



21世纪全国本科院校电气信息类**创新型**应用人才培养规划教材

信号与系统

张建奇 主编



教材预览、申请样书



微信公众号: pup6book



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号与系统

张建奇 主 编
季玉茹 刘红喜 副主编
李 立



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书以应用型本科院校学生为授课对象,以“实用”和“够用”为基本原则,将“信号”分析和“系统”分析两个概念分开讲解,在保证基本知识完整的条件下,尽可能减少公式、性质的推导,使学生具备“理解”和“会用”的能力。本书主要内容包括信号的分类与基本特征,系统的基本概念,连续时间系统的时域分析,离散时间系统的时域分析,连续时间信号的频谱,连续时间系统的频域分析,连续时间信号的离散化和采样定理,连续时间信号的拉普拉斯变换,连续时间系统的复频域分析及应用,离散时间信号与系统的Z域分析,连续时间系统的状态空间分析。

本书适合作为电子信息、通信类专业及其相关专业的教材,也可供相关技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/张建奇主编. —北京:北京大学出版社, 2015. 6

(21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978-7-301-25984-9

I. ①信… II. ①张… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第139143号

书 名	信号与系统
著作责任者	张建奇 主编
责任编辑	郑 双
标准书号	ISBN 978-7-301-25984-9
出版发行	北京大学出版社
地 址	北京市海淀区成府路 205 号 100871
网 址	http://www.pup.cn 新浪微博:@北京大学出版社
电子信箱	pup_6@163.com
电 话	邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667
印 刷 者	北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米 16 开本 22.75 印张 528 千字
	2015 年 6 月第 1 版 2015 年 6 月第 1 次印刷
定 价	45.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子信箱:fd@pup.pku.edu.cn

图书如有印装质量问题,请与出版部联系,电话:010-62756370

前 言

本书根据应用型本科的教学要求编写，其目的是使学生更好地理解信号与系统的基本概念，熟悉信号与系统的基本分析方法。

“信号与系统”课程在大学信息工程学科专业课程中的重要性

进入 21 世纪以来，信息产业在生产及科研方面都加快了发展速度，并已成为国民经济发展的支柱产业之一。在千变万化、日新月异的电气工程学科的许多领域的学习中，“信号与系统”是一门基础课程，并且也是学习通信、信号处理和控制工程等课程的先修课程。

人们经常谈论信息、信息处理、信息系统和信息网络等问题，那么信息究竟是什么呢？控制论创始人维纳认为：信息是人和物体与外部世界交换内容的名称。“内容”是事物的原形，“交换”即信息载体将事物原形映射到人或其他物体的感觉器官，人们把这种映射的结果认为获得了“信息”。通俗地说，“信息”指人们得到的“消息”，即原来不知道的知识。

信息的具体表现形式是“信号”。或者说，信息是信号所包含的内容。

表现各种信息的信号都有一个共同点，即信号总是一个或多个独立变量的函数，而这些函数包含某种现象的特征。信号的种类是多种多样的。

所谓系统，就是由若干相互关联又相互作用的事物组合而成的、具有某种特定功能的整体。

在信号与系统课程中将离散时间和连续时间的概念融合在一起显得日益重要。正是本着这样的目的，本书以并行的方式建立了连续时间和离散时间信号与系统的分析方法。

要全面掌握“信号与系统”这门课，没有一定数量且能应用这些基本方法的练习是不可能的。

本书的基本编写思路

(1) 以应用类本院校科学生为主要授课对象，以培养应用型人才为基本目的。

(2) 以“实用、适用、够用”为基本原则。“实用”是指对本课程涉及的基本原理、基本性质、基本方法要讲全并讲透，概念要准确清晰。“适用”是指适用于授课对象，即应用型人才。“够用”是指从授课对象的培养目的上达到理论够用，不必追求理论的深度和内容的广度。

(3) 编写注重基本概念、基本方法的表述，编写内容上通俗易懂、易教易学、重在原理，压缩烦琐的理论推导。

(4) 在保证教材结构体系完整的前提下，注重知识点的讲解，过程简明、清晰且准确。

(5) 本书由“连续时间信号与系统”和“离散时间信号与系统”两部分内容组成。为



方便学生理解信号及系统的特性，书中将这两部分内容分开进行讲解。

(6) 书中在处理“连续时间信号与系统”和“离散时间信号与系统”的关系上，为了便于学生比较两者在分析方法和性质上的相似之处和不同之处，在编写时并没有安排成上半部分和下半部分，而是将这两部分的内容交叉编写。

