计算方法丛书

反问题的数值解法

肖庭延 于慎根 王彦飞 著

科学出版社
www.sciencep.com

计 算 方 法 丛 书

反问题的数值解法

肖庭延　于慎根　王彦飞 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统介绍了数学物理反问题求解的正则化方法，主要包括适定与不适定问题的基本概念，反问题、不适定性及其与第一类算子方程的联系，基于算子广义逆理论的各种推广，几种提高正则解精度和计算效率的迭代正则化方法、离散正则化方法，各种正则化算法的数值实现，带有工程、物理与经济应用背景有启发性的实例，在附录中给出了最近的国内外研究成果和示范性 MALAB 语言源程序.

本书适合于数学专业科研人员、大学教师使用，亦可供从事科学和工程领域中反问题数值计算方法研究的科研人员，高等院校的教师、研究生和高年级大学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

反问题的数值解法/肖庭延，于慎根，王彦飞著. —北京：科学出版社，2003
(计算方法丛书)
ISBN 7-03-011566-X

Ⅰ. 反… Ⅱ. ①肖…②于…③王… Ⅲ. 逆问题-计算方法 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048672 号

责任编辑：陈玉琢 吕 虹/责任校对：朱光光
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年9月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2003年9月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1~2 500 字数：323 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

自 20 世纪 60 年代以来，在地球物理、生命科学、材料科学、遥感技术、模式识别、信号（图像）处理、工业控制乃至经济决策等众多的科学技术领域中，都提出了“由效果、表现（输出）反求原因、原象（输入）”的反问题，通称“数学物理反问题”. 由于此类问题有着广泛而重要的应用背景，其理论又具有鲜明的新颖性与挑战性，因而吸引了国内外许多学者从事该项研究. 迄今，它已发展成为具有交叉性的计算数学、应用数学和系统科学中的一个热门学科方向. 我国著名计算数学先躯、已故的中国科学院院士冯康教授早在 20 世纪 80 年代初期就大力提倡开展反问题数值解法的研究，对我国数学物理反问题的研究和应用产生了深远的影响.

求解数学物理反问题面临的两个本质性的实际困难是：① 原始数据可能不属于所论问题精确解所对应的数据集合（例如积分算子或微分算子的值域），因而，在经典意义下的近似解可能不存在；② 近似解的不稳定性，即：原始资料的小的观测误差（这在实际中是不可避免的）会导致近似解与真解的严重偏离. 概言之，反问题常常是不适定的，若不用特殊的方法求解，将得不到合理的解答或答案.

数学物理反问题的求解已发展了各种方法，诸如脉冲谱技术 (PST)、广义脉冲谱技术 (GPST)、最佳摄动量法、蒙特卡罗方法 (Monte Carlo method)、各种优化方法和正则化方法等；其中，最具普适性、在理论上最完备而且行之有效的方法，就是由著名学者 Tikhonov 以第一类算子 (特别是积分算子) 方程为基本数学框架，于 20 世纪 60 年代初创造性地提出、后来得到深入发展的正则化方法（或策略）. 其基本思想是：用一族与原问题相邻近的适定问题的解去逼近原问题的解. 从而，如何构造“邻近问题”而获得所谓的正则算子和正则解、如何控制与原问题的“邻近程度”而决定与原始资料的误差水平相匹配的正则参数以及上述工作的快速数值实现，就成为正则化理论和方法的三大核心问题. 本书的论述大体上也是沿着上述三方面展开的. 其具体安排如下：

第一章从例举一些典型的反问题出发，介绍和讨论了适定与不适定问题的基本概念、反问题、不适定性及其与第一类算子方程的联系，并对求解第一类算子方程的各种途径作了简要的概括和阐发. 第二至第四章介绍了正则化方法发展的历

