\partial_0 T^\dagger)vT + T^\dagger v(\iota\partial_0 T).$$

又由 (24) 和 (22) 得

$$\iota\partial_0 T = HT. \tag{30}$$

取共轭，得

$$-\iota\partial_0 T^\dagger = T^\dagger H, \qquad (H^\dagger = H) \tag{31}$$

于是由 (26) 有

$$\begin{aligned}\iota\partial_0 v_{\mathrm{H}} &= -T^\dagger H v T + T^\dagger v H T \\ &= [v_{\mathrm{H}}, H_{\mathrm{H}}],\end{aligned} \tag{32}$$

其中

$$H_{\mathrm{H}} = T^{-1} H T,$$

在 H 不显含 t 的情形下 T 与 H 对易，有 $H_{\mathrm{H}} = H$.

狄表象： 把 H 分为两部分 H_0 和 H_1：

$$H = H_0 + H_1, \tag{33}$$

其中 H_0 与 t 无关. 令

$$|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\iota H_0 t}|\Phi(t)\rangle, \tag{34}$$

$$v_t = \mathrm{e}^{\iota H_0 t} v \mathrm{e}^{-\iota H_0 t}. \tag{35}$$

$|\Phi(t)\rangle$ 是态的狄表象， v_t 是算符 v 的狄表象. 把 (33) 和 (34) 代入 (22), 并用 (35), 得

$$\iota\partial_0|\Phi(t)\rangle = H_{1t}|\Phi(t)\rangle. \tag{36}$$

这指出，态的运动方程只与互作用 H_1 有关，这是为什么叫做互作用表象的原因. (其中 H_{1t} 是 $\mathrm{e}^{\iota H_0 t} H_1 \mathrm{e}^{-\iota H_0 t}$, 用 (35).)

若 v 不显含 t, 则由 (35) 求得

$$\iota\partial_0 v_t = [v_t, H_0]. \tag{37}$$

这指出，算符的运动方程只与 H_0 有关，这是狄表象的极大优点.

令

$$|\Phi(t)\rangle = U(t, t_1)|\Phi(t_1)\rangle, \tag{38}$$

代入 (36), 得

$$\iota\partial_0 U(t, t_1) = H_{1t} U(t, t_1). \tag{39}$$

由 (38) 看出，

$$[U(t, t_1)]^{-1} = U(t_1, t). \tag{40}$$

由

$$\langle\Phi_1(t)|\Phi_2(t)\rangle = \langle\Phi_1(t_1)|\Phi_2(t_1)\rangle$$

得

$$[U(t,t_1)]^\dagger U(t,t_1) = 1,$$

故

$$[U(t,t_1)]^{-1} = [U(t,t_1)]^\dagger, \tag{41}$$

这指出 $U(t,t_1)$ 是幺正的 (注意 $U(t,t) = 1$ 可由 (38) 的定义看出).

由 (24), (34), (38) 得

$$U(t,t_1) = \mathrm{e}^{\iota H_0 t} T T_1^{-1} \mathrm{e}^{-\iota H_0 t_1}, \qquad (\text{在 } T \text{ 中把 } t \text{ 换为 } t_1 \text{ 即得 } T_1) \tag{42}$$

在 H 与 t 无关的情形下，用 (25), 得

$$U(t,t_1) = \mathrm{e}^{\iota H_0 t} \mathrm{e}^{-\iota H(t-t_1)} \mathrm{e}^{-\iota H_0 t_1}. \tag{43}$$

有时把 H_{1t} 写成 $H_1(t)$：

$$H_1(t) = H_{1t} = \mathrm{e}^{\iota H_0 t} H_1 \mathrm{e}^{-\iota H_0 t}. \tag{44}$$

也有时把 (35) 中 v_t 写成 $v(t)$.

5. 经典电磁场

把电磁势作为四维矢量:

$$A^\mu(x) = (A_x, A_y, A_z, \varphi).$$

洛伦兹条件是

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{45}$$

令

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

与电磁场量的关系是

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{23} = H_x, \quad F_{31} = H_y, \quad F_{12} = H_z,$$
$$F_{10} = E_x, \quad F_{20} = E_y, \quad F_{30} = E_z.$$
$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = (H_x, H_y, H_z), \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}} = (E_x, E_y, E_z).$$

令

$$j^\mu = (j_x, j_y, j_z, \rho).$$

连续方程是

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{46}$$

第一组麦氏方程:

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \tag{47}$$

这是用 A^μ 之后的恒等式.

第二组麦氏方程:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\mu. \tag{48}$$

用 A^μ 并用洛伦兹条件 (45), 由 (48) 求得

$$\Box A^\mu = -4\pi j^\mu. \qquad (\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \partial\cdot\partial = \nabla^2 - \partial_0^2) \tag{49}$$