本书如何满足课程的基本需要

- (1) 区分信号域与域的关系。
- (2) 区分时域与频域的关系。
- (3) 区分连续时间系统与离散时间系统的关系。
- (4) 区分理论分析与计算机实践仿真的关系。
- (5) 理论知识与习题训练的关系。
- (6) 吸引学生的注意力，书中加入了“知识要点提醒”和“小思考”内容。
- (7) 注重例题分析思路介绍。
- (8) 重点与难点及其他知识的关联性的介绍。

为强化与促进学习而设计的结构

(1) 强调信号与系统之间的理论核心是信号的分解特性和系统的线性特性，同时建立了两两者之间的逻辑联系。这种编写特点可以清晰地揭示出不同系统分析方法的基本思想和内在联系，有利于学生提高综合分析能力并掌握科学方法论。

(2) 本书分为“连续时间信号与系统”与“离散时间信号与系统”两部分，既体现了两者在理论上相对独立、内容上相互并行的特点，又遵循了先易后难、循序渐进的原则。

(3) 在系统时域分析中，强调系统解法，削弱经典解法，采用算子和传输算子概念描述时域分析法，使时域分析法与变换域分析法之间建立起一定的对应关系。

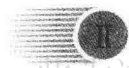
本书由浙江工业大学之江学院张建奇担任主编，由吉林化工学院季玉茹、长春工程学院刘红喜和安阳工学院李立担任副主编。在本书的编写过程中得到了浙江万里学院张增年、杨亚萍老师，中国计量学院信息工程学院金宁、周小微老师，杭州电子科技大学马金龙老师，浙江大学城市学院陈琢、乔闪、金晖、李秀梅老师和浙江工业大学之江学院骆崇老师在资料上的帮助并提供了宝贵的修改意见和建议，在此深表谢意。

本书获得“绍兴市重点教材”资助建设项目。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不当之处，敬请读者批评指正。

编 者

2014 年 12 月



目 录

第 1 章 信号的分类与基本特性	1	第 3 章 连续时间系统的时域分析	57
1.1 信号的基本概念与分类	2	3.1 卷积积分	58
1.1.1 信号是指什么	2	3.1.1 卷积的定义	58
1.1.2 信号有哪些类型	2	3.1.2 卷积积分的计算方法	58
1.1.3 周期信号	7	3.1.3 常用信号的卷积公式	59
1.2 两种常用的连续时间特殊信号	9	3.1.4 卷积积分的性质	59
1.3 离散时间基本信号	13	3.2 LTI 系统的微分算子方程	66
1.4 连续时间信号的基本运算	14	3.2.1 微分算子与积分算子	66
1.4.1 信号的相加与相乘	14	3.2.2 LTI 系统的微分算子方程	67
1.4.2 信号的平移、翻转和展缩	15	3.2.3 电路微分算子方程的建立	68
1.4.3 信号的微分和积分运算	19	3.3 连续时间系统的零输入响应	70
1.5 离散时间信号的运算	21	3.4 系统的冲激响应	73
1.5.1 离散时间信号的相加与 相乘	21	3.4.1 系统冲激响应的定义	73
1.5.2 离散时间信号的翻转、平移和 尺度变换	22	3.4.2 用算子法计算冲激响应	74
1.5.3 离散时间信号的差分 and 累加	24	3.5 连续时间系统的零状态响应	76
本章知识要点	26	3.6 系统微分方程的经典解法与零输入响应 和零状态响应解法的区别	80
习题 1	27	3.6.1 微分方程的经典解法	80
		3.6.2 具体的区别	82
		本章知识要点	86
		习题 3	88
第 2 章 系统的基本概念	32	第 4 章 离散时间系统的时域分析	93
2.1 系统	33	4.1 用单位冲激的线性组合表示离散 时间信号	94
2.1.1 系统的含义	33	4.2 卷积和	95
2.1.2 系统的分类	33	4.2.1 卷积和的定义	95
2.1.3 连续时间系统的描述	35	4.2.2 常用序列的卷积和公式	95
2.1.4 离散时间系统的描述	36	4.2.3 卷积和的性质	96
2.2 系统的框图表示	36	4.2.4 卷积和的计算方法	97
2.3 连续时间系统的性质	40	4.3 离散时间系统响应	102
2.3.1 连续时间系统的性质	41	4.3.1 离散时间系统的算子 方程	103
2.3.2 离散时间系统特性	48	4.3.2 离散时间系统的零输入 响应	104
本章知识要点	52		
习题 2	53		