史渊源、它的基本理论和基于算子广义逆理论的各种推广，包括一般正则算子的构造、正则解的误差估计和确定正则参数的各种方法及优化等. 在第五至第七章中，讨论了正则化方法的最新发展，包括为提高正则解的精度和计算效率而提出的几种迭代正则化方法、具有我们自己特色的离散正则化方法和各种正则化算法的数值实现等问题. 其中，有些工作是我们近年来的研究成果. 在第八章中，给出了带有工程、物理和经济等应用背景，又具启发性的一些应用实例；其中，既有一维问题，也有二维问题，既有带连续核的问题，又有带弱奇性核的问题（比如 Abel 变换的数值反演和具有对数弱奇性核的第一类 Symm 积分方程的求解). 为了使读者对于从第一类线性算子方程的处理过渡到第一类非线性算子方程的处理有一个初步的了解和轮廓，我们在附录 C 中对其数值解法进行了简要描述，特别是对近期国内外的研究成果（也包括我们的工作）做了概括性的介绍，同时也给出了最新的参考文献. 最后，我们在附录 B 中还给出了几个由作者开发的示范性的 MATLAB 语言源程序 (M 文件)；具有一定专业知识和编程经验的读者不难根据自己的需要组装成相应的应用程序. 我们希望并且相信，这种安排对于理论工作者和实际工作者都将是有益的.

本书的出版得到了河北省自然科学基金委员会、河北工业大学各级领导和中国科学院数学与系统科学研究院袁亚湘研究员的大力支持，谨在此表示诚挚的谢意. 反问题的求解，是一个庞大的研究领域，囿于作者的兴趣和理解，加之篇幅有限，即使是正则化方法，也仍有一些重要内容未能涉及或展开，故其中的疏漏、取舍不当、抑或谬误之处恐亦难免，深望读者批评指正.

目　录

第一章 绪 论

近二十多年来，数学物理反问题已成为应用数学中发展和成长最快的领域之一；之所以如此，在很大程度上是受其他学科与众多工程技术领域的应用中产生的迫切需求所驱动 [42]. 在实践中，许多反问题可归结为第一类算子方程；而反问题的某些求解方法，例如脉冲谱技术 (PST) 或广义脉冲谱技术 (GPST) 及最佳摄动量法等 [171], 也常常包含以第一类算子方程的求解作为一个子过程，因此本书将以此为数学框架来描述和研究反问题. 本章将主要介绍一些可导致第一类算子 (主要是积分算子或矩阵) 方程的反问题的实例，分析它的数学特征 —— 不适定性. 特别是，我们将对求解反问题的思路和途径作出概要性的分析和讨论.

1.1 反问题与第一类算子方程

当谈到反问题 (inverse problems) 时，人们马上会问：何谓反问题？反演成什么？粗略地说，反问题是相对于正问题 (direct problems) 而言的. 按照 J.B.Keller[92] 的提法，若在两个问题中，一个问题的表述或处理涉及到或包含了有关另一个问题的全部的或部分的知识，我们称其中一个为正问题，另一个为反问题. 比如，各种积分变换及其反演就互为反问题. 又如，若对一个给定的多项式

$$p_n(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

在 $n+1$ 个已知点 $x_0, x_1, \cdots, x_n, x_i \in R^1$ 处赋值当作正问题，则其反问题就是 Lagrange 插值问题，即：给定 $n+1$ 组值 $(x_i, y_i), i = 0, 1, \cdots, n$, 要求决定 n 次多项式 $p_n(x)$ 的系数 c_i, 使其满足插值条件： $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$.

进而，我们称一个先前被研究得相对充分或完备的问题为正问题，而称与此相对应的另一个问题为反问题. 因而人们还有更深一层的约定：在两个相互为逆的问题中，如果一个问题在 Hadamard 意义下是不适定的 (其含义在下节说明); 特别是，若问题的解答 (答案) 不连续地依赖于原始数据，则称其为反问题. 因而，反问题又和不适定性 (ill-posedness) 紧密相联. 各种各样的反问题不仅出现于众多的工程问题和技术科学之中，而且出现于数学科学本身. 我们来考察几个典型的实例.