4.4	离散时间系统的单位脉冲响应	107	6.1.3	利用电路频域等效模型 求系统函数	162
4.5	离散时间系统的零状态响应	109	6.2	系统的零状态响应	164
4.5.1	离散时间系统的零状态 响应	110	6.2.1	基本信号 $e^{j\omega t}$ 激励下系统的 零状态响应	164
4.5.2	离散时间系统的完全 响应	111	6.2.2	一般信号作用下系统的零状态 响应及完全响应	165
本章知识要点		112	6.3	系统的无失真传输	168
习题 4		113	6.3.1	失真的概念	168
第 5 章 连续时间信号的频谱		118	6.3.2	系统的无失真传输条件	169
5.1	周期信号的傅里叶级数	119	6.4	理想低通滤波器特性	172
5.1.1	三角形式的傅里叶级数	119	6.4.1	理想低通滤波器及其冲激 响应	172
5.1.2	指数形式的傅里叶级数	121	6.4.2	理想低通滤波器及其阶跃 响应	174
5.2	周期信号的频谱	122	本章知识要点		177
5.2.1	信号频谱的基本概念	122	习题 6		178
5.2.2	周期矩形脉冲信号的 频谱	123	第 7 章 连续时间信号的离散化和采样 定理		182
5.2.3	周期信号的频谱特点	125	7.1	如何将连续时间信号转化为数字 信号	183
5.3	非周期信号的傅里叶变换	127	7.2	连续时间信号时域采样	183
5.3.1	非周期信号的傅里叶 变换	127	7.2.1	理想采样	183
5.3.2	常用非周期信号的傅里叶 变换	129	7.2.2	周期矩形脉冲采样	189
5.4	傅里叶变换的基本性质	135	7.3	信号 $f(t)$ 的理想重构方法	191
5.5	周期信号的傅里叶变换	151	7.3.1	频域理想重构	191
5.5.1	复指数函数 $e^{j\omega_c t}$ 的傅里叶 变换	151	7.3.2	时域理想重构	194
5.5.2	余弦、正弦信号的傅里叶 变换	151	7.4	频域采样	195
5.5.3	一般周期信号的傅里叶 变换	152	7.4.1	频域采样与采样定理	195
5.5.4	周期信号傅里叶级数系数 F_n 与 频谱函数 $F(j\omega)$ 的关系	153	7.4.2	信号的恢复	197
本章知识要点		155	本章知识要点		199
习题 5		156	习题 7		200
第 6 章 连续时间系统的频域分析		160	第 8 章 连续时间信号的拉普拉斯 变换		202
6.1	连续时间系统的频域响应	161	8.1	双边拉普拉斯变换	203
6.1.1	连续时间系统的频域 描述	161	8.1.1	从傅里叶变换到拉普拉斯 变换	203
6.1.2	利用微分方程求系统 函数	162	8.1.2	双边拉普拉斯变换及其 收敛域	204
			8.2	单边拉普拉斯变换	206

8.2.1 单边拉普拉斯变换及其收敛域	206	10.1.2 双边 Z 变换及收敛域	271
8.2.2 常用信号的单边拉普拉斯变换	207	10.1.3 常用序列的双边 Z 变换	274
8.3 单边拉普拉斯变换的特性	209	10.2 单边 Z 变换	274
8.4 周期信号的拉普拉斯变换	218	10.2.1 单边 Z 变换及收敛域	274
8.5 拉普拉斯逆变换	220	10.2.2 常用序列的单边 Z 变换	275
8.5.1 部分分式展开法	220	10.3 Z 变换的性质	276
8.5.2 留数法	225	10.3.1 双边 Z 变换的性质	276
本章知识要点	227	10.3.2 单边 Z 变换的性质	286
习题 8	228	10.4 Z 逆变换	290
第 9 章 连续时间系统复频域分析及应用	231	10.4.1 幂级数展开法 (长除法)	290
9.1 连续时间系统的零状态响应	232	10.4.2 部分分式展开法	292
9.1.1 基本信号 e^s 激励下的零状态响应	232	10.4.3 反演积分法 (留数法)	297
9.1.2 一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应	232	10.4.4 单边 Z 逆变换的计算方法	300
9.2 利用拉普拉斯变换求解微分方程	235	10.5 离散时间系统的 Z 域分析	301
9.3 利用拉普拉斯变换进行电路网络分析	239	10.5.1 离散时间系统的 Z 域分析	301
9.4 连续时间系统信号流图及系统的模拟	246	10.5.2 离散时间系统差分方程的 Z 域分析	303
9.4.1 连续时间系统的框图表示	246	10.6 离散时间系统的频率响应与稳定性	308
9.4.2 系统的信号流图表示、梅森公式	250	10.6.1 离散时间系统频率响应	308
9.4.3 系统的模拟	254	10.6.2 离散时间系统的稳定性	310
9.5 系统函数与系统的稳定性	257	本章知识要点	313
9.5.1 系统函数与系统的零极点	257	习题 10	314
9.5.2 $H(s)$ 与系统的稳定性	260	第 11 章 连续时间系统的状态空间分析	319
本章知识要点	264	11.1 状态空间方程	320
习题 9	265	11.1.1 状态空间描述	320
第 10 章 离散时间信号与系统的 Z 域分析	269	11.1.2 状态空间方程的一般形式	321
10.1 Z 变换	270	11.2 连续时间系统状态方程的建立	324
10.1.1 从拉普拉斯变换到 Z 变换	270	11.2.1 电路网络状态方程的直接建立	324



11.2.2 由微分方程建立系统状态 空间方程	326	11.3.2 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的 计算	337
11.2.3 由系统函数建立系统状态 空间方程	330	11.3.3 系统响应的时域计算	339
11.3 连续时间系统状态空间方程的 响应	334	11.3.4 连续时间系统状态方程的 复频域响应	341
11.3.1 连续时间系统状态方程的 时域求解	334	本章知识要点	346
		习题 11	347
		参考文献	350

第1章

信号的分类与基本特性



内容摘要

信号分析是电类专业所必须掌握和了解的一个基本概念，信号存在于电类知识的整个过程中。掌握信号的基本概念、描述方法、信号的分类和基本特性是研究信号分析、信号处理和信号传输的基础，同时，也是学好电类课程必不可少的条件。本章主要介绍信号的基本概念、信号的分类、连续时间信号及其特点、离散时间信号及其特点和信号的基本运算。



教学要点

知识要点	掌握程度	相关知识	工程应用方向
信号分类	了解信号的种类	常见电信号	电信号与非电信号
连续时间信号特点	熟悉信号的特点	连续时间信号	模拟信号
离散时间信号特点	熟悉信号的特点	离散时间信号	数字信号
信号运算	掌握信号的基本运算方法	信号的基本运算方法	信号的通信



教学目标与要求

了解信号的基本概念和分类。

熟悉连续时间信号及其特点。

熟悉离散时间信号及其特点。

掌握信号的基本运算。



1.1 信号的基本概念与分类

1.1.1 信号是指什么

当今世界已进入信息技术时代，在日常生活和社会活动中，信息正无时无刻地影响着人们的生活方式，如人们常用的电脑、手机、卫星通信及 GPS 全球定位系统和物联网等，图 1.1 为 GPS 全球定位系统的示意图。因此，信息是人们交流和交往的一个重要渠道。人们通常把信息的具体表现形式称为信号，即信号是代表信息的物理形式或物理量。信号是信息包含内容的具体形式。从物理概念上，信号是某种随时间变化的信息。从数学上，