例 1.1 逆热传导问题

不妨考虑一维热传导方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad (x\in R^1,\ t>0) \tag{1.1.1}$$

$$u|_{t=0}=\phi(x)\qquad (x\in R^1) \tag{1.1.2}$$

其中， a 为热传导系数．利用 Fourier 变换及其反演可得

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\mathrm{d}\xi+ \\ &\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2\sqrt{t-\tau}}\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

(1) 若 $f(x,t)\equiv 0$, 则有

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\mathrm{d}\xi \tag{1.1.4}$$

这样，正问题是：已知 $\phi(x)$ 和 a, 通过式 (1.1.4) 求温度分布 $u(x,t)$. 与此相应的反问题是：已知某一时刻 T 时的温度分布 $u(x,T):=u_T(x)$ 和 a, 求初始时刻的温度分布 $\phi(x)$, 即关于 $\phi(x)$ 求解下述的第一类 Fredholm 积分方程：

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi T}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2T}\right\}\mathrm{d}\xi=u_T(x) \tag{1.1.5}$$

(2) 若 $\phi(x)\equiv 0$, 但 $f(x,t)=z(t)\chi_D(x)$, 则有

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_D\frac{z(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{1.1.6}$$

其中， $\chi_D(x)$ 为示性函数， D 为 R^1 中的有界区域．于是，正问题是由已知的 $z(t)$, 根据上式求出未来任一时刻的温度分布 $u(x,t)$. 反过来，若已知 $u(0,t)=g(t)$, 欲求 $z(t)$, 则它应是下述的第一类 Volterra 积分方程：

$$\int_0^t H(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau=g(t),\ \ t>0 \tag{1.1.7}$$

的解，其中

$$H(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_D\exp\left\{\frac{-\xi^2}{4a^2t}\right\}\mathrm{d}\xi$$

这样，关于 $z(t)$ 求解方程 (1.1.7) 正是 (1.1.6) 的反问题．这类问题是求未知的右端项 $f(x,t)=z(t)\chi_D(x)$, 亦称寻源反问题．有关热传导方面的反问题及其研究进展可参见文献 [6, 14, 184].

例 1.2　信号和图像处理中的反问题

信号和图像处理的一个重要内容是从观测数据中提取信息. 在许多实际问题中, 我们只知道部分时域或频域信号值, 希望由此而重构整个信号; 或者, 要求利用部分信号值来表示整个信号, 以达到数据压缩的目的. 例如, 在光学信号处理、谱估计和地震勘探数据处理等领域就经常遇到带限 (或 σ 频谱有限) 信号的重构和外推问题 [61, 116].

用 L_2^σ 表示全体 σ 频谱有限连续信号的集合, 则它是一个 Hilbert 空间. 设 $f(t) \in L_2^\sigma$, 根据它在区间 $[-T,T]$ 内的值, 求出它在该区间以外的值就称为频谱有限连续信号的外推. 首先, 它要求利用已知的 $f(t)$, $t \in [-T,T]$ 求出 $z(t) \in L_2[-T,T]$, 即求解卷积型积分方程 (反卷积)

$$h * z = \int_{-T}^{T} h(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \qquad t \in [-T,T] \tag{1.1.8}$$

然后根据下式:

$$f(t) = \int_{-T}^{T} h(t-\tau)z(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [-\infty,\infty] \tag{1.1.9}$$

对 $f(t)$ 作外推; 其中的 $h(t-\tau) = \sin\sigma(t-\tau)/\pi(t-\tau)$ 为该系统的脉冲响应函数; 类似的反卷积问题可能以二维或三维的形式出现, 或者以离散的形式出现 (离散带限信号的重构与外推问题)[148,157,158,199,209].

例 1.3　Abel 积分方程: 物理中的反问题

关于 Abel 积分方程及其反演的研究已有悠久的历史. 自 1923 年 Abel 在研究物理中的等时线轨迹问题时提出后来以他命名的积分方程以来, Abel 方程的各种推广以及相应的反演方法的探讨, 在体视学、地震学、光谱学、等离子物理、散射理论和空间探测等诸多领域得到了广泛的应用 [55]. 我们来考察一下等时曲线问题.

设有一质量为 m 的质点在重力 mg 的作用下, 从铅直平面中高度为 $h>0$ 处的点 p_1, 沿着某一曲线 Γ 无摩擦地滑到高度为 $h=0$ 处的点 p_0. 正问题是: 当曲线 Γ 给定后, 决定该质点从 p_1 滑到 p_0 所需的时间 T. 其反问题是: 假定已通过测量得出高度 h 与时间 T 的关系: $T=T(h)$, 要求决定该曲线 Γ 的形状. 不妨设该曲线的表达式为 $x=\psi(y)$, 则其上任一点 p 的坐标为 $(\psi(y),y)$. 根据能量守恒定律

$$E + U = \frac{m}{2}v^2 + mgy = \mathrm{const} = mgh$$

可知运动速度 v 应满足下述关系：

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\sqrt{2g(h-y)}$$

于是，由任一点 p 滑到 p_0 的总时间为

$$T=T(h)=\int_{p_0}^{p_1}\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^h\sqrt{\frac{1+\psi'(y)^2}{2g(h-y)}}\mathrm{d}y,\qquad h>0 \tag{1.1.10}$$

令 $\phi(y)=\sqrt{1+\psi'(y)^2}$, 且设 $f(h):=T(h)\sqrt{2g}$ 为已知 (由测量得到). 则反问题是由下面的 Abel 方程：

$$\int_0^h\frac{\phi(y)}{\sqrt{h-y}}\mathrm{d}y=f(h),\qquad h>0 \tag{1.1.11}$$

求未知函数 ϕ. 一个类似然而更重要的问题发生于地震学中，人们企图通过测量出地震波的传播时间来推断地壳运动的速度 [11]. 在等离子物理中，为了了解等离子辐射源的性质，常常用光谱方法测量和计算辐射源的各种物理参数，如温度、电子密度、离子密度等. 人们常常希望从可以测得的谱线性强度沿横向 x 的分布值 $I(x)$, 推算谱线性强度沿径向 r 的径向分布值 $\varepsilon(r)$. 即已知 $I(x)$, 关于 $\varepsilon(r)$ 求解下述形式的 Abel 方程：

$$2\int_x^R\frac{\varepsilon(r)r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-x^2}}=I(x),\qquad 0<x<R \tag{1.1.12}$$

关于 Abel 方程的其他更多的应用问题可参见文献 [55].

例 1.4 CT 技术中的反问题

Radon 于 1917 年在数学上证明了二维、三维的物体可由它的无限多个投影的逆变换实现重构. CT(computerized tomography, 计算机层析成像) 技术是计算机技术与 Radon 变换在医学成像方面的最突出的应用. Housefield 在 1972 年成功研制出头颅 X 射线断层摄影装置，使得 Radon 变换的理论得到应用，并因此而于 1979 年获诺贝尔医学奖. 其基本原理是：在不损伤物体本身结构的情况下，发射各种可通过物体的讯号 (如各种射线、波、粒子、电磁场等)，然后通过对从体外接收到的信号，利用数学方法和计算机进行加工和处理，获取物体内部结构的信息，形成该物体内部结构的三维透视图像，亦称图像重建或图像恢复 (image reconstruction/restoration). 我们考虑二维的情况：

考虑通过人体的某一平面 (截面)，用 $\rho(x,y)$ 表示点 (x,y) 处的密度，而用 L 表示该平面内的任一直线. 假定我们发射一束薄的 X 光束沿直线 L 穿过人体，

并且测量 X 光穿过人体后的强度的变化. 设直线 L 用参数 (s,δ) 来表征, 其中 $s\in R$, $\delta\in[0,\pi]$, 如图 1.1 所示.

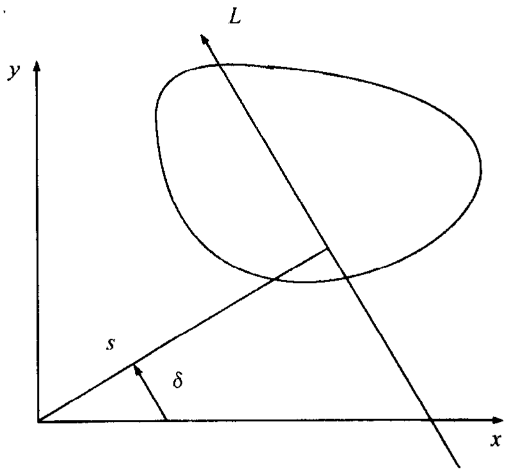

图 1.1　X 光扫描人体示意图

于是射线 $L_{s,\delta}$ 可表示为 $s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}\in C$, $u\in R$, 此处 C 代表复平面 R^2. 强度 I 的减弱可近似地表为 $\mathrm{d}I=-\gamma\rho I\mathrm{d}u$, γ 为一常数. 沿直线 L 积分将有

$$\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^{u}\rho(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\mathrm{d}u \tag{1.1.13}$$