图 1.1 GPS 示意图

信号可以定义为传达某种物理现象的一个函数。在不同的场合信号表现的形式也不相同。在“信号与系统”中，重点关注一维的单值函数，尤其要关注其中的电信号。

1.1.2 信号有哪些类型

信号的分类方法有多种形式，根据信号研究的领域和应用场合的不同，通常有以下几种分类方式。

1. 连续时间信号和离散时间信号

1) 连续时间信号

对任意一个信号，如果在定义域内，除有限个间断点外均有定义，则称此信号为连续时间信号。连续时间信号是指信号的时间是连续的，而幅度既可以是连续的也可以是离散的。

在电工学中，人们还经常用到模拟信号。

模拟信号是指信号的时间是连续的，而且信号的幅度也是连续的。

显然，连续时间信号包含了模拟信号。

2) 离散时间信号

离散时间信号是指时间离散的信号，其幅度可以是离散的也可以是连续的。在离散时间信号中包含序列和数字信号。

序列是指时间是离散的且按等间距分布的信号，其幅度可以是连续的也可以是离散的。

数字信号是指时间是离散的且按等间距分布的信号，其幅度也是离散的且是最小量化单位的整倍数。

图 1.2 为连续时间信号和离散时间信号的波形图。

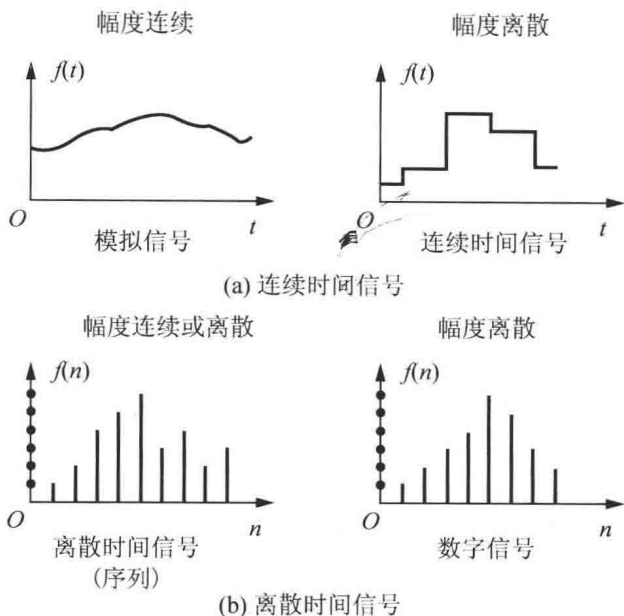


图 1.2 连续时间信号与离散时间信号波形图

2. 确定信号与随机信号

1) 确定信号

确定信号是指对某一确定时刻，就有某一确定数值与其对应的信号。确定信号可以表示为时间的函数。图 1.3 所示为一个指数信号波形图，在 t_1 时刻，对应的数值为 $f_1(t)$ ，在 t_2 时刻，对应的数值为 $f_2(t)$ 。确定信号往往可以用函数解析式、图表和波形来表示。

2) 随机信号

随机信号是指事先无法预测它的变化趋势，也无法预先知道其变化规律的信号。随机信号可以看作属于一个信号集，信号集中每个信号具有不同的波形。图 1.4 所示为随机信号波形图。

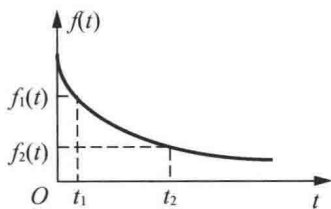


图 1.3 指数信号波形

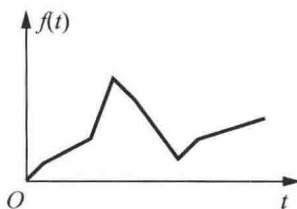


图 1.4 随机信号波形

在实际工作中，系统总会受到各种干扰信号的影响，例如电磁干扰等。这些干扰信号不仅在不同时刻的信号值是互不相关的，而且在任一时刻信号的幅值和相位都是在不断变化的。因此，从严格意义上讲，绝大多数信号都是随机信号，只不过我们在研究信号与系统时，常常忽略一些次要的干扰信号，主要研究占统治地位的信号的性质和变化趋势。本



书主要研究确定信号。

3. 能量信号和功率信号

1) 能量信号

在一个电系统中, 信号可以是电压, 也可以是电流。

将一个电压或电流信号 $f(t)$ 加到单位电阻上, 则在该电阻上产生的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在一段时间 $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ 内消耗一定的能量, 把该能量对时间区域取平均, 即得信号在此区间内的平均功率。

对连续时间信号, 若将时间区域无限扩展, 信号满足条件

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1-1)$$

称为能量信号, 即如果一个信号在无限大时间区域内信号的能量为有限值, 则称该信号为能量有限信号或能量信号。

能量信号的平均功率为零。

根据能量信号的定义, 显然可以得出: 确定信号和非周期信号是能量信号。

对离散时间序列, 定义

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \quad (1-2)$$

为能量信号。

2) 功率信号

将时间区域无限扩展, 信号满足条件

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} E < \infty \quad (1-3)$$

称为功率信号, 即如果在无限大时间区域内信号的功率为有限值, 则称该信号为功率有限信号或功率信号。

功率信号的能量无穷大。

周期信号和随机信号是功率信号。

对离散时间序列, 定义

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2 < \infty \quad (1-4)$$

称为功率信号。

平均功率的计算公式为

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 \quad (1-5)$$

【小思考】 在学过的常用信号中, 哪些是能量信号? 哪些是功率信号?

【例 1.1】 判断下列信号是否为能量信号或功率信号, 并求出它们的值。

$$(1) f_1(t) = u(t+5) \quad (2) f_2(t) = 2e^{t^2}$$

【解题思路与技巧】 先计算能量 E , 若为有限值则为能量信号。否则计算功率 P , 若



为有限值则为功率信号。否则，两者都不是。

解：(1) 能量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u(t+5))^2 dt = \int_{-5}^{\infty} 1 dt = +\infty$$

功率

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (u(t+5))^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-5}^{\frac{T}{2}-5} 1 dt = \frac{1}{2}$$

为功率信号。

(2) 能量

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (2e^{t^2})^2 dt = \infty$$

功率

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (2e^{t^2})^2 dt = \infty$$

即不是能量信号也不是功率信号。

【例 1.2】 计算图 1.5 所示的矩形脉冲信号的总能量。

【解题思路与技巧】 利用能量信号的定义求解。

解：

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E^2 dt = E^2 T$$

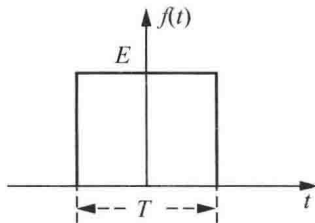


图 1.5 矩形脉冲信号

【例 1.3】 计算图 1.6 所示周期方波信号的平均功率。

【解题思路与技巧】 利用功率信号的定义求解。

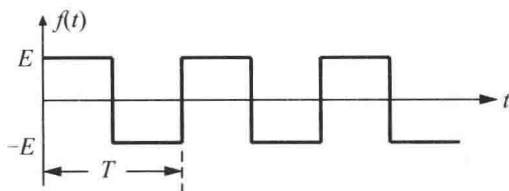


图 1.6 周期方波信号

解：

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} E^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-E)^2 dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (E^2 T) = E^2 \end{aligned}$$

4. 偶信号和奇信号

如果一个连续时间信号 $f(t)$ 满足

$$f(-t) = f(t) \quad \text{对所有的 } t \quad (1-6)$$

则称该信号为偶信号。



如果一个连续时间信号 $f(t)$ 满足

$$f(-t) = -f(t) \quad \text{对所有的 } t \quad (1-7)$$

则称该信号为奇信号。

对于任意信号 $f(t)$ 都可以分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合。

设函数 $f(t)$ 的偶函数分量为 $f_e(t)$, 奇函数分量为 $f_o(t)$, 则

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (1-8)$$

可以推出

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad (1-9)$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \quad (1-10)$$

【例 1.4】 将 $f(t) = \sin t + \cos t + \cos t \sin t$ 分解成奇函数分量和偶函数分量。

【解题思路与技巧】 利用函数可分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合公式求解。

解: 由于偶函数分量

$$\begin{aligned} f_e(t) &= \frac{[\sin t + \cos t + \sin t \cos t] + [\sin(-t) + \cos(-t) + \sin(-t)\cos(-t)]}{2} \\ &= \frac{2\cos t}{2} = \cos t \end{aligned}$$

同理, 奇函数分量

$$f_o(t) = \sin t + \sin t \cos t = \sin t(1 + \cos t)$$

【例 1.5】 判断下列信号是偶函数还是奇函数?