或者, 若假定密度 $\rho(x,y)$ 具有紧支柱, 则相对的强度损失由下式给出:

$$\ln I(\infty)=-\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\mathrm{d}u \tag{1.1.14}$$

原则上, 由强度的减弱我们可计算所有的线积分

$$(R\rho)(s,\delta):=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}+\mathrm{i}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\mathrm{d}u,\qquad s\in R,\ \delta\in[0,\pi] \tag{1.1.15}$$

上式中的 $R\rho$ 称之为 ρ 的 Radon 变换. 于是, 正问题是: 对于给定的 ρ, 计算其 Radon 变换 $R\rho$; 而反问题则是: 由给定的 Radon 变换 $R\rho$(即, 所有线积分的测量值) 来决定密度函数 $\rho(x,y)$.

例 1.5 地质勘探

一般而言，地质勘探就是要通过对地球表面的某些测量资料来决定地球内部的地质情况（例如位置，形状或某些地质参数）的异常，以便为找矿、找水、找油等提供依据. 假定我们要了解地球内部的密度变化情况. 选定 (x, y) 平面位于地面，而 Oz 轴铅垂向下的直角坐标系 $Oxyz$，并且用 G 表示位于下半空间 $z > 0$ 内的一个源. 众所周知，具有密度 $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 分布的物质源 G 在其周围产生的引力位 $V = V(x, y, z)$ 为

$$V = \kappa \int\int\int_G \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{1.1.16}$$

其中，κ 为引力常数（等于 66.7×10^{-9}CGS）. 而在地面 $z = 0$ 上其重力场为 $\Delta g = \frac{\partial V}{\partial z}|_{z=0}$. 于是，根据式 (1.1.16) 乃得

$$\Delta g = \kappa \int\int\int_G \frac{\zeta \rho(\xi, \eta, \zeta)}{r^3} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{1.1.17}$$

其中，$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}$. 这样，所谓正问题是：由已知的密度分布 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$，根据上式计算出 Δg. 而反问题则是：若 Δg 已知，要由求解上述的第一类 Fredholm 方程来决定密度分布 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$；显然，后者要比前者困难得多.

例 1.6 数值微分问题

微分和积分是传统意义上互逆的数学问题. 给定一个具有解析公式的可微函数 $f(s)$，要求其导函数是比较容易的，但对于一个可积的函数 $x(t)$，要求其原函数，就不那么简单了. 然而，如果给定的 $f(s)$ 或 $x(t)$ 都是近似的，乃至是带有误差的离散值，情况就不一样了. 以后将会看到，对带有误差的函数 $f(t)$ 作数值微分，其数值稳定性要比对带有误差的函数 $x(t)$ 作数值积分差得多. 熟知，$f(s)$ 及其导函数 $f'(s) := x(s)$ 满足下述积分方程：

$$(Ax)(s) := \int_0^s x(t)\mathrm{d}t = f(s) - f(0) := F(s) \tag{1.1.18}$$

从而已知 $x(t)$ 求积分是一个"正"的运算，而已知 $F(s)$ 求上述方程的解 $x(t)$ 是一个"逆"的运算. 再加上许多反问题的求解常常包括着数值微分这一处理过程，而这一过程在数值上又不稳定，故我们将数值微分视为反问题，而将数值积分当作正问题.

例 1.7 投入产出问题

投入产出分析可能是我国应用得最广泛、最成功的经济模型之一. 目前, 除了用它来研究国民经济各部门之间的经济联系之外, 还被用于研究部门内部、地区之间、国家之间乃至全世界的经济联系.

不妨讨论价值型的投入产出模型. 作如下假设: (H1) 国民经济可划分为 n 个物质生产部门, 每个部门生产一种产品; (H2) 每个生产部门的生产意味着将其他部门的产品经过加工或"变换", 变成一定数量的本部门的产品. 在此过程中消耗的产品称之为"投入", 生产所得的本部门最终产品称之为"产出". 作为这个经济系统的各个组成部分, 每一部门的投入产出 (变换) 关系在一定时期内是不变的. 于是, 若记

$X_i =$ 第 i 个部门的总产品 (或总产值, 下同);

$Y_i =$ 第 i 个部门的最终产品 (或最终需求) 总量;

$X_{i,j} =$ 第 j 部门在生产过程中所消耗的第 i 部门的产品数量.