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

【解题思路与技巧】 利用函数可分解为偶函数分量和奇函数分量的线性组合公式求解。

解: 用 $-t$ 代替 t , 可得

$$\begin{aligned} f(-t) &= \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi t}{T}\right) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ &= -f(t) \end{aligned}$$

故该信号是奇函数。





1.1.3 周期信号

1. 连续时间周期性信号

1) 定义

一个连续时间信号 $f(t)$, 若对所有的 t 值均满足条件

$$f(t) = f(t + mT) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-11)$$

则称为周期信号。满足上式的最小 T 值称为 $f(t)$ 的周期。

不满足周期信号条件的信号为非周期信号。

【知识要点提醒】

两个周期信号相加不一定为周期信号。若这两个信号的周期分别为 T_1 和 T_2 , 只有当 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{M}{N}$, 且 M 和 N 均为正整数或 $\frac{T_1}{T_2}$ 为有理数时, 信号才是周期的。

2) 两种特殊信号的周期

对于一般信号 $f(t)$ 周期性的判断, 通常用定义来判别。但若信号为正弦信号和虚指数信号时, 可直接用公式来判断并计算其周期。

当为正弦信号时, 设 $f(t) = A \sin \omega_0 t$, 由周期信号的定义

$$f(t + T) = A \sin \omega_0 (t + T) = A \sin \omega_0 (t + T) = A \sin (\omega_0 t + \omega_0 T) = A \sin \omega_0 t = f(t)$$

可见 $\omega_0 T = 2k\pi$ 。当 $k = 1$ 时 $\omega_0 T = 2\pi$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

显然, 连续时间正弦信号周期的计算公式为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1-12)$$

当为虚指数信号时, 设 $f(t) = e^{j\omega_0 t}$

根据欧拉公式, 虚指数可表示为

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \quad (1-13)$$

【知识要点提醒】

1) 虚指数信号的波形是一个正弦周期信号波形。

2) 在计算信号周期时, 只有正弦信号和虚指数信号的周期可以用

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1-14)$$

计算, 其他信号的周期需要用定义来计算。

【例 1.6】 判断下列信号是否为周期信号, 若是, 求出其周期。

$$(1) f(t) = 3 \sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$(2) f(t) = \sin^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(3) f(t) = 3\sin 5t + 2\cos \pi t$$

$$(4) f(t) = e^{j\frac{3}{4}t}$$

$$(5) f(t) = e^{j(\frac{1}{2}t-1)}$$

【解题思路与技巧】 首先利用连续时间信号的周期计算定义或公式求周期 T , 若存在周期 T , 即为周期信号, 否则为非周期信号。

解: (1) $f(t) = 3\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$

因为 $\omega_0 = 3$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}$, 故该函数是周期信号, 周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 。

$$(2) f(t) = \sin^2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

因为 $\omega_0 = 2$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故该函数是周期信号, 周期为 π 。

$$(3) f(t) = 3\sin 5t + 2\cos \pi t = f_1(t) + f_2(t)$$

因为 $\omega_1 = 5$, 有 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5}$; $\omega_2 = \pi$, 有 $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 则 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{5}$, 因为 $\frac{M}{N}$ 不为正整数, 故该函数不是周期信号。

$$(4) f(t) = e^{j\frac{3}{4}t}$$

因为 $\omega_0 = \frac{3}{4}$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{8\pi}{3}$, 故该函数是周期信号, 周期为 $\frac{8\pi}{3}$ 。

$$(5) f(t) = e^{j(\frac{1}{2}t-1)}$$

因为 $\omega_0 = \frac{1}{2}$, 则 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4\pi$, 故该函数是周期信号, 周期为 4π 。

2. 离散时间周期信号

对一个离散时间信号 $f(n)$, 若对所有的 n 值均满足条件。

$$f(n) = f(n + mN) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1-15)$$

则称 $f(n)$ 为离散时间周期信号。其中最小的正整数 N 值为信号 $f(n)$ 的周期。

不满足周期信号条件的信号为非周期信号。

【知识要点提醒】

与连续时间正弦信号不同, 离散时间正弦信号并不一定是周期的, 这是由于在离散时间信号中自变量 n 的取值是整数, 故信号的周期 N 也一定为整数, 而对任意一个正弦信号并不一定总能找到满足要求的正整数 N 。

即对离散时间信号而言, 只有当 m 和 N 均为正整数, 信号才是周期的。

与连续时间信号类似, 离散时间正弦信号和复指数信号周期性判断及计算公式为

$$N = k \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (1-16)$$