且假定投入和产出是平衡的, 则有下述关系:

$$X_{i,1} + X_{i,2} + \cdots, X_{i,n} + Y_i = X_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.19}$$

定义 $a_{ij} = X_{i,j}/X_j \ (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为直接消耗系数, 则 $X_{i,j} = a_{ij}X_j$, 从而

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{in}X_n + Y_i = X_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.20}$$

令 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$, $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^{\mathrm{T}}$ 分别表示直接消耗矩阵, 各部门的总产品向量和最终产品向量, 则式 (1.1.32) 可写成下述矩阵形式:

$$AX + Y = X$$

或

$$(I - A)X = Y \tag{1.1.21}$$

其中, I 为 n 阶单位矩阵. 于是正问题是: 由已知的消耗矩阵 A 和各部门的计划总产品向量 X, 求相应的最终产品向量 Y. 而反问题则是: 对于给定的最终需求 Y(计划) 和消耗矩阵 A, 求各部门的总产品向量 (生产计划安排)X. 由于消耗系数 a_{ij} 不仅与技术进步有关, 而且与管理水平有关, 故不能认为是一成不变的, 因而有时我们甚至要根据 Y 反求 X 和 A.

各种的反问题不胜枚举，有兴趣的读者可参见文献 [6, 36, 42, 60, 109, 171, 182]. 从实际应用角度来看，可以概括地说，有两种不同的动机驱动着反问题的研究：

(1) 想了解物理过程过去的状态或辨识其参数 (以便为预测的目的服务);

(2) 想了解如何通过干预当前的状态或调整某些参数去影响 (或控制) 该系统，以使其在未来达到人们所预期的状态.

因此，我们可以这样说，反问题就是要定量地探求：在已观察到的效果 (表现) 的背后的动因究竟是什么？以及对于期望达到的效果而言，应当预先施加何种措施或控制？

设 F 和 U 均为度量空间 (分别称之为解空间与数据空间)，算子 $A{:}F \to U$ 映 F 到 U，则前面所例举的各种反问题都可写成如下的第一类算子方程的形式：

$$Az = u, \qquad z \in F, \quad u \in U \tag{1.1.22}$$

自然，其中的 A 可为积分算子、微分算子或矩阵 (有限秩算子). 这样，所谓正问题就是：由已知的 A 和 z 求 u(一般来说，要相对容易一些)，而反问题则是在已知 u 和 A 的情况下由方程 (1.1.22) 求 z，即已知 u(效果、表现、输出)，反求 z(原因、原像、输入). 有时我们甚至仅在已知 u 的情况下同时求 z 和 A; 这样的问题在工程上称之为“综合型的反问题”，而在信号处理中则称之为“盲反褶积问题”[116]. 例如，研制新的科学仪器或技术设备，必需首先研究刻画其特性的数学模型；此时用 z 来表征该仪器的内部特性或表示输入信息，算子 A 表示该仪器的特性 (性能)，而 u 则表示该仪器的外部特性或输出信息.

今后，我们将把式 (1.1.22) 当作处理反问题的一般数学框架；当 A 为线性算子时，称其为线性反问题，否则称为非线性的反问题.

1.2 第一类算子方程的不适定性

上节所例举的反问题具有一个共同的特征，就是具有所谓的“不适定性”. 关于“适定” (well-posedness) 和“不适定” (ill-posedness) 的概念是 Hadamard 为了描述数学物理问题与定解条件的合理搭配，于 20 世纪初引入的 [63].

设 ρ_F 和 ρ_U 分别是空间 F 和 U 的度量， $A{:}F \to U$ 是线性或非线性映照. 他给出了下述的

定义 1.1 称问题或方程 (1.1.22) 为适定的，如果它同时满足下述三个条件：

C_1： $\forall u \in U$，都存在 $z \in F$ 满足方程 (1.1.22)(**解的存在性**)；